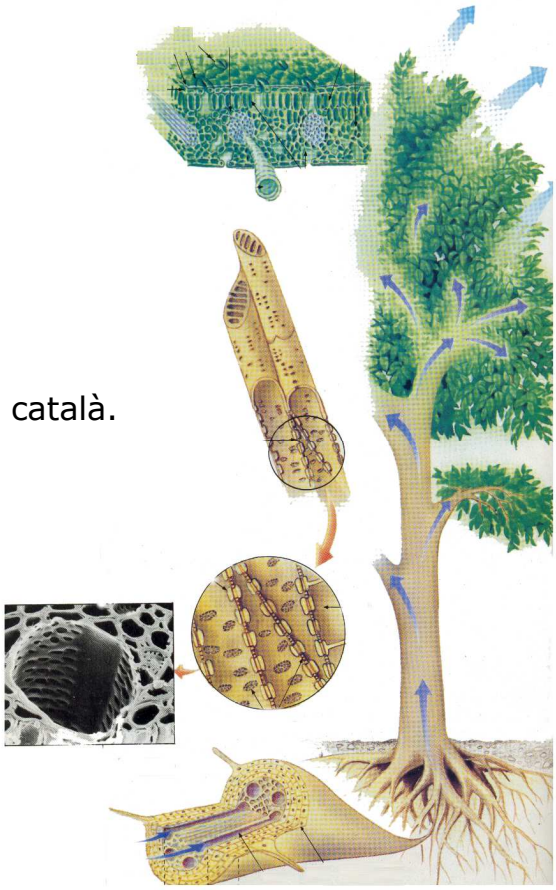
Apunts de Física I



Jordi Farjas Silva

Departament de Física

Universitat de Girona, 2010. 1a ed. català.
Edició electrònica

Ressenya:
Aquest text pretén ser una guia útil per als estudiants del grau en Enginyeria Agroalimentària. El document s'estructura en set temes organitzats en dos blocs. El primer bloc és una introducció als conceptes bàsics de l'estàtica i el segon bloc el dediquem a la descripció dels fluids. Per a cada tema s'estableixen les **competències específiques** que s'han d'assolir, es desenvolupen de manera esquemàtica els **continguts** i s'adjunten **exemples resolts** de problemes. Al final de cada tema s'inclou també una col·lecció de qüestions i problemes. Aquest llibre pretén ser una breu recopilació dels continguts bàsics de l'assignatura. Al final del llibre, trobareu una bibliografia recomanada per poder desenvolupar exhaustivament la matèria.

L’autor vol agrair al professor Josep Maria Massaneda i Clares la seva participació en la revisió i correcció d’aquests apunts.

1. Introducció a la física **3**
Què és la física? 3
Sistemes d'unitats 3
Magnituds fonamentals i derivades 3
Anàlisi dimensional 5
Forces a la natura 6
Lleis de Newton 7
Forces de fricció 9
Treball i energia 11

Qüestions del tema 1 **17**

I. Estàtica i elasticitat ***27***

2. Estàtica **28**
Anàlisi vectorial 28
Condició d'equilibri de la partícula puntual 31
Què és un sòlid rígid? 32
Principi de transmissibilitat 33
Moment de força 33
Parell de forces 34
Condició d'equilibri del sòlid rígid 35
Punts de recolzament 36
Diagrama del sòlid lliure 36
Centre de gravetat 37
Moments de segon ordre d'àrees 40
Introducció al càlcul d'estructures 42

Qüestions del tema 2 **44**

3. Elasticitat **54**
Cossos deformables 54
Esforç i deformació 54
Diagrama esforç-deformació. Llei de Hooke 56
Mòduls d'elasticitat: mòdul de Young i coeficient de Poisson 57
Cisallament. Mòdul de cisallament o torsió 59
Mòdul de compressibilitat 60
Flexió de barres 61

Qüestions del tema 3 **64**

II. Fluids ***69***

4. Estàtica de fluids **70**
Què és un fluid? 70
Densitat 71
Pressió 72
Equació fonamental de l'estàtica de fluids 72
Principi de Pascal 74
Principi d'Arquimedes 75
Pressió atmosfèrica: experiència de Torricelli 76
Manòmetre 77
Forces i moments sobre parets i preses 78

Qüestions del tema 4 **80**

5. Forces de cohesió en líquids **85**
Fenòmens moleculars: adhesió i cohesió 85
Tensió superficial 86
Capil·laritat: llei de Jurin 87
Llei de Laplace 90
Aplicació: l'ascens de la saba als arbres, pressions negatives 92

Qüestions del tema 5 **95**

6. Dinàmica de fluids ideals **98**
Equació de continuïtat, flux estacionari 98
Equació de Bernoulli: efecte Venturi 100
Sondes 104
Bombes 106
Aplicacions: polvorització, vol dels avions i dels ocells 107

Qüestions del tema 6 **109**

7. Dinàmica de fluids viscosos **114**
Viscositat 114
Flux laminar i turbulent: nombre de Reynolds 117
Flux en una canonada: llei de Poiseuille 118
Moviment de sòlids en fluids a baixa i alta velocitat: llei de Stokes 123
Aplicacions: centrifugació i sedimentació 126
Demostració de la llei de Poiseuille 128

Qüestions del tema 7 **130**

8. Bibliografia **135**

9. Índex alfabètic **136**

1. Introducció a la física

Objectius:

Què és la física?
Què són els sistemes d'unitats?
Classificació dels diferents tipus de magnituds
Sistemes d'unitats SI, CGS i MKS
Anàlisi dimensional
Descripció de les tres lleis de Newton
Conceptes de treball i energia d'una partícula puntual
Què són les forces conservatives?

Què és la física?

La física és una ciència natural, és a dir, intenta descriure el nostre entorn i en particular els fenòmens més fonamentals. En general, el nivell de coneixement disminueix amb la complexitat dels fenòmens estudiats; per aquesta raó, la física assoleix uns nivells de comprensió molt elevats. D'aquesta manera, gràcies al coneixement generat, la física ha propiciat el desenvolupament tecnològic. A més, actualment la física proporciona bases metodològiques per al desenvolupament quantitatiu d'altres ciències.

La descripció dels fenòmens es fa a partir de les lleis de la física. En termes generals, una llei relaciona diferents magnituds; per exemple, el temps de caiguda d'un objecte respecte de l'espai recorregut.

Tipus de magnituds:

Escalars → valor numèric (per ex. temperatura)
Vectorials → valor, direcció i sentit (per ex. velocitat del vent)
Tensorials → matricials (per ex. resposta elàstica dels materials)

Problema: quantificar les magnituds, donar o assignar un valor numèric que permeti comparar les observacions fetes per diferents laboratoris.

Sistemes d'unitats

Cal una referència (estandardització) que unifiqui les magnituds: *sistemes d'unitats.* En aquest curs treballarem bàsicament amb el *sistema d'unitats internacional* (SI). També treballarem amb el *sistema d'unitats cegesimal* (CGS) i amb el *sistema d'unitats tècnic* (MKS).

Magnituds fonamentals i derivades

La majoria de magnituds físiques es poden expressar en funció d'unes unitats fonamentals. Pel que fa a la mecànica:

SI	CGS

Longitud	m (metre)	cm	[*L*]
Temps	s (segon)	s	[*T*]
Massa	kg (quilogram)	g	[*M*]

Per exemple:

$$\left.\begin{array}{l} \text{La velocitat}: [\mathrm{V}] = \dfrac{[\mathrm{L}]}{[\mathrm{T}]} = \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ \text{La força}: [\mathrm{F}] = \dfrac{[\mathrm{M}][\mathrm{L}]^2}{[\mathrm{T}]} = \mathrm{N}\ \text{(newton)} \end{array}\right\} \text{Magnituds derivades}$$

A partir de les unitats fonamentals es pot construir el sistema complet d'unitats.

També es podria agafar com a unitat fonamental la força [*F*] en lloc de la massa [*M*]. Aquesta és l'opció triada en el sistema tècnic MKS.

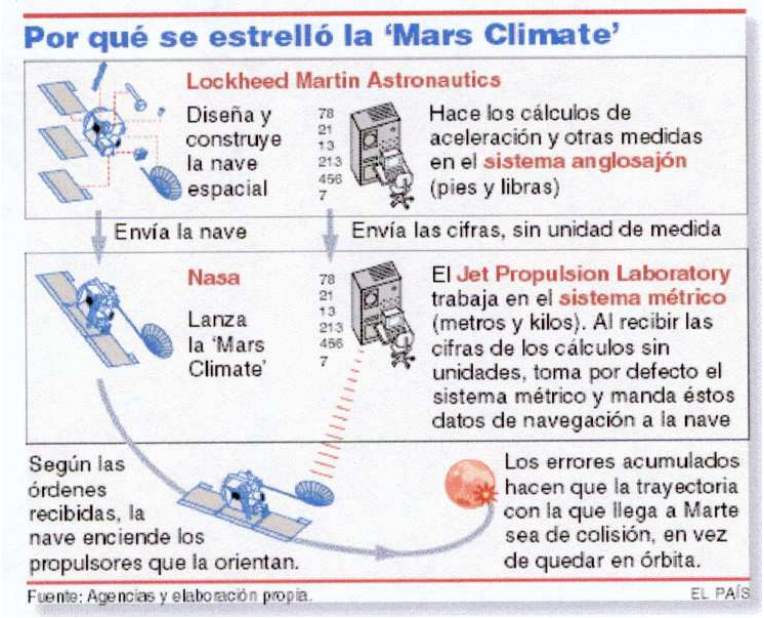
	MKS	
Longitud	m (metre)	[*L*]
Temps	s (segon)	[*T*]
Força	kp (kilopondi)	[*F*]

Així: $[\mathrm{M}] = \dfrac{[\mathrm{F}][\mathrm{T}]}{[\mathrm{L}]^2}$

El kp és el pes d'1 kg de massa: $1\,\mathrm{kp} = mg = 1\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{m/s}^2 = 9{,}8\,\mathrm{N}$.

Els canvis d'unitats es poden fer mitjançant els *factors de conversió*:

$$180\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot \frac{1.000\,\mathrm{m}}{1\mathrm{km}} \cdot \frac{1\mathrm{h}}{60\mathrm{min}} \cdot \frac{1\mathrm{min}}{60\,\mathrm{s}} = 50\,\mathrm{m/s}$$



El 1999 la *Mars Climate* es va estavellar per un problema d'unitats.

Molt important: és inacceptable una magnitud sense unitats.
Font habitual d'errors: ús simultani d'unitats de diferents sistemes. Sempre cal que totes les magnituds s'expressin en un únic sistema d'unitats.

Anàlisi dimensional

Les lleis es poden expressar com equacions matemàtiques, per exemple:

La primera llei de Newton: $\vec{F} = m\vec{a}$ i els seus desenvolupaments.

El moviment rectilini uniformement accelerat (MRUA): $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.

Totes les relacions entre magnituds han de ser homogènies, per exemple per al MRUA:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$[L] = [L] + \frac{[L]}{[T]}[T] + \frac{[L]}{[T]^2}[T]^2$$

L'anàlisi dimensional té dues utilitats:

1) Ens fa entendre què vol dir i per a què serveix una llei a través de les magnituds que relaciona.
2) Ens permet evitar i detectar errors en expressions, per exemple:

$$F_{cp} = m\frac{v}{R}? \qquad \text{o} \qquad F_{cp} = m\frac{v^2}{R}?$$

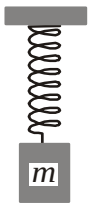
Anàlisi dimensional:

$$[\mathrm{F}] = [\mathrm{M}]\frac{[\mathrm{L}]}{[\mathrm{T}]^2} \qquad \cancel{m\frac{v}{R} : [\mathrm{M}]\frac{[\mathrm{L}]}{[\mathrm{T}][\mathrm{L}]} = \frac{[\mathrm{M}]}{[\mathrm{T}]}} \qquad m\frac{v^2}{R} : [\mathrm{M}]\frac{[\mathrm{L}]^2}{[\mathrm{T}]^2[\mathrm{L}]} = [\mathrm{M}]\frac{[\mathrm{L}]}{[\mathrm{T}]^2}$$

També ens pot permetre elaborar relacions. Per exemple, sabem que en una molla la força elàstica és proporcional a l'allargament x:

$$F = K \cdot x \quad \Rightarrow K = \frac{F}{x} \Rightarrow [K] = \frac{[\mathrm{M}][\mathrm{L}]}{[\mathrm{L}][\mathrm{T}]^2} = \frac{[\mathrm{M}]}{[\mathrm{T}]^2}$$

Quant val el període d'oscil·lació d'una massa m penjada verticalment d'una molla de constant elàstica K?



T? depèn de m, g i K

$$T \propto m^a \cdot g^b \cdot K^c \Rightarrow [\mathrm{T}] = [\mathrm{M}]^a \frac{[\mathrm{L}]^b}{[\mathrm{T}]^{2b}} \frac{[\mathrm{M}]^c}{[\mathrm{T}]^{2c}} = [\mathrm{M}]^{a+c}[\mathrm{L}]^b[\mathrm{T}]^{-2b-2c}$$

$$\left.\begin{array}{l} a+c=0 \\ b=0 \\ -2c-2b=1 \end{array}\right\} \Rightarrow a=1/2, \quad b=0 \quad \text{i} \quad c=-1/2$$

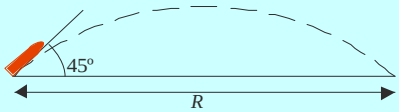
Així doncs, el període no depèn de l'acceleració de la gravetat g,

$$T \propto m^{1/2} \cdot K^{-1/2} = \sqrt{\frac{m}{K}}.$$

Es pot demostrar que la constant de proporcionalitat és 2π :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

<u>Exemple</u>: Un projectil llançat amb una inclinació de 45° recorre una distància total R, anomenada *abast*, que només depèn de la velocitat inicial v i de l'acceleració de la gravetat g (dimensions LT^{-2}). Mitjançant l'anàlisi dimensional, esbrineu com R depèn de la velocitat i de g.



$$R \propto v^a g^b \Rightarrow [\mathrm{L}] = \frac{[\mathrm{L}]^a}{[\mathrm{T}]^a}\frac{[\mathrm{L}]^b}{[\mathrm{T}]^{2b}} = [\mathrm{L}]^{a+b}[\mathrm{T}]^{-a-2b}$$

$$\left.\begin{array}{l} a+b=1 \\ -a-2b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a=2 \quad \text{i} \quad b=-1 \Rightarrow R \propto \frac{v^2}{g}$$

Forces a la natura

Què és una força? És la causa del moviment.

$$\text{Tipus de força} \quad \left\{\begin{array}{l} \text{de contacte} \\ \text{a distància} \end{array}\right.$$

Les forces a distància actuen sense que hi hagi contacte entre els cossos. Les forces a distància són d'origen fonamental:

- Gravitatòries:

  $F = G\dfrac{Mm}{r^2}$, a la superfície de la terra : $F \approx G\dfrac{M_T}{R_T^2}m = mg$, $g = 9{,}81\, m/s^2$
- Elèctriques: associades a la càrrega elèctrica.
- Nuclears fortes: mantenen el nucli atòmic unit contra la repulsió elèctrica.
- Nuclears febles: origen de la radioactivitat i de la desintegració dels nuclis radioactius.

Les forces de contacte són les forces que apareixen quan hi ha contacte entre objectes sòlids. A nivell microscòpic, estan relacionades amb els enllaços moleculars (forces de fricció) i les repulsions elèctriques (reaccions).

Lleis de Newton

Les tres lleis de Newton donen una descripció completa de la mecànica de partícules[1] en el marc de la física clàssica.

Primera llei de Newton:

Tot cos roman en el seu estat de repòs o moviment rectilini uniforme (MRU) si la força resultant aplicada sobre seu és nul·la.

La força resultant o neta és la suma vectorial de totes les forces aplicades sobre un objecte:

$$\vec{F}_R = \sum \vec{F} = \left(\sum F_x, \sum F_y, \sum F_z\right)$$

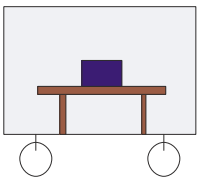
Llavors si $\vec{F}_R = \vec{0} = (0,0,0) \Leftrightarrow \sum F_x = \sum F_y = \sum F_z = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{v} = \vec{0} \text{ repòs} \\ \quad \text{o} \\ \vec{v} = \text{constant (MRU)} \end{cases}$

Noteu que en el MRU la velocitat és constant en mòdul, sentit i direcció.

La dificultat d'observar aquesta llei està en les forces de fricció. No obstant això, un dels principals perills dels astronautes quan maniobren a l'espai exterior és que es puguin allunyar irremediablement de la nau en un MRU a causa de la manca de forces de fricció.

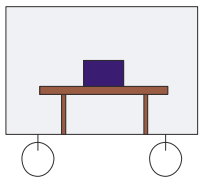
El concepte de repòs o MRU depèn del sistema de referència:

$\vec{v} = ct, \vec{a} = \vec{0}$



Sistema de referència inercial (SRI)
lleis Newton vàlides.

$\vec{v} \neq ct, \vec{a} \neq \vec{0}$



Sistema de referència no inercial (SRNI)
lleis Newton no vàlides.
Forces i acceleracions fictícies

Recordeu que els sistemes que descriuen rotacions estan accelerats.

Segona llei de Newton:

L'acceleració que experimenta un cos sotmès a una força és proporcional a la força i la constant de proporcionalitat és la massa:

$$\vec{F}_R = m\vec{a}$$

Conseqüències:

1) $\vec{a}$ i $\vec{F}_R$ són magnituds vectorials.

[1] Quan parlem de partícula o objecte puntual s'entén que les dimensions de l'objecte són suficientment petites per poder negligir el moviment de rotació. No obstant això, les lleis de Newton es poden aplicar a qualsevol objecte petit o gran; en aquest cas l'aproximació de partícula o objecte puntual simplement suposa que negligim la rotació de l'objecte, és a dir, que les lleis de Newton permetran descriure només el moviment de translació.

2) definició de *massa inercial*: resistència o oposició al canvi, tant a ser accelerat com a ser frenat.

   si $m' = 2m \Rightarrow a' = \dfrac{a}{2}$

   inèrcia: tendència a quedar en el mateix estat de moviment.

3) Si $\vec{F}_R = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \text{constant}$, és a dir, recuperem la primera llei.

4) Només és vàlida per a SRI.

Unitats de força: N, newton (SI); kp, kilopond (MKS) i dina (CGS).

$$1\,\text{N} = 1\,\text{kg}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1.000\,\text{g}}{1\,\text{kg}} \cdot \frac{100\,\text{cm}}{1\,\text{m}} = 100.000 \text{ dines} = 10^5 \text{ dines}$$

Nova magnitud de caire vectorial, *quantitat de moviment*:

$\vec{p} \equiv m\vec{v}$ unitat: kg·m/s

La segona llei ens permet establir com varia la quantitat de moviment. Si derivem l'expressió anterior respecte al temps obtenim:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}_R$$

Per tant, podem enunciar la segona llei de Newton com:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_R$$

és a dir, els canvis en la quantitat de moviment són provocats per la força resultant. I la primera llei de Newton esdevé:

Si $\vec{F}_R = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{p}$ és constant, principi de la conservació de la quantitat de moviment.

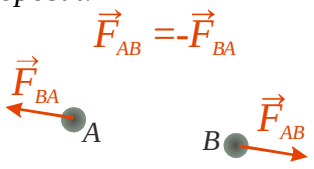
<u>Exemple</u>: Una bala de massa 1,8 10^{-3} kg té una velocitat de 500 m/s quan xoca amb un bloc fix de fusta, i s'atura després de travessar-ne 6 cm. Suposant constant la desacceleració de la bala, determineu la força exercida per la fusta sobre la bala.

$$v_f^2 - v_0^2 = 2a\Delta s \Rightarrow a = \frac{v_f^2 - v_0^2}{2\Delta s} = \frac{500^2}{2 \cdot 0{,}06}\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2\text{m}} = 2{,}08\,10^6\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$F = m \cdot a = 1{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot 2{,}08 \cdot 10^6\,\text{kg}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 3.750\,\text{N}$$

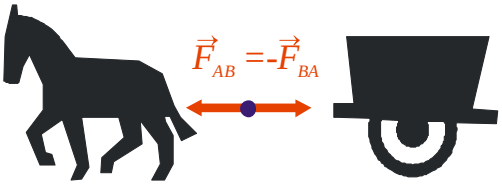
Tercera llei de Newton (altrament coneguda com el principi d'acció i reacció)**:**

Si un cos B exerceix una força sobre un cos A, llavors el cos A exerceix una força sobre B igual però de sentit oposat.



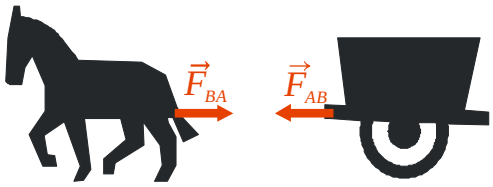
Important: Els punts d'aplicació són diferents i per tant no s'anul·len. Un objecte només rep les forces que s'hi apliquen a sobre. Si el punt d'aplicació fos el mateix el moviment seria impossible:

Si el punt d'aplicació és el mateix, la força resultant és nul·la



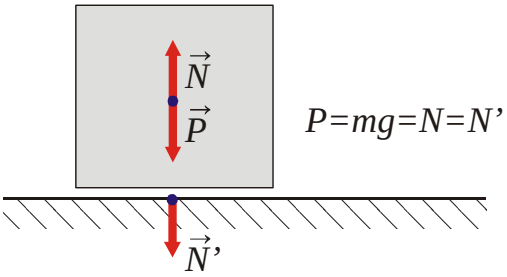
El moviment és impossible!!!!

Punts d'aplicació diferents

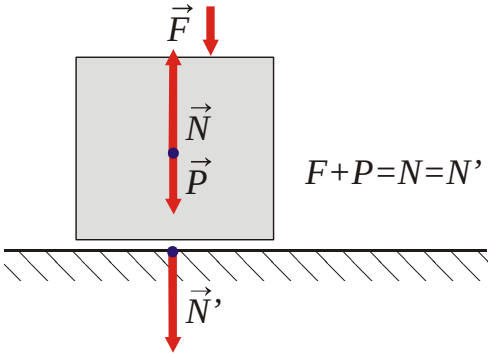


Es mou!!

Reaccions degudes al contacte entre superfícies:



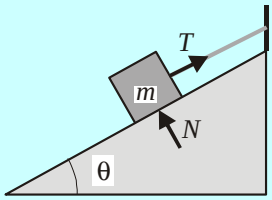
$P=mg=N=N'$



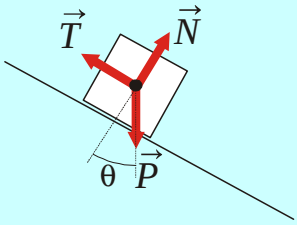
$F+P=N=N'$

No sempre es compleix que $N = P$.

Exemple: Una caixa es manté en una posició determinada sobre un pla inclinat sense fricció gràcies a un cable. *a)* Si $\theta = 60^o$ i $m = 50$ kg, calculeu la tensió al cable i la força normal exercida pel pla inclinat. *b)* Trobeu la tensió com a funció de θ i m, i comproveu el resultat per a $\theta = 0^o$ i $\theta = 90^o$.



a)



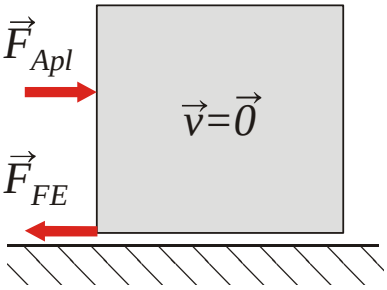
$$T = mg\sin\theta = 425 \text{ N}$$
$$N = mg\cos\theta = 245 \text{ N}$$

b) $T = mg\sin\theta$, si $\theta = 0^o \Rightarrow T = 0$ i si $\theta = 90^o \Rightarrow T = mg$

Forces de fricció

Forces de contacte.
S'oposen al moviment.
De dos tipus: estàtiques i dinàmiques.

Estàtica: intenta mantenir l'objecte en repòs; el moviment relatiu respecte a la superfície de contacte és nul:

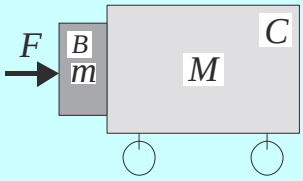


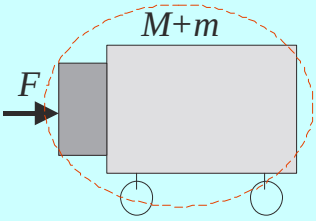
$$\vec{F}_{F,E} = -\vec{F}_{Apl}$$

- La magnitud de la força de fricció és igual a la component horitzontal de la força aplicada sobre l'objecte.
- La direcció és paral·lela a la superfície de contacte.
- Sentit oposat a la força aplicada.
- Valor màxim: $F_{FE,màx} = \mu_E N$.

μ_E és el coeficient de fricció estàtic, és un paràmetre adimensional que depèn de les característiques de les dues superfícies en contacte.

<u>Exemple</u>: Determineu l'expressió del valor mínim que pot assolir la força horitzontal ***F*** de manera que el bloc *B* no llisqui cap avall. La massa del carro (bloc *C*) és *M*, la massa del bloc *B* és *m* i el coeficient de fricció estàtica entre els blocs és μ_E.



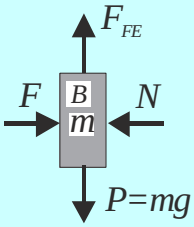


Tot el sistema:

$$F = (M+m)a \Rightarrow a = \frac{F}{M+m}$$

Bloc *B* (cas límit):

$$F_{FE,màx} = \mu_E N$$

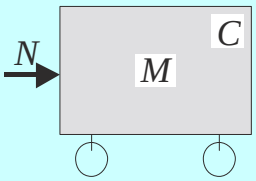


$$\left.\begin{array}{l} F - N = ma \\ F_{FE} = \mu_E N = mg \end{array}\right\} F - \frac{mg}{\mu_E} = ma = \frac{mF}{M+m} \Rightarrow$$

$$F\left(1 - \frac{m}{M+m}\right) = \frac{mg}{\mu_E} \Rightarrow F\left(\frac{M}{M+m}\right) = \frac{mg}{\mu_E} \Rightarrow F = \frac{mg}{\mu_E}\left(1 + \frac{m}{M}\right)$$

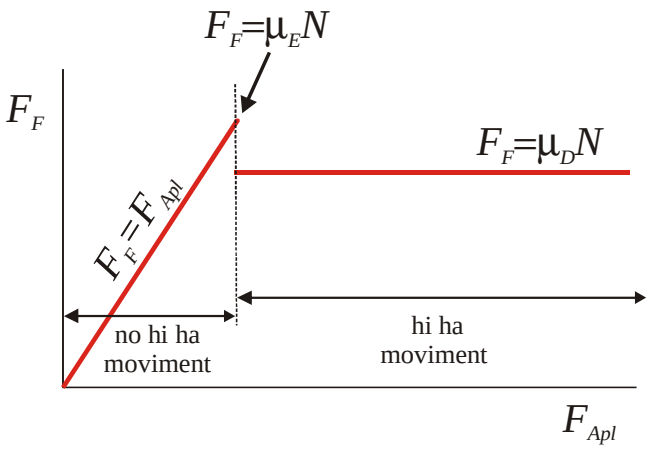
Què passa amb el bloc *C*?

$$N = Ma = M\frac{F}{M+m} = \frac{mg}{\mu_E}\left(1+\frac{m}{M}\right)\frac{M}{M+m} = \frac{mg}{\mu_E}$$



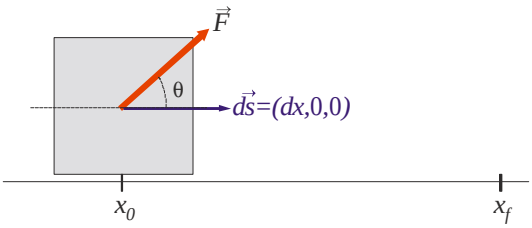
$$F_{FE,màx} = \mu_E N = mg \Rightarrow N = \frac{mg}{\mu_E}$$

Quan $F_{Apl} > F_{FE}$ l'objecte es posarà en moviment i començarà a actuar la força de fricció dinàmica: $F_{FD} = \mu_D N$. En general es compleix $F_{FD} < F_{FE,màx} \Leftrightarrow \mu_D < \mu_E$.



Treball i energia

Treball: mesura de l'aportació d'una força, *F*, al moviment d'una partícula.
Suposem $\vec{F}$ = constant



$$W = F_x(x_f - x_0) = F\cos\theta\,(x_f - x_0) = \vec{F}\cdot\overrightarrow{\Delta s}$$

on

$$\overrightarrow{\Delta s} = (\Delta x,0,0) = (x_f - x_0,0,0)$$

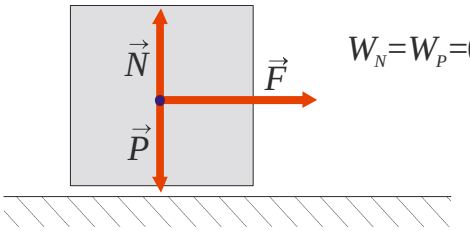
Unitats en SI i MKS: N·m = J (joule)
Unitats en CGS: dina·cm = erg $\qquad$ 1 J = 10^7 ergs
Perquè el $W \neq 0$ cal:

- moviment, si no $\overrightarrow{\Delta s} = \vec{0}$
- $F \neq 0$
- F no pot ser perpendicular al desplaçament (si $\vec{F} \perp \overrightarrow{\Delta s} \Rightarrow W = 0$).

$W > 0$ ajuda al moviment ($-90^o < \theta < 90^o$)

$W < 0$ s'oposa al moviment ($90^o < \theta \leq 270^o$)

Per exemple, la força normal resultat de la reacció d'una superfície no fa treball:



$W_N = W_P = 0$ atès que són $\perp$ al moviment.

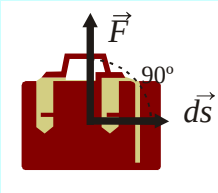
Quin treball fa la força de fricció estàtica? Quin és el signe del treball fet per la força de fricció dinàmica?

Què passa si $\vec{F}$ i/o θ no són constants? Podem aplicar la relació anterior per a un desplaçament curt (infinitesimal):
$dW = \vec{F}\cdot\vec{ds}$.

Llavors la contribució total s'obté sumant les contribucions infinitesimals al llarg de tot el desplaçament (integrant):

$W = \int \vec{F} \cdot \vec{ds}$.

<u>Exemple</u>: Calculeu el treball que fem amb una maleta de 15 kg si: *a)* l'aguantem 5 minuts esperant l'autobús, *b)* correm darrere l'autobús una distància horitzontal de 10 m en 2 segons, a velocitat constant, *c)* l'aixequem 1 m verticalment, a velocitat constant.



a) 0, no hi ha desplaçament.

b) 0, força i desplaçament són perpendiculars.

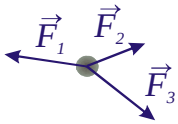
$\vec{F} \cdot \vec{ds} = F \cdot ds \cdot \cos 90^\circ = 0$

c) $v = ct \Rightarrow a = 0 \Rightarrow F = mg$

$$W = \int \vec{F}\vec{ds} = \int mg \cos 0^\circ \, ds = mg\Delta s = 15 \cdot 9{,}8 \cdot 1 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\text{m} = 147 \text{ J}$$

Energia cinètica

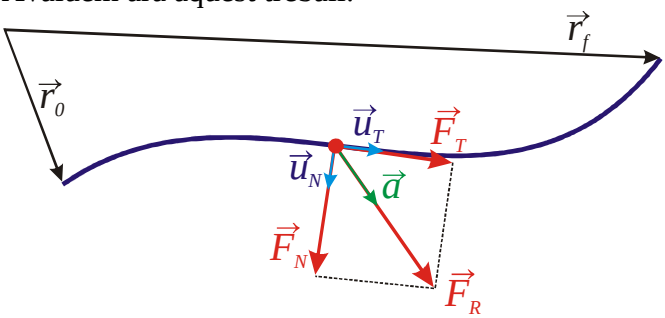
Teorema de les forces vives: el treball realitzat per la força neta aplicada sobre un objecte es converteix en energia cinètica.



Aquest treball l'anomenem *treball total* (W_{Tot}):

$$W_{Tot} = \int \vec{F}_1\vec{ds} + \int \vec{F}_2\vec{ds} + \int \vec{F}_3\vec{ds} + \ldots = \int (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots)\,\vec{ds} = \int \vec{F}_R\vec{ds}$$

Avaluem ara aquest treball:



$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{v^2}{R}\vec{u}_N + m\frac{dv}{dt}\vec{u}_T$$

$$W_{Tot} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f} \vec{F}_R\vec{ds} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f} \vec{F}_T\vec{ds} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f} \vec{F}_N\vec{ds} =$$

$$= \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f} m\frac{dv}{dt}ds = \int_{v_0}^{v_f} mvdv = m\int_{v_0}^{v_f} vdv =$$

$$W_{Tot} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = E_{C,f} - E_{C,0}$$

Potència: velocitat a la qual es fa un treball. També es pot interpretar com la velocitat a la qual podem transferir energia cinètica.

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{ds}}{dt} = \vec{F}\frac{\vec{ds}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Unitats:

Unitats en SI i MKS: $\frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{s}} = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W (watt)}$

Unitats en CGS: $\frac{\text{dina} \cdot \text{cm}}{\text{s}} = \frac{\text{erg}}{\text{s}}$ dina·cm = erg 1 W = 10^7 ergs/s

Cavall (CV) 735 W = 1 CV

Horse power (HP) 746 W = 1 HP

Potència mitjana: $P_m = \dfrac{W}{\Delta t}$

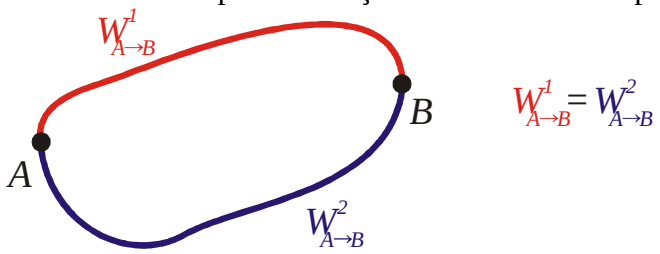
Exemple: Avalueu la potència mitjana desenvolupada per un Seat Ibiza 1.6i per accelerar de 0 a 100 km/h en 10,8 s si la seva massa és de 1.000 kg.

$$v_f = 100\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1.000\text{ m}}{1\text{ km}} \cdot \frac{1\text{ h}}{3.600\text{ s}} = 28\text{ m/s}$$

$$W = \Delta E_C = \frac{1}{2} m v_f^2 - 0 = \frac{1}{2} 1000\ 28^2\text{ kg}\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 392.000\text{ J}$$

$$P_m = \frac{W}{\Delta t} = \frac{392.000\text{ J}}{10{,}8\text{ s}} = 36.300\text{ W} = 49\text{ CV}$$

Forces conservatives. El treball fet per una força conservativa no depèn del camí:



Llavors, per a les forces conservatives el treball només depèn dels punts inicial i final:

$$W_{A\to B} = U_A - U_B = -(U_B - U_A) = -\Delta U$$

Forces conservatives:

Gravitatòria: $U = mgh + U_0$

Elàstica: $U = \dfrac{1}{2} K \Delta l^2 + U_0$

Quan s'ha de calcular el treball fet per una força conservativa no cal calcular $W = \int \vec{F} \cdot \vec{ds}$, n'hi ha prou amb calcular la diferència d'energia potencial $W = -\Delta U$.

Si <u>només actuen forces conservatives</u> sobre un cos:

$$W_{A\to B} = U_A - U_B = E_{C,B} - E_{C,A} \Rightarrow U_A + E_{C,A} = U_B + E_{C,B}$$

Si definim l'*energia mecànica* com:

$$E_m \equiv U + E_C$$

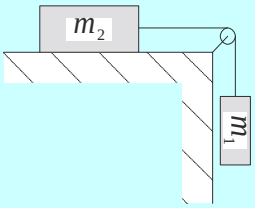
llavors tenim que <u>l'energia mecànica és constant</u>:

$$E_{m,A} = E_{m,B}$$

Aquest resultat es coneix com a teorema de la conservació de l'energia.

És interessant de veure que quan només actuen forces conservatives l'energia mecànica és constant, no hi ha pèrdues d'energia. Per aquesta raó es poden fer servir les forces conservatives per a l'emmagatzemament i transport de l'energia.

Exemple 1: Ajuntem dos blocs mitjançant una corda fina que passa per una politja (vegeu la figura). Inicialment els mantenim aturats, i quan els alliberem es posen en moviment. *a)* Comproveu que la suma del treball fet per la corda sobre ambdós blocs és zero. *b)* Utilitzant el teorema de conservació de l'energia, avalueu el mòdul de la velocitat comuna d'ambdós blocs a l'instant que la massa m_1 ha baixat una altura h. Expresseu el resultat en funció de m_1, m_2, g i h. Negligiu el fregament.

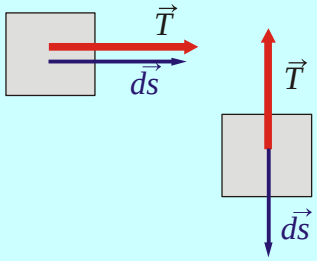


a)

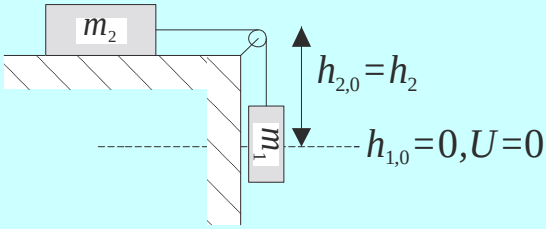
$$W_2 = \int \vec{T} \cdot \vec{ds} = \int T \cdot ds = T\Delta s$$

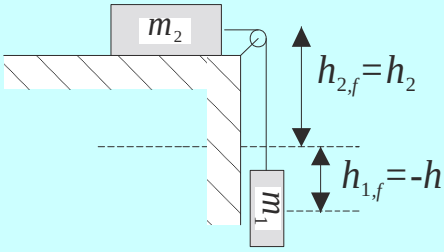
$$W_1 = \int \vec{T} \cdot \vec{ds} = \int -T \cdot ds = -T\Delta s$$

$$W = W_1 + W_2 = -T\Delta s + T\Delta s = 0$$



b)





$$E_{m,0} = 0 + m_2 g h_2 + 0$$

$$E_{m,f} = -m_1 g h + m_2 g h_2 + \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2$$

Conservació de l'energia mecànica:

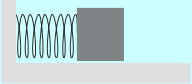
$$E_{m,0} = E_{m,f} \Rightarrow m_2 g h_2 = -m_1 g h + m_2 g h_2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 \Rightarrow m_1 g h = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$$

$$v = \sqrt{2gh\frac{m_1}{m_1 + m_2}}$$

Exemple 2: A quina velocitat surt un objecte de 4 kg d'una molla de constant 400 N/m, si inicialment l'objecte estava en repòs en contacte amb la molla, que està comprimida 5 cm? Tot el moviment es desenvolupa en el pla horitzontal. Negligiu el fregament.

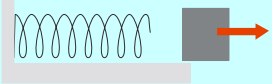
Inici:

Δl = 5 cm, v = 0



Final:

Δl = 0 cm, v = ?



$$E_{m,0} = E_{m,f} \Rightarrow \frac{1}{2} k \Delta l^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{m}} \Delta l = 0{,}5 \text{ m/s}$$

Cas general: forces no conservatives + forces conservatives:

$$W_{A\to B} = W_{A\to B,NC} + W_{A\to B,Cons} = W_{A\to B,NC} + U_A - U_B = E_{C,B} - E_{C,A} \Rightarrow$$

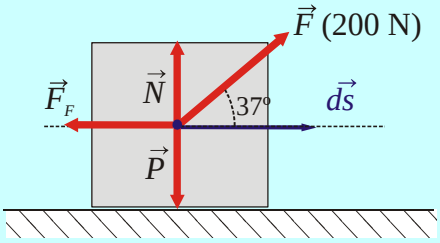
$$U_A + E_{C,A} + W_{A\to B,NC} = U_B + E_{C,B} \Leftrightarrow$$

$$E_{m,A} + W_{A\to B,NC} = E_{m,B} \Leftrightarrow$$

$$\Delta E_m = E_{m,B} - E_{m,A} = W_{A\to B,NC}$$

El treball de la força de fricció és negatiu, per tant l'energia mecànica disminueix en un sistema en el qual les úniques forces no conservatives són les forces de fricció. Les forces de fricció dissipen l'energia.

Exemple 1: Sobre un cos de 20 kg situat en un pla horitzontal actua una força de 200 N, que forma un angle de 37º amb l'horitzontal. El coeficient de fricció entre el cos i el pla és 0,2. Calculeu el treball realitzat per la força aplicada i per la gravetat i el desenvolupat per la força de fricció en traslladar l'objecte 5 m pel pla.



$$N + 200\sin(37^\circ) = mg \Rightarrow N = 76\,\text{N}$$

$$W_F = 200\cdot 5\cdot\cos 37^\circ\,\text{N m} = 799\,\text{J}$$

$$W_{FF} = -\mu\cdot N\cdot 5\,\text{m} = -76\,\text{J}$$

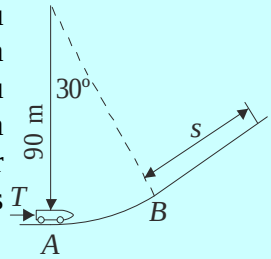
$$W_g = m\cdot g\cdot 5\cdot\cos(90^\circ)\,\text{m} = 0$$

Comprovació:

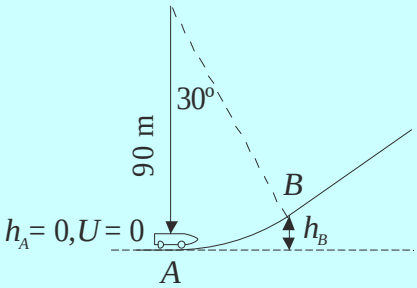
$$\Delta E_C = \frac{1}{2}mv_f^2 = W_{Tot} = 799 - 76 + 0\,\text{J} \Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2\cdot 723\,\text{J}}{20\,\text{kg}}} = 8{,}5\,\text{m/s}$$

$$F\cos 37 - F_F = ma \Rightarrow a = \frac{153-15{,}2}{20}\frac{\text{N}}{\text{kg}} = 7{,}23\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow v_f = \sqrt{2\cdot a\cdot s} = 8{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Exemple 2: Un petit vehicle experimental que es mou mitjançant un motor de reacció i amb una massa de 100 kg, inicialment aturat al punt *A*, es mou amb un fregament negligible al llarg de la pista vertical, tal com es veu a la figura. Si el motor exerceix una força constant de 1.780 N entre els punts *A* i *B* (es talla l'aixeta de combustible en el punt *B*), calculeu la distància *s* que recorre abans d'aturar-se. Podeu negligir tant els efectes de fricció com la pèrdua de massa deguda al motor de reacció.



Tram de *A* a *B*



$$E_{m,A} = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$E_{m,B} = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B = 50\,\text{kg}\cdot v_B^2 + 11.816\,\text{J}$$

$$h_B = 90 - 90\cos(30^\circ) = 12{,}06\,\text{m}$$

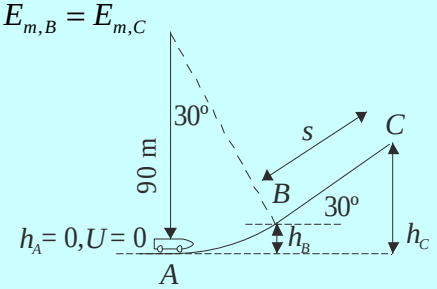
$$W_{NC} = \int \vec{F}\,\vec{ds} = F\Delta s =$$

$$W_{NC} = \int \vec{F}\,\overrightarrow{ds} = F\Delta s = 1.780\,\text{N} \cdot 30\frac{\pi}{180}90\,\text{m} = 8{,}39 \cdot 10^4\ \text{J}$$

$$E_{m,A} + W_{A\to B,NC} = E_{m,B} \Rightarrow 0 + 8{,}39 \cdot 10^4\ \text{J} = 50\,\text{kg} \cdot v_B^2 + 11.816\,\text{J} \Rightarrow \qquad v_B = 37{,}96\,\text{m/s}$$

Tram de B a C

$E_{m,B} = E_{m,C}$



$$E_{m,C} = mgh_C$$

$$E_{m,B} = 8{,}39 \cdot 10^4\ \text{J}$$

$$h_C = \frac{E_{m,B}}{mg} = 85{,}6\ \text{m}$$

$$h_C = h_B + s \cdot \sin(30^\circ) \Rightarrow s = \frac{h_C - h_B}{\sin(30^\circ)} = 147\,\text{m}$$

Qüestions del tema 1

Anàlisi dimensional

1. Una pilota llançada horitzontalment des d'una altura H a velocitat v recorre una distància horitzontal total R. *a)* Què hem d'esperar, que R augmenti o decreixi en disminuir H? I en augmentar v? *b)* Mitjançant l'anàlisi dimensional, esbrineu una possible dependència de R amb H, v i g.

Sol.: *a)* R augmenta quan H i v creixen; *b)* $R \propto v\sqrt{\frac{H}{g}}$

2. Una massa m està enganxada a una molla de pes negligible i constant elàstica k. Es comprimeix la molla i després es deixa anar sobtadament. La massa es posa a oscil·lar al voltant de la seva posició d'equilibri (suposeu que no hi ha fregament). Trobeu, a partir de l'anàlisi dimensional, la dependència del període T de l'oscil·lació, en funció dels paràmetres del sistema m, k i g.

Sol.: $T \propto \sqrt{\frac{m}{k}}$

3. Un objecte lligat a l'extrem d'una corda es mou tot descrivint un cercle. La força feta per la corda depèn de la massa de l'objecte, de la seva velocitat i del radi del cercle. Quina combinació d'aquestes variables té les dimensions correctes (MLT^{-2}) d'una força?

Sol.: $F \propto m\frac{v^2}{r}$

4. La tercera llei de Kepler relaciona el període d'un planeta amb el radi r de la seva òrbita, la constant G de la llei de Newton de la gravitació ($F = Gm_1m_2/r^2$) i la massa del Sol, m_s. Quina combinació d'aquests factors té les dimensions correctes del període d'un planeta?

Sol.: $T \propto \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot m_s}}$

5. Un projectil llançat amb una inclinació de 45° recorre una distància total R, anomenada *abast*, que només depèn de la velocitat inicial v i de l'acceleració de la gravetat g (dimensions LT^{-2}). Mitjançant l'anàlisi dimensional, esbrineu com R depèn de la velocitat i de g.

Sol.: $R \propto \frac{v^2}{g}$

6. Buscant per la xarxa es troba la següent relació per a la equació de Stefan-Boltzmann i que representa la màxima calor per radiació que pot emetre un sòlid a una temperatura donada: $Q=\sigma\cdot T^3$ on és la T la temperatura del sòlid en Kelvin (K), σ és la constant de Stefan-Boltzmann ($\sigma=56.7\cdot10^{-9}$ $Wm^{-2}K^{-4}$), i Q és la densitat de flux de calor emesa (Wm^{-2}). Es correcta aquesta relació?

Cinemàtica de la partícula

7. Atès el vector de posició $\vec{r}=(4t^2-3t+5)\vec{i}+8t^2\vec{j}$, en unitats del sistema internacional, determineu: *a)* les components i el mòdul de la velocitat instantània quan el temps és 5 segons; *b)* les components i el mòdul de l'acceleració al mateix instant de temps; *c)* la velocitat mitjana a l'interval de temps d'1 a 2 segons.

Sol.: *a)* $37\vec{i}+80\vec{j}$ m/s, 88,14 m/s; *b)* $8\vec{i}+16\vec{j}$ m/s^2, 17,89 m/s^2; *c)* $9\vec{i}+24\vec{j}$

8. Un nedador travessa un riu a una velocitat de 3 km/h, remuntant-lo (contra corrent) en una direcció que forma un angle de 45º amb la riba. Si la velocitat del corrent és de 0,1 m/s i el riu té una amplada de 200 m, determineu: *a)* el temps que trigarà a arribar a l'altra riba; *b)* la direcció de la marxa.

Sol.: *a)* 339 s; *b)* 39,7º respecte de la riba

9. L'estel més proper, Pròxima del Centaure, està a $4{,}1\cdot10^{13}$ km. *a)* Quant temps necessita un senyal lluminós per arribar de la Terra fins a Pròxima del Centaure? *b)* Quants anys necessitarà una nau espacial que viatgi a una velocitat de 10^{-4} c per arribar a l'estel més proper? (la llum viatja a una velocitat de $c = 3\cdot10^8$ m/s).

Sol.: *a)* 4,33 anys; *b)* 43,300 anys

10. Un cotxe que viatja a 100 km/h xoca amb un mur massís que no es mou. Quant triga el cotxe a aturar-se, i quina és la seva acceleració? (Considereu que la distància de frenada és 0,75 m.)

Sol.: 0,054 s, –514 m/s^2

11. Una puça salta 0,1 m en un salt vertical. *a)* Quina és la seva velocitat inicial? Si ha assolit aquesta velocitat mitjançant l'extensió de les potes en una distància de 0,0008 m, *b)* quina ha estat la seva acceleració inicial? La distància d'acceleració de l'home és de 0,5 m. Si un home saltés amb la mateixa acceleració que la puça, *c)* a quina altura arribaria?

Sol.: *a)* 1,4 m/s; *b)* 1.225 m/s^2; *c)* 62,5 m

12. Una pilota es deixa caure des d'una altura de 3 m, rebota a terra i puja tot seguit fins a 2 m. *a)* Quina és la velocitat de la pilota tot just abans de tocar a terra? *b)* Quina és la velocitat tot just separar-se de terra? *c)* Si està en contacte amb el terra 0,02 s, quin és el mòdul i el sentit de l'acceleració mitjana en aquest interval?

Sol.: *a)* –7,67 m/s; *b)* v = 6,26 m/s; *c)* 697 m/s^2 cap amunt

13. Llancem una pilota amb el peu a una velocitat de 25 m/s i un angle de 30°. Quant triga a arribar al punt de màxima altura i quina és aquesta posició en aquest instant?

Sol.: 1,28 s; (27,6 , 7,97) m

14. Quina és la velocitat a la qual surt una llagosta si l'angle del seu salt és 55° i el seu abast és 0,8 m?

Sol.: 2,9 m/s

15. Un pilot d'avió inicia un picat seguint un arc circular de 300 m de radi. Al punt més baix de l'arc, el mòdul de la velocitat és 180 km/h. Quina és la direcció i el mòdul de la seva acceleració?

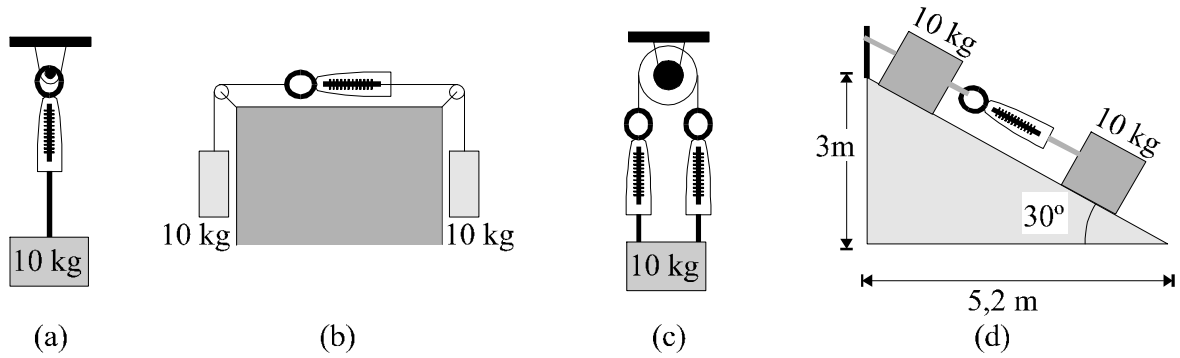
Sol.: 8,33 m/s^2

16. Un xicot fa rodar una pilota lligada a una corda descrivint una circumferència d'1 m de radi. Quantes voltes per minut pot fer si l'acceleració dirigida cap al centre té el mateix mòdul que l'acceleració de la gravetat?

Sol.: 29,9 r/min

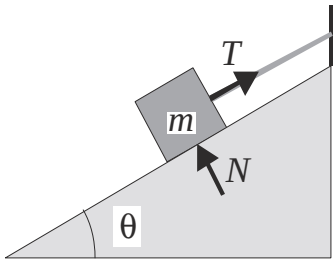
Lleis de Newton

17. En la figura següent els objectes estan subjectats per dinamòmetres calibrats en newtons. Doneu les lectures dels dinamòmetres en cada cas, suposant les cordes sense massa i el pla inclinat sense fricció.



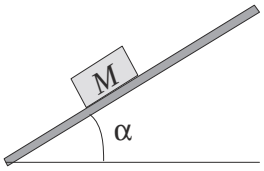
Sol.: *a)* 98,1 N; *b)* 98,1 N; *c)* 49,05 N; *d)* 49,05 N

18. Una caixa es manté en una posició determinada sobre un pla inclinat sense fricció gràcies a un cable. *a)* Si θ = 60º i m = 50 kg, calculeu la tensió al cable i la força normal exercida pel pla inclinat. *b)* Trobeu la tensió com a funció de θ i m, i comproveu el resultat per a θ = 0º i θ = 90º.



Sol.: *a)* T = 424 N, N = 245 N; *b)* $T = mg\sin\theta$

19. El bloc *M* de la figura té una massa de 0,5 kg, els coeficient de fricció estàtic i dinàmic del pla inclinat són 0,25 i 0,18 respectivament.
a) Quins són els valors de l'acceleració i de la força de fricció si α=30º.
b) Quins són els valors de l'acceleració i de la força de fricció si α=10º



Sol.: *a)* 3,376 m/s^2, 0,765 N; *b)* 0 m/s^2, 0,852 N.

20. Una bala de massa 1,8 10^{-3} kg té una velocitat de 500 m/s quan xoca amb un bloc fix de fusta, i s'atura després de travessar-ne 6 cm. Suposant constant la desacceleració de la bala, determineu la força exercida per la fusta sobre la bala.

Sol.: 3.750 N

21. Un cos es deixa anar des de dalt d'una rampa de 37º d'inclinació. Calculeu la velocitat que té a l'instant en què ja ha recorregut el primer metre. Considereu negligible la fricció.

Sol.: 3,4 m/s

22. Sobre un terra horitzontal es dispara un cos a una velocitat de 6 m/s. Si el coeficient de fricció entre el cos i el terra és de 0,20, calculeu el temps que triga a parar-se.

Sol.: 3 s

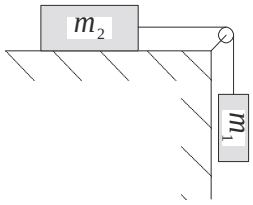
23. Sobre un cos de 20 kg s'exerceix, mitjançant una corda, una força de 100 N, la direcció de la qual forma un angle de 37º amb l'horitzontal. Calculeu la força de fricció i l'acceleració amb la qual s'arrossega el cos si el coeficient de fricció és de 0,20.

Sol.: 27,2 N; 2,6 m/s^2

24. Un cos de 20 kg està sobre un pla inclinat de 37º, amb un coeficient de fricció de 0,20. Sobre aquest cos exercim una força horitzontal de 300 N i el fem pujar per la rampa. Calculeu el temps que tarda a recórrer 3 m des que comença a pujar.

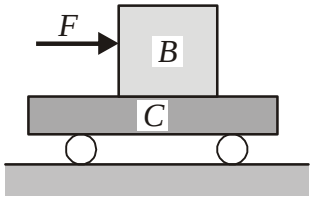
Sol.: 1,5 s

25. Determineu l'acceleració del conjunt i la tensió de la corda en funció de la massa dels blocs. Podeu negligir els efectes de fricció entre els cossos.



Sol.: $a = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\, g \; ; T = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\, g$

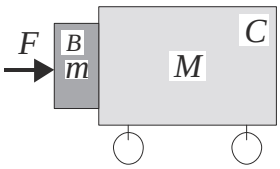
26. Demostreu que el mòdul de la força màxima que podem aplicar sobre el bloc *B* de la figura sense que aquest llisqui és:



$$F_{màx} = \mu_E\, m\, g \left(1 + \frac{m}{M}\right)$$

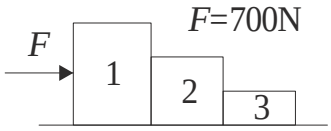
on *m* és la massa del bloc *B* i *M*, la massa del bloc *C*. Podeu negligir la forca de fricció entre el bloc *C* i el terra.

27. Determineu l'expressió del valor mínim que pot assolir la força horitzontal ***F*** de manera que el bloc *B* no llisqui cap avall. La massa del carro (bloc *C*) és *M*, la massa del bloc *B* és *m* i el coeficient de fricció estàtica entre els blocs és μ_E.



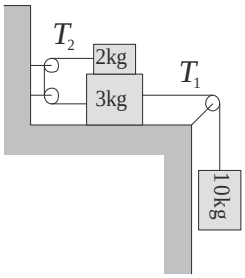
Sol.: $F_{mín} = \dfrac{m\, g}{\mu_E}\left(1 + \dfrac{m}{M}\right)$

28. Trobeu totes les forces de contacte entre els cossos i l'acceleració que actua sobre els cossos de la figura. El coeficient de fregament és 0,3 i $m_1 = 3\ m_2$, $m_2 = 1{,}5\ m_3$ i $m_3 = 10$ kg.



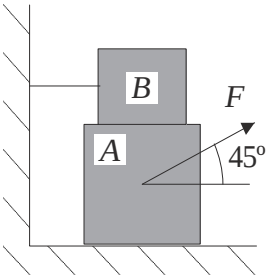
Sol.: 250 N, 100 N; a = 7,06 m/s^2

29. Atès el sistema de la figura, on només hi ha fregament entre la massa de 2 kg i la massa de 3 kg amb un coeficient de fricció dinàmic de 0,3: *a)* dibuixeu el diagrama de sòlid lliure per a cada bloc; *b)* determineu l'acceleració del sistema; *c)* trobeu la tensió de les cordes.



Sol.: 5,75 m/s^2; T_2 = 17,4 N; T_1 = 40,5 N

30. El bloc *B* descansa sobre el bloc *A*, tal com s'indica a la figura adjunta. El coeficient de fricció entre els dos blocs és d'1/4 i entre el bloc *A* i el terra és d'1/3. El bloc *A* té una massa de 30 kg i el *B*, de 20 kg. Quina força seria necessària per iniciar el moviment?

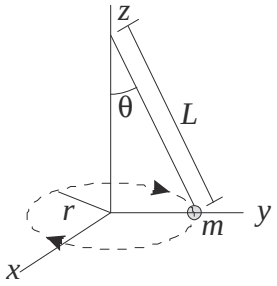


Sol.: *F* = 225,21 N

31. Una carretera està peraltada de manera que un cotxe movent-se a 40 km/h pot agafar un revolt de 30 m de radi fins i tot si hi ha una capa de gel equivalent a un coeficient de fricció aproximadament igual a 0. Determineu l'interval de velocitats al qual un cotxe pot agafar aquest revolt sense relliscar quan la carretera no està gelada (μ_E = 0,3 entre les rodes i la carretera).

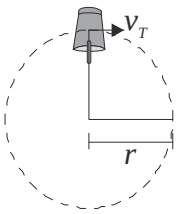
Sol.: $v_{mín}$ = 20,1 km/h, $v_{màx}$ = 56,0 km/h

32. Una partícula de massa m està suspesa d'una corda de longitud L i es mou a velocitat constant en el pla horitzontal (pla xy) descrivint un cercle de radi r. La corda forma un angle θ amb l'eix vertical (eix z). Determineu la tensió de la corda i la velocitat de la partícula en funció de m, L i θ.



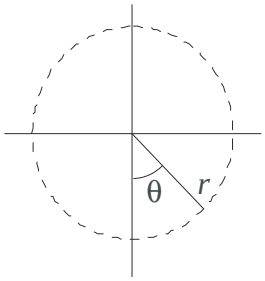
Sol.: $T = \dfrac{m\,g}{\cos\theta}$, $v = \sqrt{g\,L\,\sin\theta\;tg\theta}$

33. Fem girar una galleda plena d'aigua descrivint una circumferència vertical de radi r. Si la velocitat de la galleda a la part més alta de la trajectòria és v_T, avalueu la força exercida per la galleda sobre l'aigua. Avalueu també el valor mínim de v_T de manera que l'aigua no es vessi. La massa de l'aigua és m.



Sol.: $F = m\left(\dfrac{v_T^2}{r} - g\right)$; $v_{mín} = \sqrt{r\,g}$

34. Un bloc de massa m està lligat a una corda i es mou en un cercle vertical de radi r. Quan la corda forma un angle θ amb la vertical el bloc té una velocitat v. Avalueu l'acceleració tangencial, el mòdul de l'acceleració total i la tensió de la corda.



Sol.:

$$a_T = g\,\sin\theta\,;|a| = \sqrt{g^2\sin^2\theta + \left(\frac{v^2}{r}\right)^2}\,;T = m\left(\frac{v^2}{r} + g\cos\theta\right)$$

35. Una pedra de massa 200 g es lliga a l'extrem d'una corda d'un metre de llargada i es fa girar en un pla vertical. *a)* Avalueu la velocitat mínima al punt més alt perquè pugui descriure una trajectòria circular completa; *b)* Si la velocitat al punt més alt és el doble de la velocitat mínima, avalueu la tensió de la corda als punts més alt i més baix de la trajectòria; *c)* Quina trajectòria descriurà la pedra si la corda es trenca al punt més alt?

Sol.: *a)* 3,13 m/s; *b)* 5,89 N, 9,81 N; *c)* parabòlica

Treball i energia

36. Calculeu el treball que fem amb una maleta de 15 kg si: *a)* l'aguantem 5 minuts esperant l'autobús; *b)* correm darrere l'autobús una distància horitzontal de 10 m en 2 segons, a velocitat constant; *c)* l'aixequem 1 m verticalment, a velocitat constant.

Sol.: *a)* 0; *b)* 0; *c)* 147 J

37. Sobre un cos de 20 kg situat en un pla horitzontal actua una força de 200 N, que forma un angle de 37º amb l'horitzontal. El coeficient de fricció entre el cos i el pla és 0,2. Calculeu el treball fet per la força aplicada i per la gravetat i el desenvolupat per la força de fricció en traslladar l'objecte 5 m pel pla.

Sol.: 800 J, 0 J i –76 J

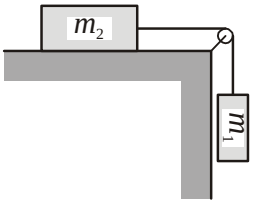
38. Un cos de 20 kg de massa es llança per un pla inclinat 37º a una velocitat de 20 m/s. Calculeu la distància que recorre fins que es para: *a)* si es negligeix la fricció; *b)* considerant que el coeficient de fricció entre el cos i el terra és 0,2.

Sol.: *a)* 34 m; *b)* 26,8 m

39. A quina velocitat surt un objecte de 4 kg d'una molla de constant 400 N/m, si inicialment l'objecte estava en repòs en contacte amb la molla, que està comprimida 5 cm? Tot el moviment es desenvolupa en el pla horitzontal. Negligiu la fricció.

Sol.: v = 0,5 m/s

40. Ajuntem dos blocs mitjançant una corda fina que passa per una politja (vegeu la figura). Inicialment els mantenim aturats, i quan els alliberem es posen en moviment. *a)* Comproveu que la suma del treball fet per la corda sobre ambdós blocs és zero. *b)* Utilitzant el teorema de conservació de l'energia, avalueu el mòdul de la velocitat comuna d'ambdós blocs a l'instant que la massa m_1 ha baixat una altura h. Expresseu el resultat en funció de m_1, m_2, g i h. Negligiu el fregament.



Sol.: $v = \sqrt{2\,g\,h\left(\dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\right)}$

41. Quin treball ha de fer una bomba per pujar 100 kg d'aigua des del fons d'un pou de 300 m fins a la superfície a velocitat constant?

Sol.: 294.000 J

42. El motor d'una bomba d'aigua pot desenvolupar una potència de 1.000 W. Si el canvi d'energia cinètica és negligible, quants quilograms d'aigua pot pujar per segon des d'un pou de 20 m de profunditat?

Sol.: 5,10 kg

43. Un dipòsit té un volum de 10^7 m^3. Si l'aigua del dipòsit cau des d'una altura mitjana de 30 m i si el 80% de l'energia potencial perduda per l'aigua es transforma en energia elèctrica mitjançant turbines, quina energia elèctrica es produeix? (Densitat de l'aigua de 1.000 kg/m^3.)

Sol.: 2,354 10^{12} J

44. Avalueu la potència mitjana desenvolupada per un Seat Ibiza 1.6i per accelerar de 0 a 100 km/h en 10,8 s si la seva massa és de 1.000 kg.

Sol.: 49 CV

45. La llum solar arriba a una superfície horitzontal a un ritme de 200 W per metre quadrat d'àrea. Aquest valor és el resultat de la mitjana sobre dies i nits, estacions de l'any i dies núvols i clars. Suposeu que el 10% d'aquesta energia solar es pogués convertir en energia elèctrica, quina àrea es necessitaria per substituir una gran central nuclear que produeix 10^9 W?

Sol.: 50 km^2

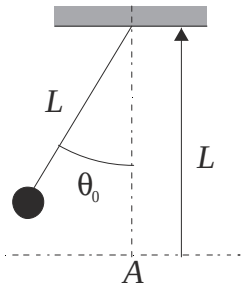
46. Els salts d'aigua del riu Niàgara al Canadà fan aproximadament 50 m d'altura i 800 m d'amplada. L'aigua es mou a una velocitat de 10 m/s i tenen una profunditat d'1 m en el moment de caure. *a)* Quin volum d'aigua cau per cada segon? *b)* Quina és la pèrdua d'energia potencial d'aquest volum d'aigua en caure? *c)* Si aquesta energia es convertís directament en energia elèctrica, quina potència es produiria? *d)* La capacitat total de producció d'energia elèctrica dels Estats Units és aproximadament $5\ 10^{11}$ W. Quin percentatge d'aquesta energia es podria produir si s'aprofités el 80% de l'energia dels salts d'aigua del Niàgara?

Sol.: *a)* 8.000 m^3; *b)* $3{,}92\ 10^9$ J; *c)* $3{,}92\ 10^9$ W; *d)* 0,63%

47. En una erupció volcànica són expulsats 4 km^3 de muntanya amb una densitat de 1.600 kg/m^3 a una altura de 500 m. *a)* Quina energia s'ha alliberat en l'erupció? *b)* L'energia alliberada per les bombes es mesura en megatones de TNT, on una megatona de TNT equival a $4{,}2\ 10^{15}$ J. Expresseu el resultat anterior en megatones de TNT.

Sol.: *a)* $3{,}14\ 10^{16}$ J; *b)* 7,47 megatones de TNT

48. El pèndol de la figura està constituït per un fil de longitud L i massa negligible del qual penja una bola de massa m. Si inicialment està en repòs formant un angle de θ_0 amb la vertical, avalueu la seva velocitat quan passa pel punt A i la màxima altura que assolirà al costat dret del punt A.

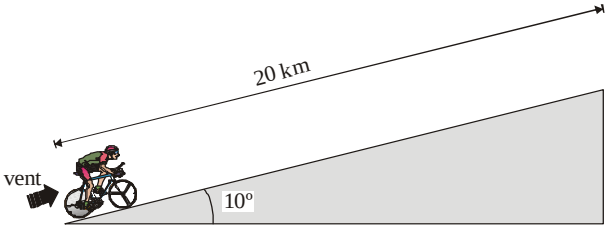


Sol.: $v_A = \sqrt{2\,g\,L\,(1-\cos\theta_0)}$; $h_{màx} = L\,(1-\cos\theta_0)$

49. Quina potència mínima ha de tenir el motor que estira de la capsula Fènix II encarregada del rescat dels miners atrapats a la mina San José a Xile.
Dades: profunditat del pou 622 m, temps que triga la capsula Fènix II en pujar 20 minuts, la massa de la capsula és de 450 kg, la massa d'un miner és d'uns 80 kg i a cada viatge només puja un miner

Sol.: 2700 W.

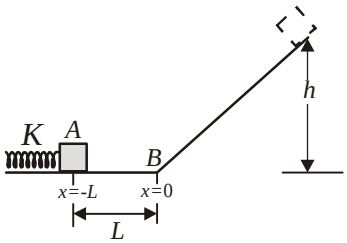
50. Un ciclista és capaç de desenvolupar una potència promig de 300 W durant períodes llargs de temps.
a) Quin temps trigarà a recórrer els 20 km del pla inclinat de la figura a velocitat constant?
b) Si durant el recorregut, i com a resultat d'un corrent d'aire paral·lel al pla, apareix una força de 40 N que ajuda el ciclista durant l'ascens del pla inclinat. Quin temps trigarà en recórrer els 20 km del pla inclinat de la figura a velocitat constant?



Dades: negligiu les forces de frec, massa del conjunt ciclista i bicicleta = 82 kg.

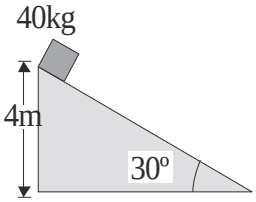
Sol.: *a)* 2h 35 min, *b)* 1h 50 min.

51. El bloc de massa *m* de la figura es troba inicialment al punt *A* aturat en contacte amb la molla de constant elàstica *K*, que està comprimida una llargada *L* ($x_A = -L$). Quan es deixa anar el bloc puja per la rampa fins a una altura màxima *h*. Avalueu *L* en funció de l'altura *h*. Avalueu la velocitat de la massa quan passa pel punt *B* ($x = 0$) en funció de l'altura *h*. La posició d'equilibri de la molla es troba a $x = 0$.



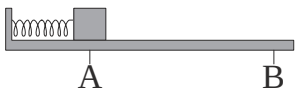
Sol.: $L = \sqrt{\dfrac{2\,m\,g\,h}{K}}$; $v_B = \sqrt{2\,g\,h}$

52. Calculeu la velocitat a la qual arriba al final del pla inclinat la massa de 40 kg representada a la figura, si inicialment la massa està aturada a la part més alta del pla (4 m) i el pla forma un angle de 30º amb l'horitzontal. El coeficient de fregament dinàmic entre la superfície del pla i el bloc és de 0,2.



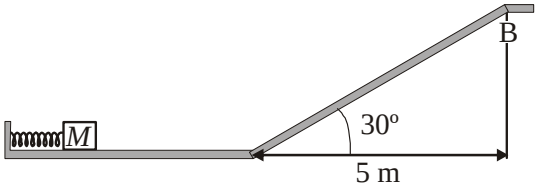
Sol.: $v = 7{,}16$ m/s

53. El bloc de massa 2 kg de la figura es troba inicialment al punt A aturat amb contacte amb la molla de constant elàstica 12000 N/m, que està comprimida una llargada 10 cm. Quan es deixa anar el bloc aquest s'atura en el punt B. Calcula la distància entre els punts A i B. Dades, el coeficient de fricció dinàmic entre el bloc i el terra és 0,2.

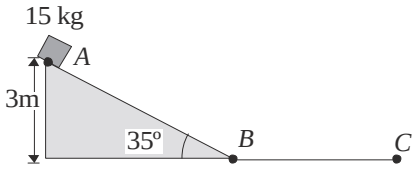


Sol.: 15,3 m

54. L'objecte *M* de la figura està aturat, té una massa de 0,6 kg i la constant elàstica de la molla és de 900 N/m. En el tram horitzontal el fregament és negligible, per contra, el coeficient de fricció dinàmic del pla inclinat és 0,15. Quina longitud mínima s'ha de comprimir la molla per tal de que el bloc arribi fins al punt B.

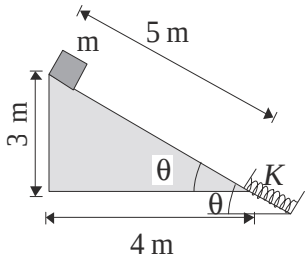


Sol.: 22 cm.



55. Es deixa anar amb velocitat inicial nul·la una massa de 15 kg des d'un punt *A* situat a 3 m d'alçada. *(a)* Si la massa baixa per un pla inclinat de 35º de pendent sense fregament, amb quina velocitat arriba al punt *B*? *(b)* Si la massa queda aturada al punt *C*, quina distància separa els punts *B* i *C*. Dades el coeficient de fregament entre *B* i *C* és de 0,3.

Sol.: *a)* 7,67 m/s; *b)* 10 m.



56. Es deixa caure un bloc de massa 0,73 kg al llarg d'un pla inclinat de 5 m de longitud i sense fricció. Al final de la rampa hi ha una molla de constant k = 1.200 N/m. *a)* Avalueu la compressió de la molla quan la massa es troba a baix i aturada; *b)* Quina magnitud té la velocitat quan la massa contacta amb la molla?

Sol.: 0,19 m; 7,7 m/s

57. Repetiu el problema anterior, però suposant que hi ha fregament entre el pla inclinat i la massa. Suposeu que el coeficient de fricció dinàmic és μ_D = 0,1.

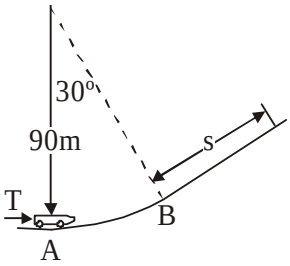
Sol.: 0,18 m; 7,14 m/s

58. Un bomber de 60 kg llisca a través d'una barra, la força de fricció dinàmica és constant i val 300 N. Al final de la barra, per tal d'esmorteir el cop, hi ha una plataforma horitzontal de 20 kg recolzada sobre el terra mitjançant una molla de constant 2.500 N/m. Si el bomber baixa 5 m abans de tocar la plataforma horitzontal, i suposant que inicialment la seva velocitat és zero, calculeu: *a)* la velocitat del bomber just abans del xoc amb la plataforma; *b)* la distància màxima que es comprimeix la molla.

Sol.: 6,93 m/s; 1,14 m

59. Dues forces iguals actuen sobre dos cossos de masses diferents (1 kg i 1 g, respectivament) i que inicialment estan aturats. Si el temps que actuen ambdues forces és el mateix, avalueu: *a)* la relació entre les velocitats d'ambdues masses; *b)* la relació entre l'energia cinètica d'ambdues masses.

Sol.: *a)* v_2/v_1 = 1.000; *b)* E_{c2}/E_{c1} = 1.000



60. Un petit vehicle experimental que es mou mitjançant un motor de reacció i amb una massa de 100 kg, inicialment aturat al punt *A*, es mou amb un fregament negligible al llarg de la pista vertical, tal com es veu a la figura. Si el motor exerceix una força constant de 1.780 N entre els punts *A* i *B* (es talla l'aixeta de combustible en el punt *B*), calculeu la distància *s* que recorre abans d'aturar-se. Podeu negligir tant els efectes de fricció com la pèrdua de massa deguda al motor de reacció.

Sol.: *s* = 147 m

I. Estàtica i elasticitat

2. Estàtica

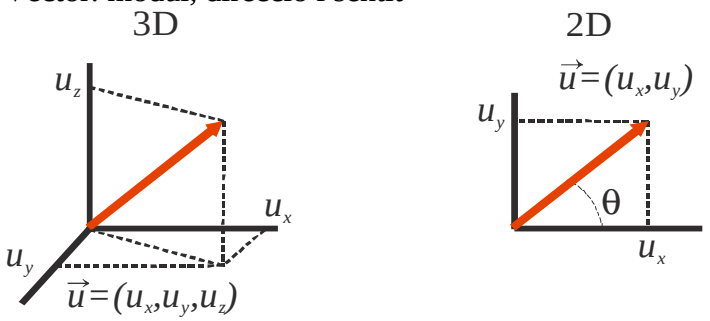
Objectius:

Propietats bàsiques dels vectors
Representació del diagrama de cos lliure
Concepte de sòlid rígid: moviments de translació i rotació
Què és i què vol dir el principi de transmissibilitat?
Conceptes de moment de força i parell de forces
Quina és la condició d'equilibri del sòlid rígid?
Descripció de diferents punts de recolzament
Què és el centre de gravetat?
Què és el moment de segon ordre d'una superfície plana?
Càlcul de l'equilibri en estructures senzilles

Anàlisi vectorial

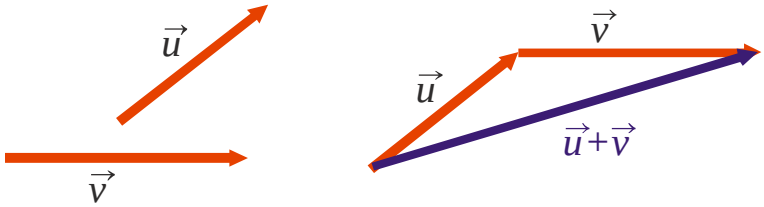
Tant les forces com les acceleracions, velocitats i moments són vectors.

Vector: mòdul, direcció i sentit



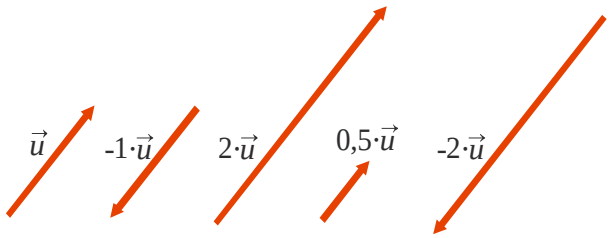
Suma de vectors: $\vec{u}+\vec{v}=(u_x+v_x,u_y+v_y,u_z+v_z)$

Regla del paral·lelogram:

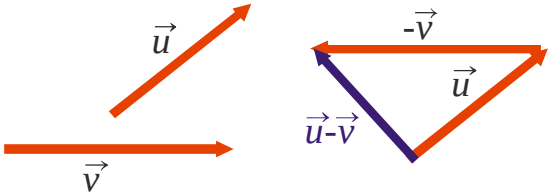


Commutativa: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

Producte d'un escalar amb un vector: $a\cdot\vec{u}=(a\cdot u_x,a\cdot u_y,a\cdot u_z)$, canvia el mòdul i el sentit però no la direcció:



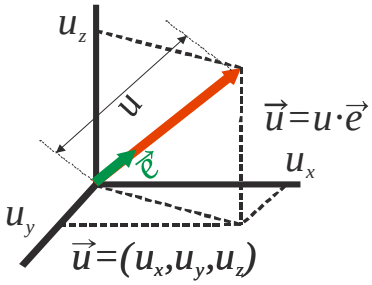
Resta de vectors: $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-1\cdot\vec{v})=(u_x-v_x,u_y-v_y,u_z-v_z)$



Mòdul d'un vector: $u=\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}$

Vector unitari Vector unitari: $\vec{e}=\dfrac{\vec{u}}{u},\quad e=1.$

Vector: mòdul → magnitud i vector unitari → direcció i sentit

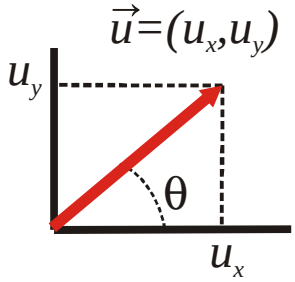


En dues dimensions:

$$\vec{u}=(u_x,u_y)$$

$$u=\sqrt{u_x^2+u_y^2}$$

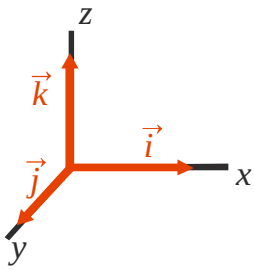
$$\vec{e}=\frac{\vec{u}}{u}=\left(\frac{u_x}{\sqrt{u_x^2+u_y^2}},\frac{u_y}{\sqrt{u_x^2+u_y^2}}\right)=(\cos\theta,\sin\theta)$$



Components vectorials:

$\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)=u_x(1,0,0)+u_y(0,1,0)+u_z(0,0,1)=u_x\vec{i}+u_y\vec{j}+u_z\vec{k}$

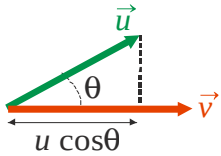
$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ vectors unitaris en la direcció dels eixos *x*, *y* i *z*, respectivament



Producte escalar de vectors:

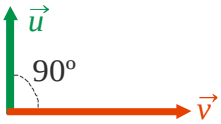
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=u\cdot v\cdot\cos\theta=u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y+u_z\cdot v_z$$

El resultat és la projecció de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.
S'anomena *producte escalar* perquè el resultat del producte és un escalar.



Propietats:

$\vec{u}\perp\vec{v}\Rightarrow\theta=90^o\text{ o }270^o\Rightarrow\cos\theta=0\Rightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$



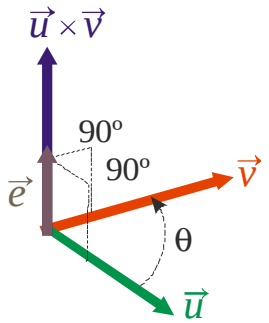
$\vec{u}//\vec{v}\Rightarrow\theta=0^o\Rightarrow\cos\theta=1\Rightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=uv$

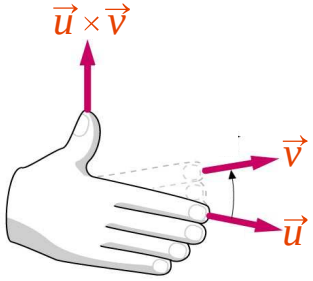
$\vec{u}$ anti$//\vec{v}\Rightarrow\theta=180^o\Rightarrow\cos\theta=-1\Rightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=-uv$

Commutativa: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

Producte vectorial:

$$\vec{u}\times\vec{v} = u\cdot v\cdot \sin\theta\cdot\vec{e}, \quad \vec{e}\perp\vec{u} \text{ i } \vec{v}$$

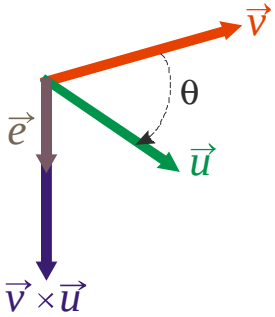




Sentit de $\vec{e}$: regla de la mà dreta + rotació antihorària, – rotació horària

En components:

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$



Anticommutativa: $\vec{u}\times\vec{v} = -\vec{v}\times\vec{u}$

<u>Exemple 1</u>: Si $\vec{F}_A = 600\vec{i} - 800\vec{j}$ N i $\vec{F}_B = 200\vec{i} - 200\vec{j}$ N, quina és la magnitud de $\vec{F} = \vec{F}_A - 2\vec{F}_B$?

$$\vec{F} = (600,-800) - 2(200,-200) = (200,-400)\text{N} = (200\vec{i} - 400\vec{j})\text{N}$$

$$F = \sqrt{200^2 + 400^2} = 447\,\text{N}$$

<u>Exemple 2</u>: Considereu els vectors $\vec{u} = 3\vec{i} - 4\vec{j} - 12\vec{k}$ i $\vec{v} = -\vec{i} + 7\vec{j} + 6\vec{k}$. Determineu el mòdul de $\vec{u}$, els angles θ_x, θ_y i θ_z que forma el vector $\vec{u}$ amb els eixos de coordenades, i el mòdul del vector $\vec{R} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$.

$$u = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + (-12)^2} = 13\,,\ v = \sqrt{(-1)^2 + 7^2 + 6^2} = \sqrt{86} = 9{,}27$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u\cdot v\cdot\cos\theta = u_x\cdot v_x + u_y\cdot v_y + u_z\cdot v_z$$

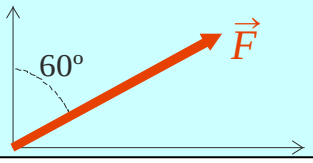
$$\cos\theta_x = \frac{\vec{u}\cdot\vec{i}}{u} = \frac{u_x}{u} = \frac{3}{13} \Rightarrow \theta_x = 76{,}6^\circ\,,\ \cos\theta_y = \frac{\vec{u}\cdot\vec{j}}{u} = \frac{u_y}{u} = \frac{-4}{13} \Rightarrow \theta_y = 107{,}9^\circ$$

$$\cos\theta_z = \frac{\vec{u}\cdot\vec{k}}{u} = \frac{u_k}{u} = \frac{-12}{13} \Rightarrow \theta_z = 157{,}4^\circ$$

$$\vec{R} = 2\vec{u} + 3\vec{v} = (6,-8,-24) + (-3,\,21,18) = (3,13,-6) = 3\vec{i} + 13\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$R = \sqrt{3^2 + 13^2 + 6^2} = 14{,}63$$

Exemple 3: El vector força $\vec{F}$ té un mòdul de 800 N i forma un angle de 60º respecte de l'eix *y*. Expresseu $\vec{F}$ en funció de les seves dues components.



$$\left.\begin{array}{l} F_x = F\sin(60^\circ) = 693\,\text{N} \\ F_y = F\cos(60^\circ) = 400\,\text{N} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{F} = 693\vec{i} + 400\vec{j}\ \text{N}$$

Exemple 4: Considereu els vectors $\vec{u} = 6\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$ i $\vec{v} = -12\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$. Calculeu el seu producte vectorial i comenteu què ens indica el resultat.

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -2 & -3 \\ -12 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -12\vec{i} + 24\vec{k} + 36\vec{j} - 24\vec{k} + 12\vec{i} - 36\vec{j} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = \vec{0}$$

Si $\vec{u}\times\vec{v} = \vec{0}$, llavors els vectors són o paral·lels o antiparal·lels.

De fet, $\vec{v} = -2\vec{u}$, és a dir, són antiparal·lels.

Condició d'equilibri de la partícula puntual

Equilibri mecànic: absència de moviment, situació estàtica.

Condició d'equilibri: primera llei de Newton → condició sobre el moviment de translació

$$\vec{F}_R = \sum \vec{F} = \vec{0}$$

Plantejament:

- Esquema real: diagrama espacial
- Diagrama de cos lliure:
  - Identificar l'objecte a aïllar.
  - Dibuixar les forces que hi actuen tot indicant-ne les direccions.

Exemple: Atesa una caixa de fusta de 75 kg, tal com s'indica a la figura, es vol carregar aquesta caixa sobre el camió, i per això se suspèn de dos cables que passen per dues corrioles clavades als edificis. Calculeu la tensió de cadascuna de les cordes.

Esquema real:

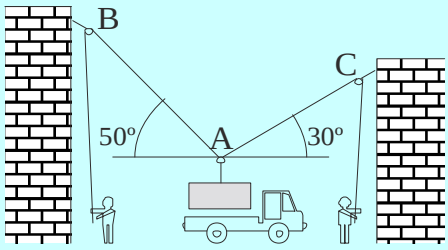
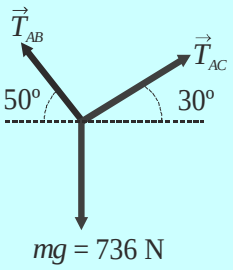


Diagrama del cos lliure:



$$mg = 75\text{kg} \cdot 9{,}8\,\text{m/s} = 736\text{N}$$

$$\left.\begin{array}{l} T_{AB}\cos 50^{\circ} = T_{AC}\cos 30^{\circ} \\ T_{AB}\sin 50^{\circ} + T_{AC}\sin 30^{\circ} = 736\text{N} \end{array}\right\} T_{AC} = T_{AB}\frac{\cos 50^{\circ}}{\cos 30^{\circ}}$$

$$T_{AB}\sin 50^{\circ} + T_{AB}\cos 50^{\circ}\,\text{tg}30^{\circ} = 736\text{N}$$

$$T_{AB} = \frac{736\text{N}}{\sin 50^{\circ} + \cos 50^{\circ}\,\text{tg}30^{\circ}} = 647\text{N}$$

$$T_{AC} = T_{AB}\frac{\cos 50^{\circ}}{\cos 30^{\circ}} = 480\text{N}$$

Què és un sòlid rígid?

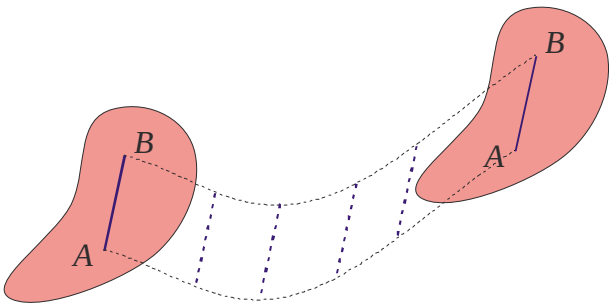
Aproximació de sòlid rígid:
Física: sistema de partícules en el qual la distància entre dues partícules qualssevulla es manté constant.
Enginyeria: objecte que no es deforma.

Cal tenir en compte la grandària de l'objecte: a banda del moviment de translació, un objecte també pot tenir moviments de rotació.

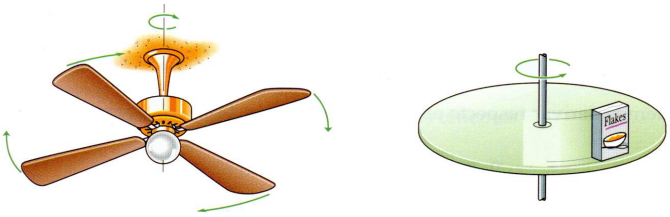
Translació:

L'orientació d'un segment rectilini qualsevol dins del sòlid no canvia.

En un sòlid rígid en translació, tots els punts es mouen amb la mateixa velocitat i acceleració.



Rotació:
L'orientació d'un segment rectilini qualsevol dins del sòlid no canvia.



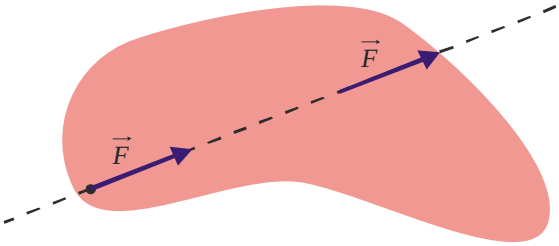
En un sòlid rígid en rotació, tots els punts es mouen a la mateixa velocitat i acceleració angulars.[1]

[1] Rotació: la velocitat d'un punt de l'objecte és $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, on $\vec{\omega}$ és la velocitat angular de rotació i $\vec{r}$ és la distància a l'eix de rotació.

La validesa de l'aproximació de sòlid rígid depèn de les condicions del moviment: un cotxe en moviment es pot considerar com a sòlid rígid, però en el cas de col·lisió es comporta com un objecte deformable.

Principi de transmissibilitat

Les condicions d'equilibri i moviment d'un sòlid rígid no canvien si una força que actua en un punt es desplaça al llarg de la seva línia d'aplicació.

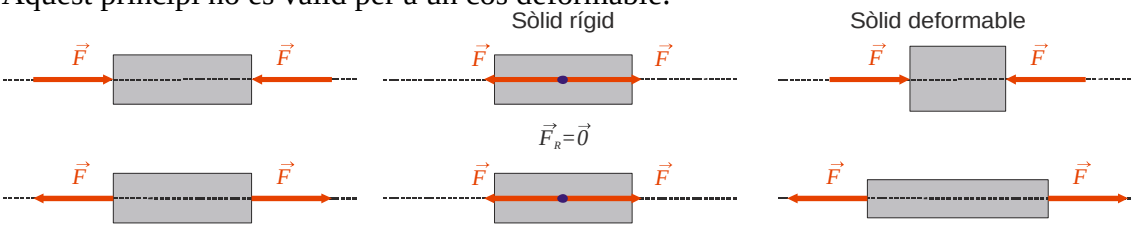


Forces sobre objectes puntuals: vectors fixos

Forces sobre sòlids rígids: vectors lliscants

Per exemple és el mateix empènyer un cotxe per darrere que estirar-lo per davant.

Aquest principi no és vàlid per a un cos deformable:



Moment de força

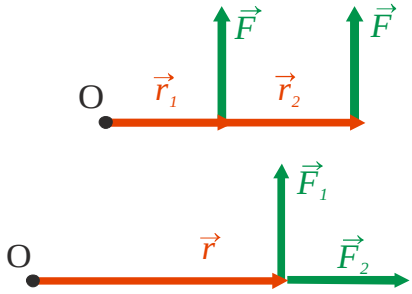
Moment de força: causa del canvi del moviment de rotació

El moment de força depèn:

- de la distància, com més lluny més gran
- de la magnitud de la força
- de l'orientació de la força

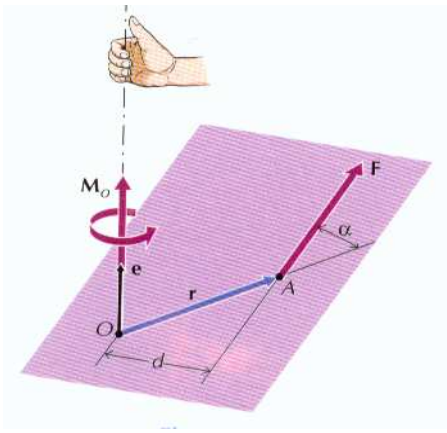
màxim si $\vec{r} \perp \vec{F}$

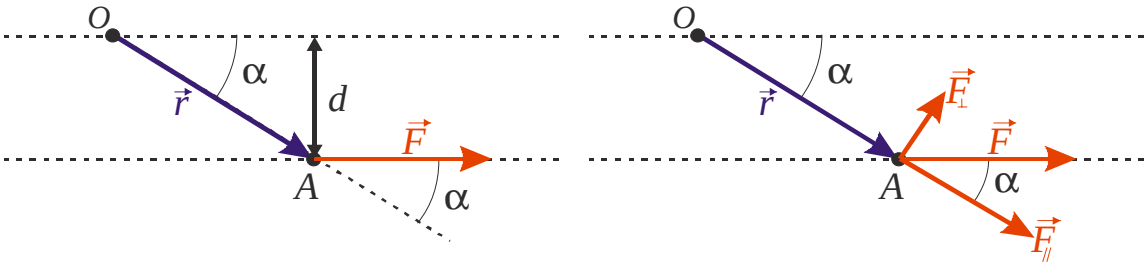
0 si $\vec{r} // \vec{F}$



El moment respecte d'un punt es defineix com:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$





$$M = rF\sin\alpha = \begin{cases} r\sin\alpha \cdot F = d \cdot F \\ r \cdot F\sin\alpha = r \cdot F_{\perp} \end{cases}$$

Propietats:

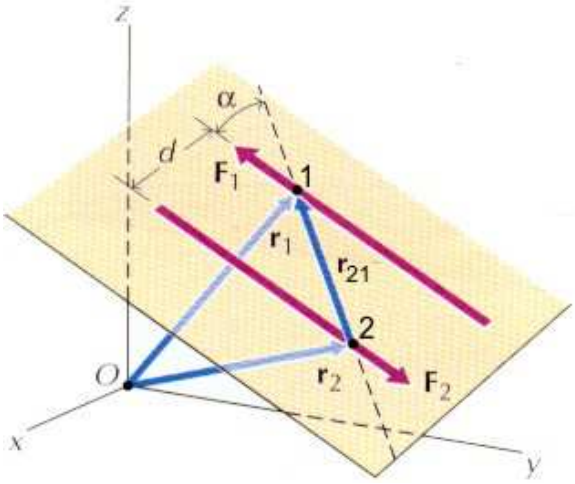
- És proporcional a la distància i a la força.
- Depèn de l'angle entre $\vec{r}$ i $\vec{F}$.
- Si $\vec{r} \perp \vec{F}$, $\alpha = 90$ o $270^{o} \Rightarrow \cos\alpha = 1$ o -1, el mòdul és màxim, $M = rF$
  Si $\vec{r} // \vec{F}$, $\alpha = 0$ o $180^{o} \Rightarrow \cos\alpha = 0$, $M = 0$
- Sentit de la rotació: regla de la mà dreta.
- Compleix el principi de transmissibilitat.

Parell de forces

Parell de forces: dues forces de magnitud i direcció iguals, però sentit oposat.

$$\vec{F}_R = \sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \text{no provoquen canvis en el moviment de translació.}$$

Els parells de força només alteren el moviment de rotació. En un objecte inicialment aturat només provocaran l'aparició d'un moviment de rotació, no hi haurà moviment de translació.



$$\vec{M}_O = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 - \vec{r}_2 \times \vec{F}_1 =$$
$$= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F} = \vec{r}_{2\to 1} \times \vec{F}$$
$$M_O = r_{21}F \cdot \sin\alpha = F \cdot d$$

El moment d'un parell de forces és independent del punt de referència, *O*, triat.

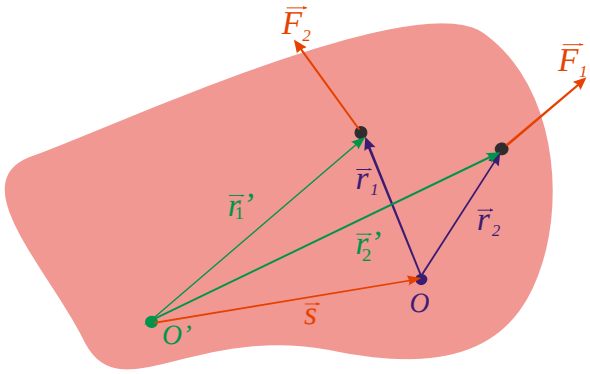
Condició d'equilibri del sòlid rígid

Perquè un objecte inicialment en repòs es mantingui en repòs és necessari que:

- $\vec{F}_R = \sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow$ no s'iniciarà el moviment de translació.
- $\overrightarrow{M}_{R,0} = \sum \overrightarrow{M_O} = \vec{0} \quad \forall O \Rightarrow$ no s'iniciarà el moviment de rotació.

Si $\overrightarrow{M}_{R,0} = \vec{0}$ i $\vec{F}_R = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{M}_{R,0'} = \vec{0}$ per a qualsevol punt O'.

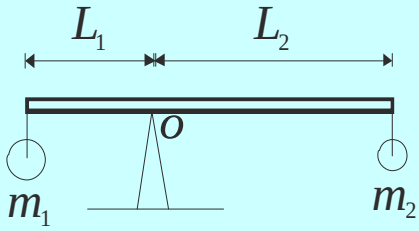
És a dir, si la força resultat és zero i per a un punt qualsevol el moment resultat és zero, llavors el sòlid rígid està en equilibri.



Demostració:

$$\begin{aligned}\sum \overrightarrow{M}_O' &= \vec{r}_1' \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2' \times \vec{F}_2 + \ldots \\ &= (\vec{s} + \vec{r}_1) \times \vec{F}_1 + (\vec{s} + \vec{r}_2) \times \vec{F}_2 + \ldots \\ &= (\vec{s} \times \vec{F}_1 + \vec{s} \times \vec{F}_2 + \ldots) + \\ &\quad (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F} + \ldots) \\ &= \vec{s} \times \sum \vec{F} + \sum \overrightarrow{M}_O = \vec{0} + \vec{0}\end{aligned}$$

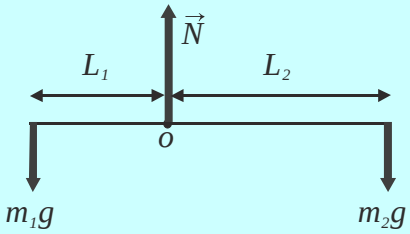
<u>Exemple</u>: Una barra rígida de pes negligible està en equilibri estàtic sota l'acció de tres forces paral·leles: els dos pesos de les masses als extrems i la reacció del pivot. Les dades són: l_1, l_2 i m_1. Trobeu la massa m_2 i la reacció del punt de recolzament.



$$\left.\begin{aligned}\vec{F}_R &= \sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow N = m_1 g + m_2 g \\ \overrightarrow{M}_{R,O} &= \sum \overrightarrow{M}_O = \vec{0} \Rightarrow L_1 m_1 g = L_2 m_2 g\end{aligned}\right\} \Rightarrow m_2 = m_1 \frac{L_1}{L_2}$$

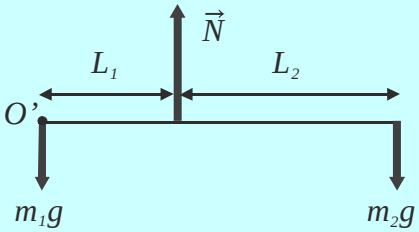
i

$$N = m_1 g + m_2 g = N = \left(m_1 + m_1 \frac{L_1}{L_2}\right) g = m_1 g \left(\frac{L_2 + L_1}{L_2}\right)$$



Provem un altre punt de referència:

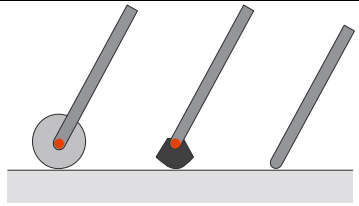
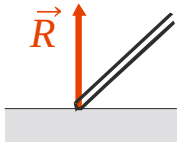
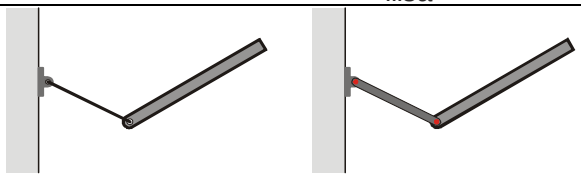
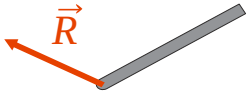
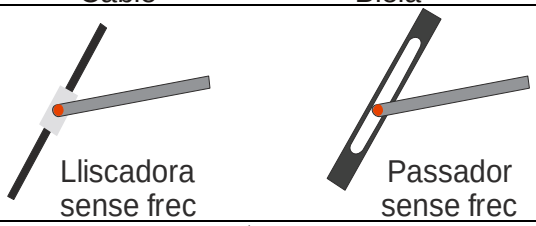
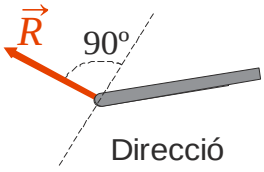
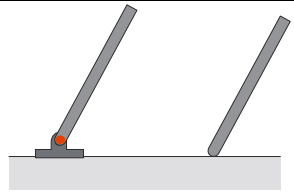
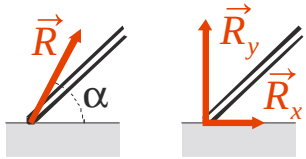
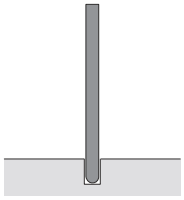
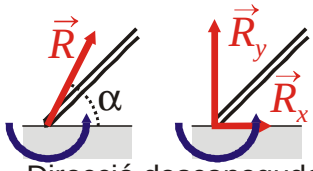
$$\left.\begin{aligned}\vec{F}_R &= \sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow N = m_1 g + m_2 g \\ \overrightarrow{M}_{R,O'} &= \sum \overrightarrow{M}_{O'} = \vec{0} \Rightarrow L_1 N = (L_1 + L_2) m_2 g\end{aligned}\right\}$$



$$L_1(m_1 g + m_2 g) = (L_1 + L_2) m_2 g \Rightarrow L_1 m_1 = L_2 m_2 \Rightarrow m_2 = m_1 \frac{L_1}{L_2}$$

Punts de recolzament

Les reaccions dels diferents punts de recolzament són:

Recolzament	Reacció	Nombre d'incògnites
	 Direcció coneguda	1
	 Direcció coneguda	1
	 Direcció coneguda	1
	 Direcció desconeguda	2
	 Direcció desconeguda + parell de forces	3

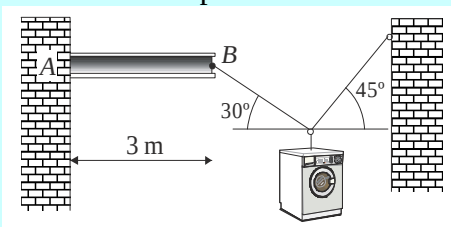
Les reaccions estan associades a les limitacions que imposen els contactes i unions al moviment dels objectes.

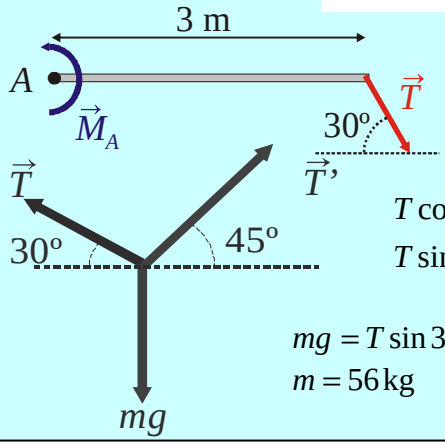
Diagrama del sòlid lliure

Per resoldre un problema d'estàtica cal representar el diagrama de sòlid rígid:

- Esquema del sòlid rígid.
- Forces: punts d'aplicació i direccions (cal fer una atenció especial a les reaccions).
- Sòlid rígid: dimensions, distàncies i orientacions.

Exemple: Considereu el sistema representat al dibuix. La biga cedirà si la magnitud del moment respecte de A supera els 600 Nm. Quina és la massa màxima que pot tenir la rentadora suspesa dels cables?





$$\sum M_A: \quad M_A = 600 \text{ Nm} = T_{màx} \sin 30 \text{ m}$$

$$T_{màx} = 400 \text{ N}$$

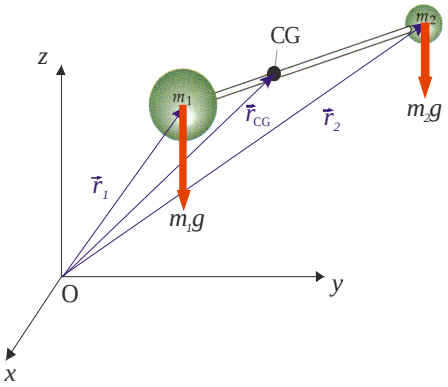
$$\left.\begin{array}{l} T\cos 30^\circ = T'\cos 45^\circ \\ T\sin 30^\circ + T'\sin 45^\circ = mg \end{array}\right\} \Rightarrow T' = T\frac{\cos 30^\circ}{\cos 45^\circ} = 490 \text{ N}$$

$$mg = T\sin 30^\circ + T'\sin 45^\circ = 546 \text{ N}$$

$$m = 56 \text{ kg}$$

Centre de gravetat

En un sòlid rígid, on s'aplica el pes?
El centre de gravetat, CG, és el punt d'aplicació del pes. El centre de gravetat també es coneix amb el nom de centre de masses.[2]



Primer analitzarem un sistema de partícules:

$$\vec{F}_R = -(m_1 + m_2)g\vec{k}$$

$$\begin{aligned} \sum \vec{M}_O &= \vec{r}_1 \times -m_1 g\,\vec{k} + \vec{r}_2 \times -m_2 g\,\vec{k} = \\ &= (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2) \times -g\,\vec{k} = \\ &= \left(\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}\right) \times -(m_1 + m_2)g\,\vec{k} = \\ &= \vec{r}_{CG} \times \vec{F}_R \end{aligned}$$

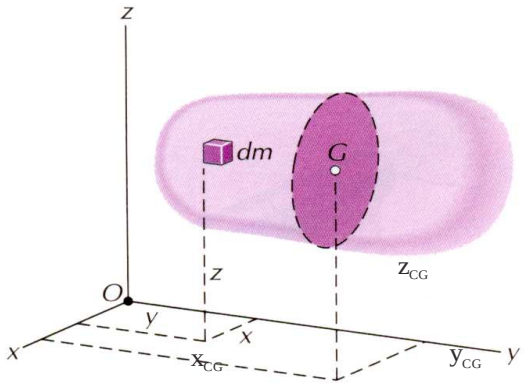
Sistema equivalent:

$$F_R = (m_1 + m_2)g$$

$$\vec{r}_{CG} = \left(\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}\right) \Rightarrow x_{CG} = \left(\frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}\right), \; y_{CG} = \left(\frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}\right), \ldots$$

[2] De fet conceptualment el centre de gravetat i el de masses són diferents, però si la gravetat és constant són numèricament idèntics.

I en el cas d'un sòlid rígid (sistema continu):



$$x_{CG} = \frac{\int_V x\,dm}{\int_V dm}$$

D'altra banda, la densitat es defineix com la massa per unitat de volum:

$\rho \equiv \dfrac{dm}{dV} \Rightarrow dm = \rho\, dV$, unitat: $\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

En un material homogeni ρ és constant i no depèn de la posició:

$$M_T = \int_V dm = \int_V \rho\, dV = \rho \int_V dV = \rho V$$

És a dir: $\rho \equiv \dfrac{M_T}{V}$

Així doncs, per a un material homogeni:

$$\left.\begin{aligned} x_{CG} &= \frac{\int_V x\rho\, dV}{\int_V \rho\, dV} = \frac{\rho\int_V x\, dV}{\rho\int_V dV} = \frac{\int_V x\, dV}{V} \\ y_{CG} &= \frac{\int_V y\, dV}{V} \\ z_{CG} &= \frac{\int_V z\, dV}{V} \end{aligned}\right\}$$

Mitjana de les posicions:

<u>centre geomètric</u>

És a dir, en un <u>sòlid homogeni</u> (densitat constat) <u>el centre de gravetat coincideix amb el centre geomètric</u>.

Per a superfícies: $\sigma \equiv \dfrac{dm}{dS} \Rightarrow dm = \sigma\, dS$, unitat: $\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^2}$

I per a un material homogeni:

$$x_{CG} = \frac{1}{S}\int_S x\, dS\,,\ y_{CG} = \frac{1}{S}\int_S y\, dS \ \text{ i } \ z_{CG} = \frac{1}{S}\int_S z\, dS$$

Per a longitudinals: $\lambda \equiv \dfrac{dm}{dL} \Rightarrow dm = \lambda\, dL$, unitat: $\dfrac{\text{kg}}{\text{m}}$

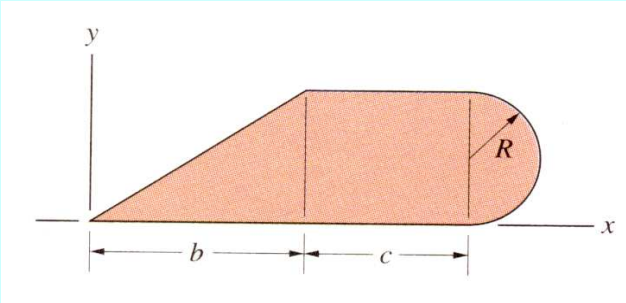
I per a un material homogeni:

$$x_{CG} = \frac{1}{L}\int_L x\, dL\,,\ y_{CG} = \frac{1}{L}\int_L y\, dL \ \text{ i } \ z_{CG} = \frac{1}{L}\int_L z\, dL$$

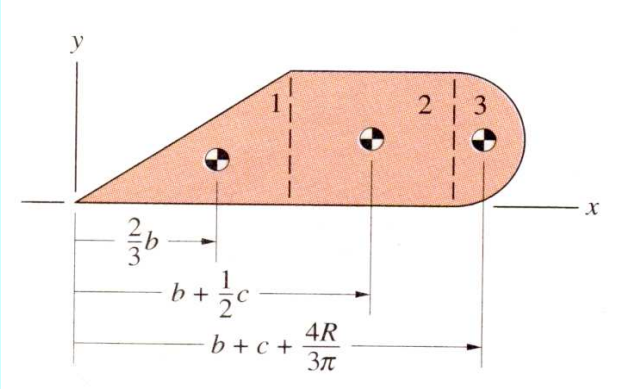
En general els materials són homogenis, les inhomogeneïtats dels objectes apareixen quan es combinen diferents materials en la seva fabricació. La solució és analitzar per separat cada peça fabricada amb un únic material i posteriorment resoldre el problema

com si es tractés d'un sistema de partícules. Aquesta aproximació també es pot emprar en el cas de geometries complexes analitzant separadament cada element senzill.

Exemple: Calculeu el centre de gravetat del sòlid rígid homogeni de la figura.



Coordenada x:



$$x_1 = \frac{2}{3}b, \quad A_1 = \frac{1}{2}b(2R)$$

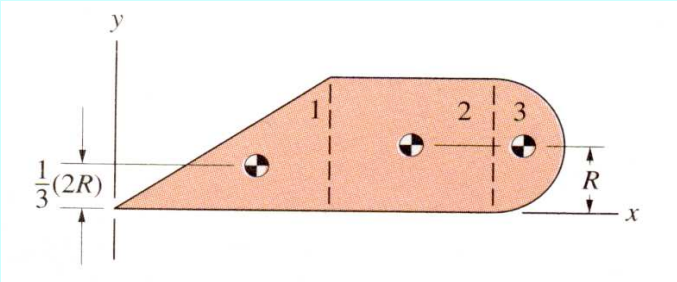
$$x_2 = b + \frac{1}{2}c, \quad A_2 = c(2R)$$

$$x_3 = b + c + \frac{4R}{3\pi}, \quad A_3 = \frac{1}{2}\pi R^2$$

$$x_{CG} = \frac{x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{\left(\frac{2}{3}b\right)\left(\frac{1}{2}b(2R)\right) + \left(b + \frac{1}{2}c\right)c(2R) + \left(b + c + \frac{4R}{3\pi}\right)\frac{1}{2}\pi R^2}{\frac{1}{2}b(2R) + c(2R) + \frac{1}{2}\pi R^2} =$$

$$= \frac{\frac{4}{3}b^2 + 4bc + 2c^2 + \pi R\left(b + c + \frac{4R}{3\pi}\right)}{2b + 4c + \pi R}$$

Coordenada y:



$$y_1 = \frac{1}{3}2R$$

$$y_2 = R$$

$$y_3 = R$$

$$y_{CG} = \frac{y_1A_1 + y_2A_2 + y_3A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{\left(\frac{1}{3}2R\right)\left(\frac{1}{2}b(2R)\right) + Rc(2R) + R\frac{1}{2}\pi R^2}{\frac{1}{2}b(2R) + c(2R) + \frac{1}{2}\pi R^2}$$

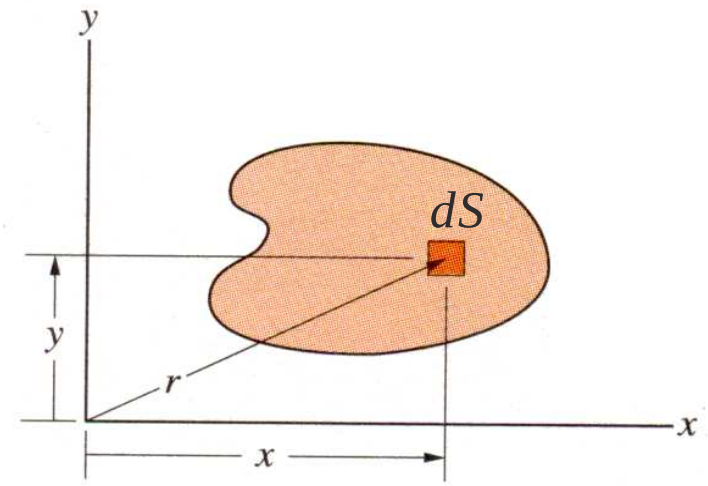
$$= 1 - \frac{2}{3R}\frac{1}{2b + 4c + \pi R}$$

Moments de segon ordre d'àrees

Bigues del mateix material però de diferent perfil pateixen deformacions diferents; la resistència a la deformació depèn del perfil de la biga (tema 3).

Es fa servir el moment de segon ordre per determinar el centre de pressions, és a dir, per determinar el punt d'aplicació de la força exercida per un fluid (tema 4).

El moment de segon ordre és la mitjana de les distàncies al quadrat d'una superfície respecte d'un eix:



Respecte de l'eix x:

$$I_x = \int_S y^2 \, dS$$

Respecte de l'eix y:

$$I_y = \int_S x^2 \, dS$$

Producte d'inèrcia:

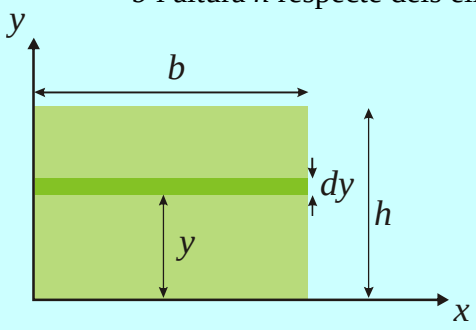
$$I_{xy} = I_{yx} = \int_S xy \, dS$$

Les dimensions són de $[L]^4$, és a dir, les unitats en SI són de m^4.

Definició de radi de gir:

$$R_{G,x} \equiv \sqrt{\frac{I_x}{S}} \text{ i } R_{G,y} \equiv \sqrt{\frac{I_y}{S}}.$$ Dimensions $[L]$, unitat en SI: m

<u>Exemple</u>: Calculeu el moment de segon ordre i el radi de gir d'un rectangle de base b i altura h respecte dels eixos indicats a la figura.



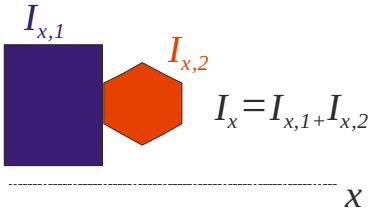
$$I_x = \int_0^h y^2 b dy = \frac{1}{3} b y^3 \Big|_0^h = \frac{1}{3} b h^3$$

$$R_{G,x} = \sqrt{\frac{\frac{1}{3} b h^3}{bh}} = \frac{1}{\sqrt{3}} h$$

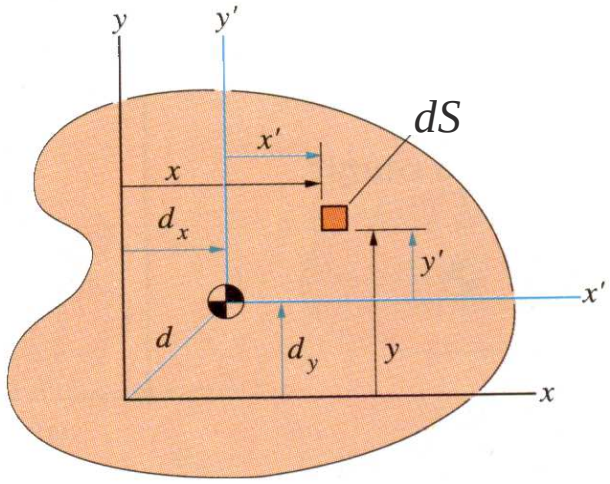
$$I_y = \frac{1}{3} h b^3, \quad R_{G,y} = \frac{1}{\sqrt{3}} b$$

Propietats:

- Additivitat:



- Teorema de Steiner o dels eixos paral·lels:



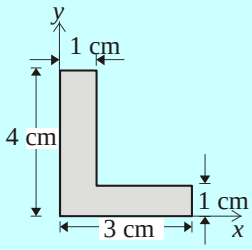
x' i *y'* tenen l'origen al centre de gravetat.

$$I_x = I_{x'} + S \cdot d_x^2$$
$$I_y = I_{y'} + S \cdot d_y^2$$

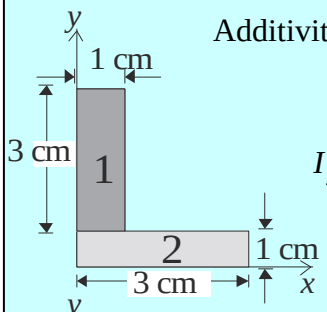
És a dir, un cop conegut el moment de segon ordre per a un eix que passa pel centre de gravetat, llavors podem determinar el moment de segon ordre de qualsevol altre eix que sigui paral·lel mitjançant el teorema dels eixos paral·lels.

Qüestió: atesa una certa direcció, quin és l'eix per al qual el moment de segon ordre és més petit?

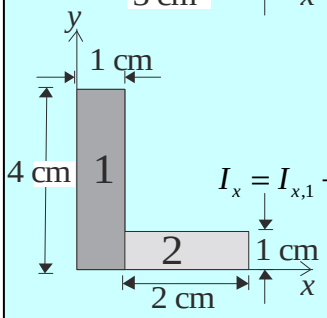
<u>Exemple</u>: Determineu el moment de segon ordre respecte als eixos *x*, *y* i el producte d'inèrcia de la superfície de la figura.



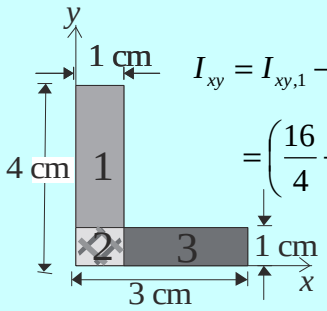
Additivitat:



$$I_y = I_{y,1} + I_{y,2} = \frac{1}{3} 3 \cdot 1^3 \text{ cm}^4 + \frac{1}{3} 1 \cdot 3^3 \text{ cm}^4 = (1+9)\text{cm}^4 = 10\,\text{cm}^4$$



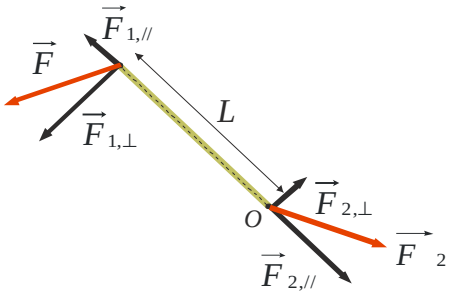
$$I_x = I_{x,1} + I_{x,2} = \frac{1}{3} 1 \cdot 4^3 \text{ cm}^4 + \frac{1}{3} 2 \cdot 1^3 \text{ cm}^4 = (\frac{64}{3} + \frac{2}{3})\text{cm}^4 = 22 \text{ cm}^4$$



$$I_{xy} = I_{xy,1} - I_{xy,2} + I_{xy,3} = \frac{1}{4} 4^2 \cdot 1^2 \text{ cm}^4 - \frac{1}{4} 1^2 \cdot 1^2 \text{ cm}^4 + \frac{1}{4} 3^2 \cdot 1^2 \text{ cm}^4$$
$$= \left(\frac{16}{4} - \frac{1}{4} + \frac{9}{4}\right)\text{cm}^4 = 6 \text{ cm}^4$$

Introducció al càlcul d'estructures

Estructura: conjunt de barres de pes negligible unides les unes amb les altres (el pes de les barres és negligible quan es compara amb la càrrega que suporten). Els punts d'unió s'anomenen *nusos*.



A les barres:

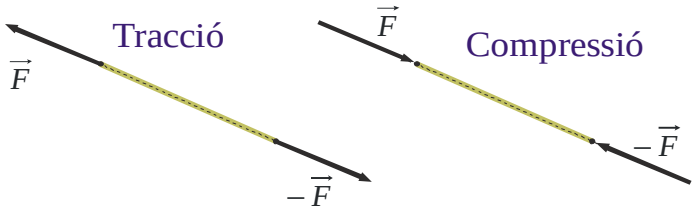
$$\sum M_O = F_{1,\perp} \cdot L = 0 \Rightarrow F_{1,\perp} = 0$$

A les barres les forces estan dirigides segons la direcció de la barra (això és conseqüència de negligir el pes de la barra):

$$\vec{F}_{1,\perp} + \vec{F}_{2,\perp} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{2,\perp} = 0$$

A més, la suma de forces ha de ser zero: $\vec{F}_{1,//} + \vec{F}_{2,//} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{2,//} = -\vec{F}_{1,//}$

Per tant, hi ha dues possibilitats pel que fa a les forces aplicades sobre les barres:

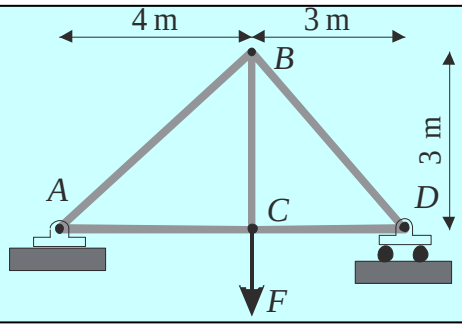


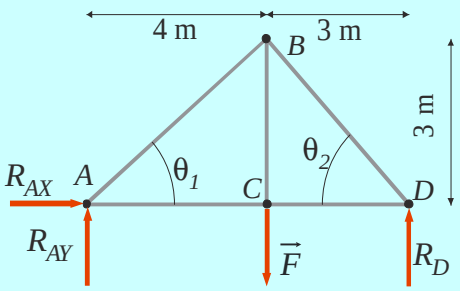
Resolució pel mètode dels nusos:

- Càlcul de les <u>forces externes</u> a partir de considerar l'estructura com un únic objecte. Les forces internes s'anul·len pel principi d'acció i reacció. En equilibri la suma de forces externes és zero, i la suma dels moments externs respecte de qualsevol punt *P* també és zero.
- Resolució de l'equació de forces per a cadascun dels <u>nusos</u> per tal d'obtenir les tensions a les barres de l'estructura. Cadascuna de les parts de l'estructura també ha d'estar en equilibri. Aquí convé tenir clar que un nus és una petita part de l'estructura.

Per la tercera llei de Newton, si una força estira un nus, el nus aplica una força de sentit oposat que estira la barra, i tendeix a allargar-la (tracció).
Igualment, si una força comprimeix un nus, el nus aplica una força de sentit oposat que comprimeix la barra (compressió).

<u>Exemple</u>: Determineu les forces axials a les barres de l'estructura de la figura. El valor de la força *F* és de 600 N.





$$\cos\theta_2 = \sin\theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\theta_1 = \frac{4}{5}$$

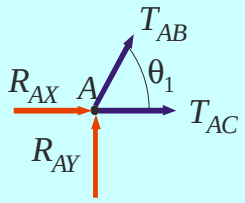
$$\sin\theta_1 = \frac{3}{5}$$

Forces externes:

$$\sum \vec{M}_A = 0 \Rightarrow 4 \cdot F = 7 \cdot R_D \Rightarrow R_D = 343\,\text{N}$$

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} R_{AY} + R_D = F = 600\,\text{N} \\ R_{AX} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_{AY} = 257\ \text{N} \\ R_{AX} = 0 \end{cases}$$

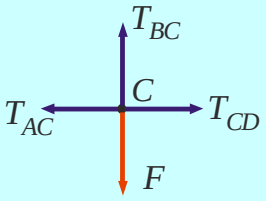
Nusos (suposem que totes les tensions són traccions):



$$\begin{cases} R_{AX} + T_{AC} + T_{AB}\cos\theta_1 = 0 \\ R_{AY} + T_{AB}\sin\theta_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_{AB} = -428{,}6\ \text{N} \\ T_{AC} = 342{,}8\ \text{N} \end{cases}$$

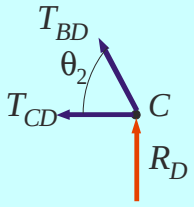
Compressió

Tracció



$$\begin{cases} T_{CD} = T_{AC} = 342{,}8\ \text{N} \\ T_{BC} = F = 600\ \text{N} \end{cases}$$

Tracció i tracció

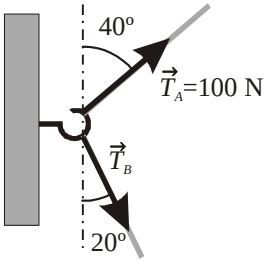


$$\begin{cases} T_{BD}\cos\theta_2 + T_{CD} = 0 \\ R_D + T_{BD}\sin\theta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad T_{BD} = -484{,}8\ \text{N}$$

Compressió

Qüestions del tema 2

Càlcul vectorial

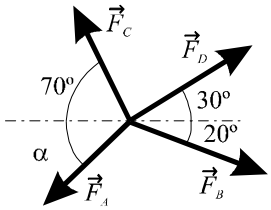


1. Els cables *A* i *B* de la figura exerceixen forces $\vec{T}_A$ i $\vec{T}_B$. Quina és la tensió al cable *B* per tal que la força total exercida sigui perpendicular a la paret?

Sol.: T_B = 81,5 N

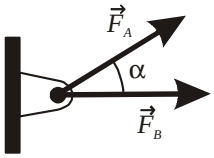
2. Si $\vec{F}_A = 600\vec{i} - 800\vec{j}$ N i $\vec{F}_B = 200\vec{i} - 200\vec{j}$ N, quina és la magnitud de $\vec{F} = \vec{F}_A - 2\vec{F}_B$?

Sol.: $\left|\vec{F}\right|$ = 447 N



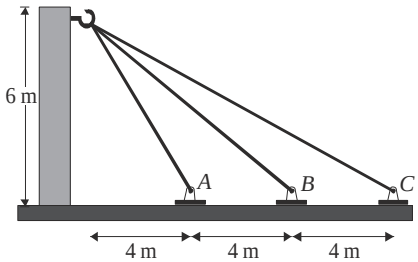
3. Les quatre forces concurrents mostrades a la figura donen una suma vectorial nul·la. Si $\left|\vec{F}_B\right|$ = 800 N, $\left|\vec{F}_C\right|$ = 1.000 N i $\left|\vec{F}_D\right|$ = 900 N. Quin és el valor de $\left|\vec{F}_A\right|$ i de l'angle α?

Sol.: $\left|\vec{F}_A\right|$ = 1.630 N, α = 43,2º



4. La magnitud de cadascuna de les forces de la figura és de 100 N. Se sap que el suport cedirà quan la magnitud de la força total exercida sobre seu sigui de 150 N. Quin interval de l'angle α és acceptable?

Sol.: 277º > α > 82,8º



5. Les tensions als cables són totes iguals. Si la magnitud de la força total exercida sobre la paret és de 200 kN, quina és la tensió dels cables?

Sol.: 68,9 kN

6. Considereu els vectors $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ i $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$. *a)* Determineu l'angle que formen els dos vectors. *b)* Calculeu quant hauria de valer la segona component del vector $\vec{v}$ per tal que els dos vectors fossin perpendiculars.

Sol.: *a)* 127,2º; *b)* v_y = 5

7. Considereu els vectors $\vec{u} = 3\vec{i} - 4\vec{j} - 12\vec{k}$ i $\vec{v} = -\vec{i} + 7\vec{j} + 6\vec{k}$. Determineu el mòdul de $\vec{u}$, els angles θ_x, θ_y i θ_z que forma el vector $\vec{u}$ amb els eixos de coordenades i el mòdul del vector $\vec{R} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$.

Sol.: $|\vec{u}| = 13$; θ_x = 76,6º, θ_y = 107,9º, θ_z = 157,4º; $|\vec{R}|$ = 14,6

8. El vector força $\vec{F}$ té un mòdul de 800 N i forma un angle de 60º respecte de l'eix *y*. Expresseu $\vec{F}$ en funció de les seves dues components.

Sol.: $\vec{F} = 693\vec{i} + 400\vec{j}$

9. Una força de 140 N és aplicada sobre una recta que va del punt *A* (200, 200, –100) mm al punt *B* (800, 500, –300) mm. La força apunta cap a *B*. Expresseu la força en components.

Sol.: $\vec{F} = 120\vec{i} + 60\vec{j} - 40\vec{k}$ N

10. Tenim el vector $\vec{F} = 3\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$ N. Trobeu el mòdul de $\vec{F}$ i les components del vector unitari que té la mateixa direcció.

Sol.: $|\vec{F}|$ = 5,38 N; $\vec{u} = 0{,}557\vec{i} - 0{,}743\vec{j} - 0{,}371\vec{k}$

11. Els dos vectors $\vec{u} = u_x\vec{i} - 4\vec{j}$ i $\vec{v} = -2\vec{i} + 6\vec{j}$ són perpendiculars. Trobeu el valor de la component u_x.

Sol.: $u_x = -12$

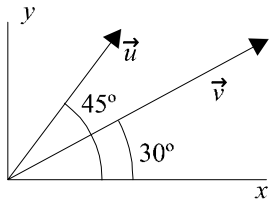
12. Determineu el producte vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$ amb $\vec{u} = -2\vec{i} + \vec{j}$ i $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$.

Sol.: $5\vec{k}$

13. Considereu els vectors $\vec{u} = 6\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$ i $\vec{v} = -12\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$. Calculeu el seu producte vectorial i comenteu què ens indica el resultat.

Sol.: $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$; els dos vectors són paral·lels

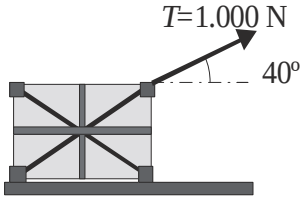
14. Els vectors de la figura tenen $|\vec{u}|$ = 10 i $|\vec{v}|$ = 20. Determineu $\vec{u} \times \vec{v}$ i $\vec{v} \times \vec{u}$ usant tant la regla del determinant com la definició de producte vectorial.



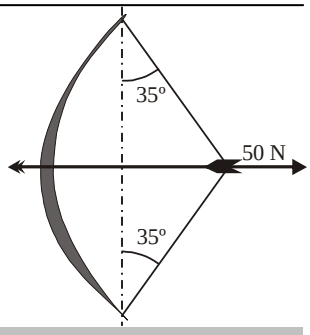
Sol.: $\vec{u} \times \vec{v} = -51{,}8\vec{k}$, $\vec{v} \times \vec{u} = 51{,}8\vec{k}$

Equilibri de la partícula

15. La caixa té 300 kg de massa i el cable, una tensió d'1 kN. Determineu la força normal i de fricció sobre la caixa si aquesta roman en repòs.

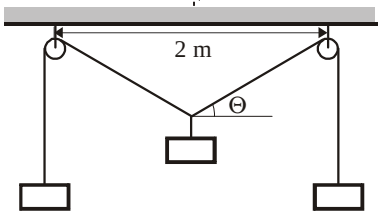


Sol.: N = 2.300 N, F_f = 766 N



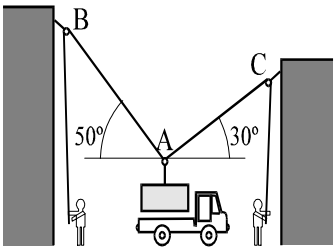
16. Es requereix una força horitzontal de 50 N per tensar l'arc fins a la posició indicada a la figura. Quina serà la tensió de les dues cordes de l'arc?

Sol.: T = 43,6 N



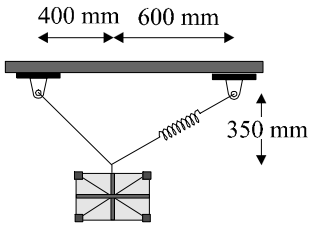
17. Les tres masses de la figura són iguals. Si el sistema resta en equilibri estàtic, quin és l'angle Θ? Si cada corda té una longitud de 4 metres, quant baixen les masses laterals respecte a la central?

Sol.: Θ = 30º; 2,27 m



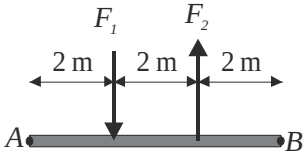
18. Atesa una caixa de fusta de 75 kg, tal com s'indica a la figura, es vol carregar aquesta caixa sobre el camió, i per això se suspèn de dos cables que passen per dues corrioles clavades als edificis. Calculeu la tensió de cadascuna de les cordes.

Sol.: T_{AB} = 647 N; T_{AC} = 480 N



19. La longitud natural de la molla (en estat de repòs) és de 660 mm i la seva constant k és de 1.000 N/m. Quina és la massa del cos en suspensió? (Recordeu que en una molla $F = -k(l-l_0)$, on l_0 és la longitud natural de la molla.)

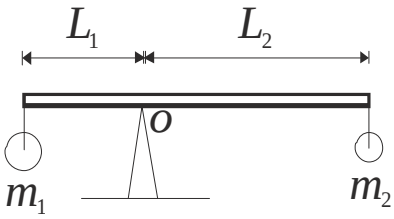
Sol.: 4,45 kg



20. Suposeu una barra horitzontal d'extrems A i B separats 6 m. Si F_1 = 50 N i F_2 = 100 N, determineu la suma de moments respecte a A i respecte a B.

Sol.: $\sum M_A = 300\,\text{Nm}$; $\sum M_B = 0\,\text{Nm}$

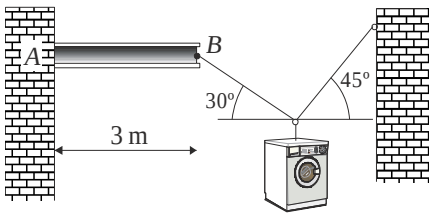
Equilibri del sòlid rígid



21. Una barra rígida de pes negligible està en equilibri estàtic sota l'acció de tres forces paral·leles: els dos pesos de les masses als extrems i la reacció del pivot. Les dades són: l_1, l_2 i m_1. Trobeu la massa m_2 i la reacció del punt de recolzament.

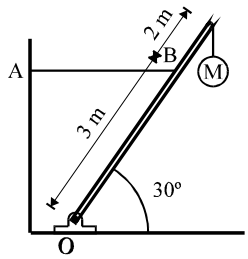
Sol.: $m_2 = m_1 \dfrac{l_1}{l_2}$, $\qquad N = m_1 g \dfrac{(l_1 + l_2)}{l_2}$

22. Considereu el sistema representat en el dibuix. La biga cedirà si la magnitud del moment respecte de *A* supera els 600 Nm. Quina és la massa màxima que pot tenir la rentadora suspesa dels cables?



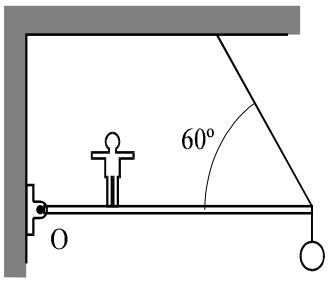
Sol.: m = 55,8 kg

23. La palanca de la figura té una massa negligible i està clavada a terra mitjançant una articulació.
a) Quin valor haurà de tenir *M* per tal que la corda *AB* estigui sotmesa a una tensió de 9.800 N?
b) Quin serà el mòdul i la direcció de la força neta feta sobre la barra al punt *O*?



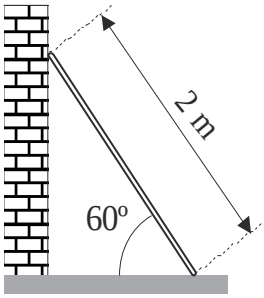
Sol.: *a)* M = 346,4 kg; *b)* |F| = 10.371 N; α = 19,11º

24. Un nen famolenc que pesa 712 N camina sobre una biga intentant agafar una piruleta que penja de l'extrem. La biga és uniforme, pesa 223 N, té 6 m de longitud i està subjecta a la paret a través d'una articulació, i la piruleta pesa 89 N. Dibuixeu el diagrama de cos lliure de la biga. Trobeu la tensió de la corda i les components de la força de reacció al punt *O* quan el nen es troba a 0,9 m de distància de la paret. Si la corda pot resistir una tensió màxima de 890 N, quina és la distància màxima que podrà recórrer el nen abans que es trenqui la corda?



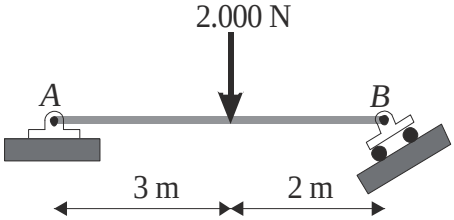
Sol.: T = 355 N; R_x = 177 N i R_y = 717 N; 4,8 m

25. Una escala de 2 m de llargada i 30 kg de massa es recolza en una paret formant un angle de 60º respecte l'horitzontal. El coeficient de fricció estàtic entre el terra i l'escala és de 0,2. La fricció entre l'escala i la paret és negligible.
a) quan val la força de fricció estàtica?
b) fins a quina alçada màxima pot pujar una persona de 75 kg de massa abans de que l'escala rellisqui.



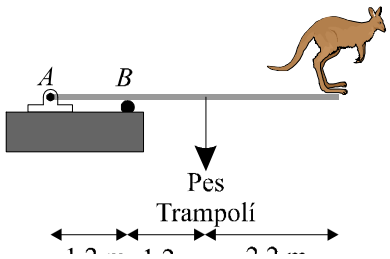
Sol.: a) 84,9 N; b) 0,493 m.

26. La biga de la figura té un suport de passador en *A* i un rodet en *B*. El pla on es repenja el suport *B* té una inclinació de 30º. Quin valor tenen les reaccions als suports?



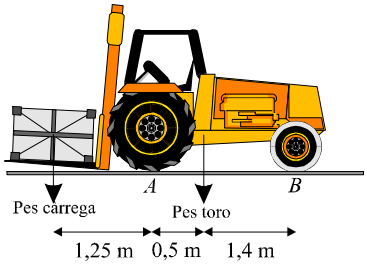
Sol.: A_x = 0,69 kN, A_y = 0,80 kN i B = 1,38 kN

27. La massa del cangur capbussador és de 80 kg i la del trampolí és de 45 kg. Dibuixeu el diagrama de sòlid lliure del trampolí i determineu les reaccions en *A* i *B*.



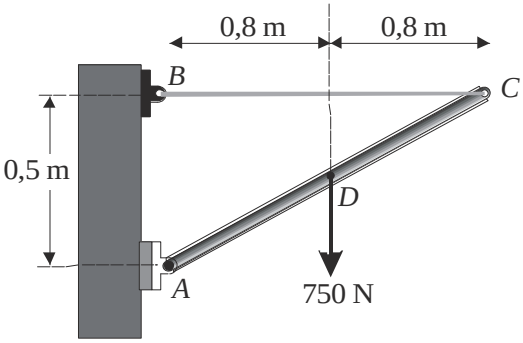
Sol.: A_x = 0 N, A_y = –2,66 kN i *B* = 3,89 kN

28. El toro de la figura està en repòs. El pes de la càrrega és de 2 kN i el pes del vehicle és de 8 kN. Quin valor tenen les reaccions als punts *A* i *B*?



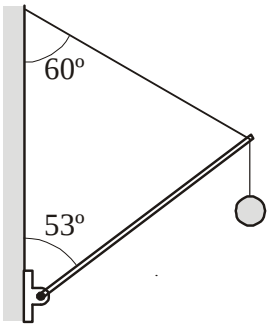
Sol.: *A* = 9,21 kN i *B* = 0,789 kN

29. Una biga de massa negligible aguanta una càrrega de 750 N tal i com està indicat a la figura. La biga està unida per una articulació a la paret (punt *A*). A l'extrem *C* de la biga s'ha lligat una corda de massa negligible. Finalment, l'altre extrem de la corda (punt *B*) esta lligat a la paret.
a) Determina les reaccions als punts *A*, *B* i la tensió de la corda.
b) Si la corda pot resistir com a màxim una tensió de 2000 N, quina és la màxima càrrega que podem col·locar al punt *D*.



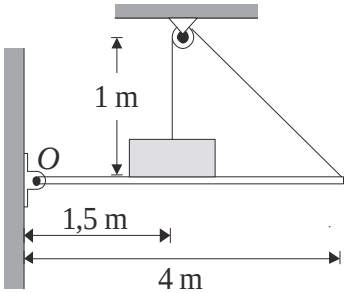
Sol.: $R_{A,x}$=1.200 N, $R_{A,y}$=750 N i R_B =*T*=1.200 N

30. Una biga uniforme de longitud 4 m i massa 10 kg suporta una massa de 20 kg, tal com es veu a la figura.
a) Feu el diagrama de cos lliure de la biga.
b) Trobeu la tensió de la corda i les components de la força de reacció del pivot. Suposeu que hi ha frec entre la paret i la biga.



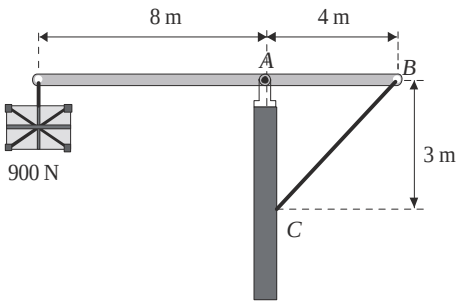
Sol.: *T* = 213 N; R_x = 184 N; R_y = 188 N

31. Una massa de 50 kg descansa sobre una biga de 150 kg, la qual està enganxada a la paret mitjançant una articulació, tal com es veu a la figura. Suposant que el sistema estigui en equilibri, feu el diagrama de cos lliure del pes i de la biga. Justifiqueu per què és necessària la presència del cargol que uneix el bloc amb la barra. Trobeu la tensió de la corda i les components de la força de reacció del pivot.



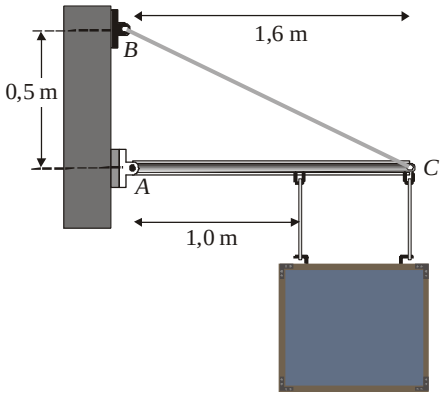
Sol.: *T* = 125,6 kp; R_x = 116,6 kp; R_y = 27,7 kp

32. La barra horitzontal de la figura té una longitud de 12 m i un pes de 600 N. El centre de gravetat coincideix amb el centre geomètric de la barra. La barra està unida a un pilar en el punt *A* a través d'una articulació que permet girar lliurament a la barra. D'un extrem de la barra penja un objecte de pes 900 N. A l'altre extrem, punt B, la barra està unida a una corda. L'altre extrem de al corda està unida al pilar. Determineu la tensió de la corda unida al extrem *B* i la reacció a l'articulació (punt *A*)



Sol.: $R_{A,x}$=2.800 N, $R_{A,y}$=3.600 N i T=3.500 N

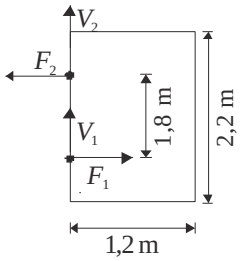
33. La biga de la figura aguanta un rètol de pes 250 N, tal i com està indicat a la figura. La biga està unida per una articulació a la paret (punt A). A l'extrem C de la biga s'ha lligat una corda de massa negligible, l'altre extrem de la corda està lligat a la paret al ganxo B. El pes de la biga és de 150 N.
a) Demostreu que si el centre de gravetat del rètol coincideix amb el seu centre geomètric, llavors la tensió dels dos cables que uneixen el rètol a la biga són iguals. Quin és el valor d'aquesta tensió?
b) Quina és la força que fa l'articulació del punt A?



Nota: les cordes que subjecten el rètol estan col·locades a la mateixa distància del centre del rètol, tal i com s'indica a la figura.

Sol.: *a)* T_1=T_2=125 N, *b)* $R_{A,x}$=890 N i $R_{A,y}$ =122 N

34. Una porta de 60 kg està agafada per dues xarneres, tal com es veu a la figura. Calculeu la força que actua sobre cadascuna de les xarneres suposant que $V_1 = V_2$.



Sol.: 36 kp

35. Una caixa que conté un frigorífic té una massa total de 300 kg i té forma de paral·lelepípede rectangular de 2 m d'alt per 0,8 m x 0,8 m de base. El coeficient de fregament entre la caixa i el terra val 0,30. Si volem arrossegar-la sobre el terra mitjançant l'aplicació d'una força horitzontal, quina ha de ser la magnitud de la força? A quina altura màxima sobre el terra podem aplicar-la sense perill de bolcar?

Sol.: 882 N; 1,33 m

36. La caixa del problema anterior es troba sobre la plataforma d'un camió. Quan el camió frena bruscament, quin risc serà més gran, el de lliscament o el de bolcada de la caixa?

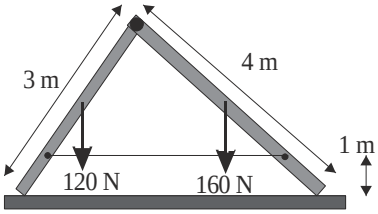
Sol.: Bolcada si $\mu > 0{,}4$; lliscament si $\mu < 0{,}4$

37. La porta d'un garatge pesa 60 kp i està muntada sobre un carril aeri, com s'indica a la figura. Les rodes estan rovellades, de manera que no roden, sinó que llisquen a la guia, i el coeficient de fricció cinètic és 0,4. La distància entre les rodes és de 2 m i cada una dista 50 cm de les vores verticals de la porta. S'empeny la porta mitjançant una força horitzontal F constant, de manera que es mou uniformement. *a)* Si la línia d'acció d'aquesta força dista 1 m de la guia, quina és la força per a cada una de les rodes sobre el carril? *b)* Trobeu la distància màxima a la qual es pot aplicar la força horitzontal F sense que cap roda se separi del carril.

Sol .: F = 24 kp; N_1 = 18 kp, F_{F1} = 7,2 kp; N_2 = 42 kp, F_{F2} = 16,8 kp; 2,5 m

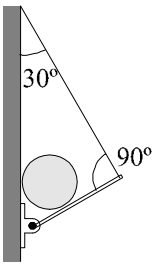
38. Dues barres estan unides entre elles per una aresta mitjançant frontisses i formen un angle recte gràcies al cable horitzontal que les uneix, situat a una altura d'1 m sobre terra. El conjunt està en repòs. Determineu:

a) la força normal que fa el terra sobre cada barra,
b) la tensió del cable,
c) la força que cada barra fa sobre l'altra al vèrtex.



Sol.: *a)* N_1 = 150 N, N_2 = 130 N; *b)* T = 115 N; *c)* F = 120 N

39. Tenim una barra de longitud l = 40 cm i pes 6 kp que per un dels extrems està fixada a la paret mitjançant una articulació i per l'altre extrem està lligada a una corda fixada a la paret i formant un angle de 30º. La tensió màxima que pot aguantar la corda és de 15 kp. Trobeu el pes màxim que pot tenir una esfera de radi 8 cm col·locada sobre la barra sense trencar el fil.



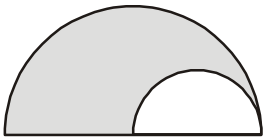
Sol.: $P_{màx}$ = 31 kp

Càlcul del centre de masses

40. Trobeu el centre de masses d'un semicercle de radi R.

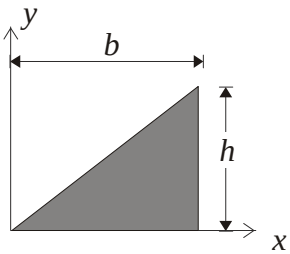
Sol.: $\boldsymbol{r}_{CM} = (0, 4R/3\pi)$ (origen de coordenades al centre del cercle)

41. Trobeu el centre de masses de l'objecte de la figura (semicercle al qual manca una part).

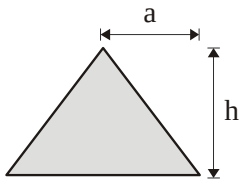


Sol.: $\boldsymbol{r}_{CM} = (-R/6, 14R/9\pi)$ (origen de coordenades al centre del cercle)

42. Trobeu el centre de masses d'un triangle rectangle d'altura h i base b.

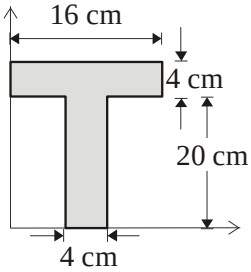


Sol.: $\boldsymbol{r}_{CM} = (2b/3, h/3)$ (origen de coordenades al centre del cercle de la base)



43. Trobeu el centre de masses d'un triangle isòsceles d'altura *h* i base 2*a*.

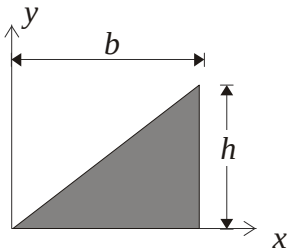
Sol.: $\boldsymbol{r}_{CM}$ = (0, *h*/3) (origen de coordenades al centre de la base)



44. Trobeu el centre de masses de la figura.

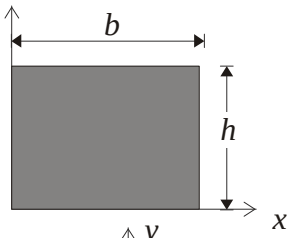
Sol.: $\boldsymbol{r}_{CM}$ = (8, 15,3) cm

Moments de segon ordre



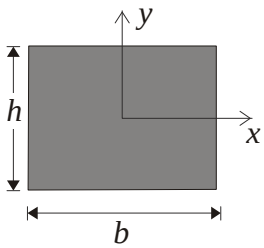
45. Determineu els moments de segon ordre respecte als eixos *x*, *y* i el producte d'inèrcia del triangle de la figura.

Sol.: $I_y = \frac{1}{4}hb^3,\ I_x = \frac{1}{12}bh^3,\ I_{xy} = \frac{1}{8}b^2h^2$



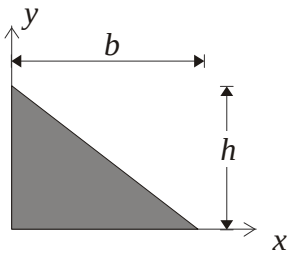
46. Determineu els moments de segon ordre respecte als eixos *x*, *y* i el producte d'inèrcia del rectangle de la figura.

Sol.: $I_y = \frac{1}{3}hb^3,\ I_x = \frac{1}{3}bh^3,\ I_{xy} = \frac{1}{4}b^2h^2$



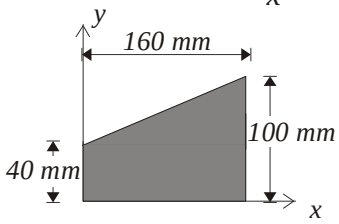
47. Determineu els moments de segon ordre respecte als eixos *x*, *y* i el producte d'inèrcia del rectangle de la figura. Nota: l'origen dels eixos coincideix amb el centre geomètric de la figura.

Sol.: $I_y = \frac{1}{12}hb^3,\ I_x = \frac{1}{12}bh^3,\ I_{xy} = 0$



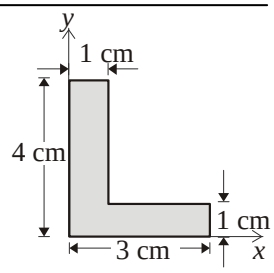
48. Determineu els moments de segon ordre respecte als eixos *x*, *y* i el producte d'inèrcia del triangle de la figura.

Sol.: $I_y = \frac{1}{12}hb^3,\ I_x = \frac{1}{12}bh^3,\ I_{xy} = \frac{1}{24}b^2h^2$



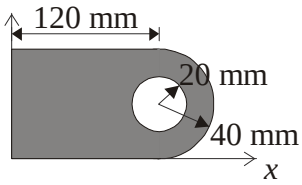
49. Determineu el moment de segon ordre respecte a l'eix *y* de la superfície de la figura.

Sol.: 1,16 10^{-4} m^4



50. Determineu el moment de segon ordre respecte als eixos *x*, *y* i el producte d'inèrcia de la superfície de la figura.

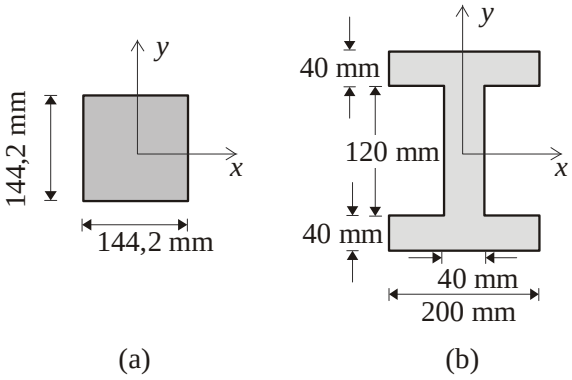
Sol.: $I_x = 22\ \text{cm}^4$, $I_y = 10\ \text{cm}^4$, $I_{xy} = 6\ \text{cm}^4$



51. Determineu el moment de segon ordre i el radi de gir respecte a l'eix *y* de la superfície de la figura. Nota: el moment de segon ordre respecte d'un eix que passa pel centre d'un cercle de radi *r* és $\frac{1}{4}\pi r^4$, el moment de segon ordre d'un semicercle de radi *r* respecte d'un eix paral·lel a la base del semicercle i que passa pel centre geomètric d'aquest és $\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) r^4$, i el centre geomètric està a una distància $\frac{4r}{3\pi}$ de la base.

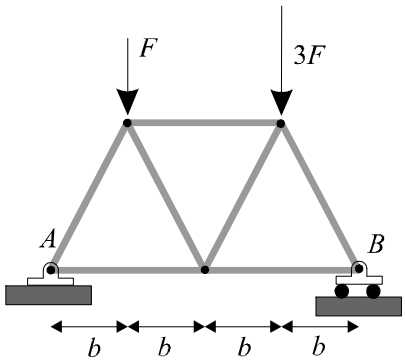
Sol.: $I_y = 7{,}530\ 10^{-5}\ \text{m}^4$, $k_y = 83{,}3$ mm

52. Determineu l'àrea i el moment de segon ordre respecte a l'eix *x* de les dues superfícies de la figura. Nota: l'origen dels eixos coincideix amb el centre geomètric de les figures.



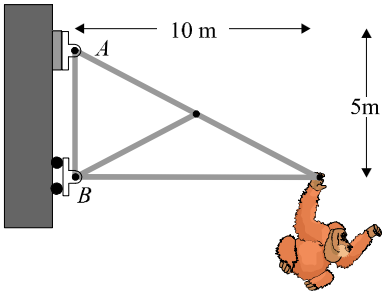
Sol.: *a)* $0{,}0208\ \text{m}^2$, $3{,}60\ 10^{-5}\ \text{m}^4$; *b)* $0{,}0208\ \text{m}^2$, $11{,}03\ 10^{-5}\ \text{m}^4$

Estructures



53. L'estructura de la figura té un suport de passador en *A* i un rodet en *B*. Determineu les reaccions als suports.

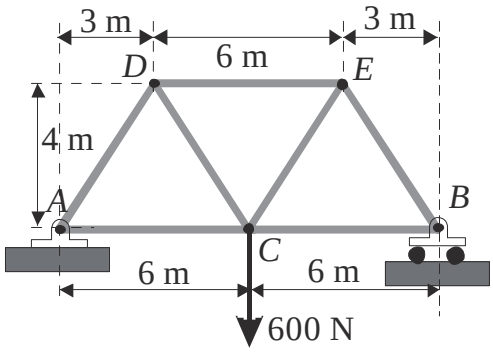
Sol.: $A_x = 0$, $A_y = 3/2F$ i $B = 5/2F$



54. El pes del mico penjat és de 1.000 N. Si negligim el pes dels elements de l'estructura, determineu les reaccions als suports *A* i *B*. Nota: el suport en *A* és un passador i en *B*, un rodet.

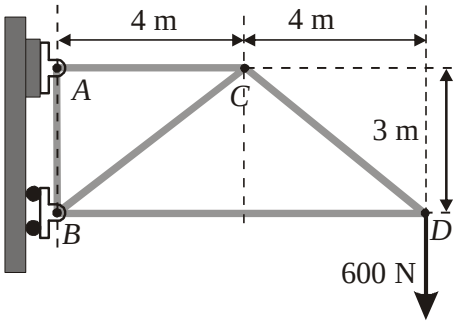
Sol.: $A_x = -2.000$ N, $A_y = 1.000$ N i $B = 2.000$ N

55. Si negligim el pes dels elements de l'estructura. Determineu:
a) les reaccions en els suports *A* i *B* (el suport en *A* es una articulació i en *B* un rodet)
b) la tensió de les barres *AC*, *AD* i *CD*, i indica si les barres estan sotmeses a tensions de tracció o compressió.



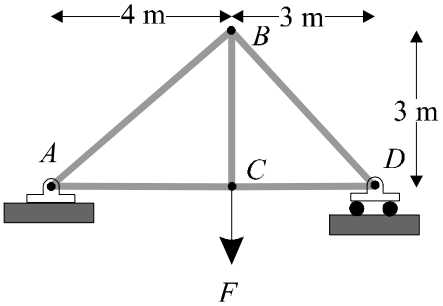
Sol.: T_{AC} = 225 N (t), T_{AD} = 375 N (c), T_{CD} = 375 N (t).

56. Si negligim el pes dels elements de l'estructura. Determineu: *a)* les reaccions en els suports *A* i *B* (el suport en *A* es una articulació i en *B* un rodet), i *b)* la tensió de les barres *AC*, *BD*,i *CD*, i indica si les barres estan sotmeses a tensions de tracció o compressió.



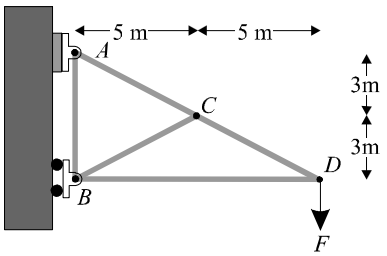
Sol.: *a)* A_x = 1.600 N, A_y = 600 N i *B* = 1.600 N; b) T_{AB} = 600 N (t), T_{AC} = 1.600 N (t), T_{BC} = 1.000 N (c),T_{BD} = 800 N (c) i T_{CD} = 1.000 N (t).

57. Determineu les forces axials a les barres de l'estructura de la figura. El valor de la força *F* és de 600 N.



Sol.: T_{AB} = 429 N (c), T_{AC} = T_{CD} = 343 N (t), T_{BC} = 600 N (t) i T_{BD} = 485 N (c)

58. Si les barres de l'armadura dibuixada poden aguantar amb seguretat 10.000 N de tensió i 2.000 N de compressió, determineu la càrrega màxima que podem aplicar al punt *D*.



Sol.: $F_{màx}$ = 1.200 N

3. Elasticitat

Objectius:

Què és un cos deformable? Conceptes d'esforç i deformació
Descriure el diagrama esforç-deformació
Què són el mòdul de Young i el coeficient de Poisson?
Què és un material dúctil? I un material rígid? I un material resistent?
Què és el mòdul de cisallament o torsió?
Què és el mòdul de compressibilitat?

Cossos deformables

El sòlid rígid és un concepte ideal, se suposa que no canvia de forma ni grandària quan l'objecte està sotmès a tensions.

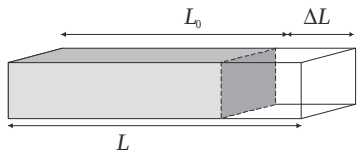
Cos deformable:

Un cos sotmès a forces pot canviar la forma, el volum i fins i tot pot produir-se la ruptura del material.

Les característiques d'un objecte són determinades per l'estructura del material. Tot i que l'estudi detallat d'aquestes propietats és complex, hi ha un seguit de relacions fenomenològiques que ens permetran, per exemple, calcular la deformació dels diferents elements d'una estructura.

En aquest capítol ens limitarem a establir un contacte primerenc amb els conceptes fonamentals de les propietats mecàniques dels materials.

Esforç i deformació



Elongació: $\Delta L \equiv L - L_0$

Deformació unitària:

$$\varepsilon_l = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\Delta L}{L_0}$$

unitats: $\frac{\text{m}}{\text{m}} = \frac{\text{milla}}{\text{milla}} = \frac{\text{km}}{\text{km}} = 1$, és adimensional

Deformació en %: $\varepsilon(\%) = \frac{L - L_0}{L_0} \times 100 = \varepsilon \times 100$

Exemple: Calculeu ε i $\varepsilon(\%)$ si una proveta s'ha deformat 3,2 mm per metre.

$$\left.\begin{array}{l} L_0 = 1\,\text{m} \\ L = 1 + 3{,}2 \cdot 10^{-3} \end{array}\right\} L - L_0 = 3{,}2 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

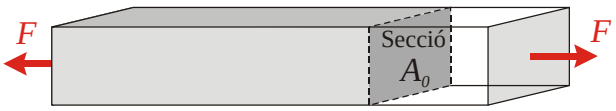
$$\varepsilon_l = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{3{,}2 \cdot 10^{-3}\,\text{m}}{1\,\text{m}} = 3{,}2 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_l(\%) = 3{,}2 \cdot 10^{-3} \times 100 = 3{,}2 \cdot 10^{-1}\ \% = 0{,}32\ \%$$

Quan apliquem una força, aquesta es distribueix uniformement al llarg de la secció.

Es defineix com esforç o tensió normal a la força per unitat d'àrea:

$$\sigma_l = \frac{F}{A_0}$$



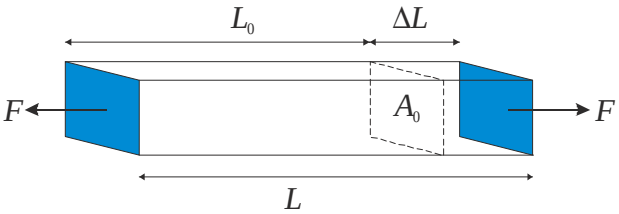
- Les unitats de l'esforç són les unitats d'una força per unitat d'àrea, coincideixen amb les unitats de pressió, en SI: $\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$ (pascal)

  Gigapascal: 1 GPa = 10^9 Pa
  Megapascal: 1 MPa = 10^6 Pa
  Kilopascal: 1 kPa = 10^3 Pa

- Si una peça té una secció doble, cal aplicar el doble de força per assolir la mateixa deformació; llavors, per calcular la deformació que pateix un cos és més adient utilitzar l'esforç en lloc de la força.
- Noteu que la força és perpendicular a la secció.

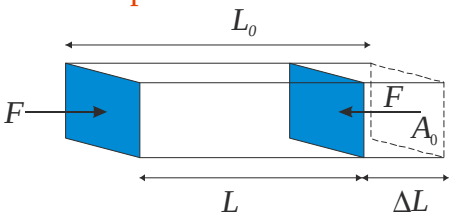
D'altra banda, si l'esforç és de tracció, tal com està representat a la figura, l'elongació és positiva i el material s'allarga. Al contrari, quan l'esforç és de compressió, el material s'encongeix.

Tracció



$F, \sigma_l, \Delta L$ i $\varepsilon_l > 0$

Compressió



$F, \sigma_l, \Delta L$ i $\varepsilon_l < 0$

Exemple: Una massa de 2,56 kg penja de l'extrem d'una barra d'acer de 2 mm de radi. Calculeu l'esforç que suporta la barra.

$$A_0 = \pi r^2 = 3{,}14 \times 2^2\ \text{mm}^2 \times \left(\frac{10^{-3}\ \text{m}}{1\text{mm}}\right)^2 = 12{,}56 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2$$

$$\sigma = \frac{F}{A_0} = \frac{2{,}56\ \text{kg} \times 9{,}81\ \text{m/s}^2}{12{,}56 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2} = 2{,}0 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 2{,}0\ \text{MPa}$$

Observació: Tot i que hem dit que la barra és d'acer, l'esforç seria el mateix per a qualsevol material. El que seria diferent seria la deformació.

Diagrama esforç-deformació. Llei de Hooke

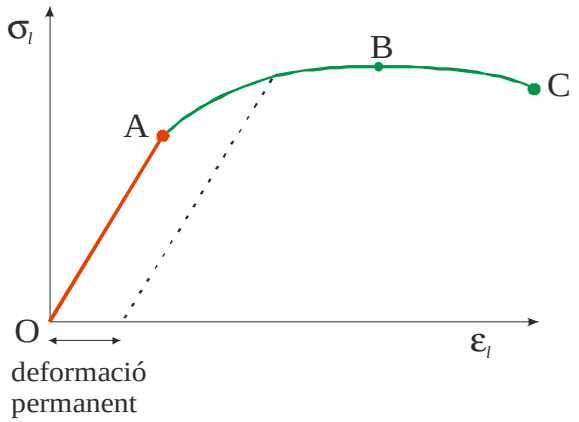


Diagrama genèric

OA: Deformació elàstica lineal o proporcional. Un cop desapareix σ_l l'objecte recupera la forma inicial.

Lineal: $\sigma_l \propto \varepsilon_l$

Llei de Hooke: $\sigma_l = Y \cdot \varepsilon_l$

L'esforç i la deformació són proporcionals. La constant de proporcionalitat, *Y*, és característica de cada material i s'anomena:

mòdul de Young
mòdul elàstic
mòdul de rigidesa

Unitats: les mateixes que σ_l, Pa.

A: <u>Límit elàstic,</u> correspon a la tensió màxima que es pot aplicar al material sense provocar deformacions permanents (plàstiques).

AC: Zona de comportament plàstic.
Quan es deixa d'aplicar la tensió el material no recupera la seva forma original: apareixen deformacions permanents.
En aquesta zona hi ha també deformació elàstica.
ε_l creix ràpidament amb σ_l. En els materials dúctils la deformació màxima pot ser molt gran (~20 al 40%). Aquesta propietat es fa servir per donar forma als materials.
En els materials fràgils no hi ha la zona *AC*, el material es trenca en zona elàstica, és a dir, es trenca sense que s'hagi deformat plàsticament.

B: Resistència, és la tensió màxima que es pot aplicar a un material sense provocar-ne la ruptura.

C: En aquest punt es produeix la ruptura del material.

En general, la resistència del material a la tracció és diferent a la resistència del material a la compressió. En els materials ceràmics la resistència a la compressió és molt més gran que a la tracció (típicament un factor 10).

Mòduls d'elasticitat: mòdul de Young i coeficient de Poisson

Llei de Hooke:

$$\sigma_l = Y \cdot \varepsilon_l \quad \leftrightarrow \quad \varepsilon_l = \frac{1}{Y}\sigma_l$$

El mòdul de Young caracteritza la resposta elàstica d'un material: com més gran és Y, més petita és la deformació.

Exemple: Calculeu la deformació i l'elongació de tres barres de 0,5 m de longitud sotmeses a l'esforç de l'exemple anterior.

a) Barra d'acer, Y = 207 GPa
b) Barra de plàstic, $Y \approx 1$ GPa
c) Barra de vidre, Y = 75 GPa

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma}{Y} = \frac{2{,}0 \cdot 10^6\ \text{Pa}}{207 \cdot 10^9\ \text{Pa}} = \frac{2{,}0}{207 \cdot 10^3} = 1 \cdot 10^{-5}$$

$$\Delta L_a = \varepsilon_a \cdot L_0 = 1 \cdot 10^{-5} \cdot 0{,}5\ \text{m} = 5{,}0 \cdot 10^{-6}\ \text{m} = 5\,\mu\text{m}$$

$$\varepsilon_b = \frac{\sigma}{Y} = \frac{2{,}0 \cdot 10^6\ \text{Pa}}{1 \cdot 10^9\ \text{Pa}} = 2 \cdot 10^{-3}, \Delta L_b = \varepsilon_b \cdot L_0 = 1{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{m} = 1{,}0\ \text{mm}$$

$$\varepsilon_c = \frac{\sigma}{Y} = \frac{2{,}0 \cdot 10^6\ \text{Pa}}{75 \cdot 10^9\ \text{Pa}} = 0{,}27 \cdot 10^{-4},\ \Delta L_c = \varepsilon_c \cdot L_0 = 0{,}013\ \text{mm}$$

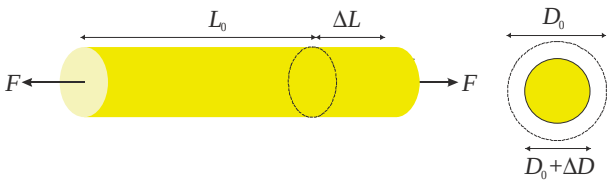
Observacions: – Quan $Y\uparrow$ les deformacions són menors. És a dir, el material és més rígid.
– Els plàstics són menys rígids que els metalls i les ceràmiques.

Material	**Mòdul de Young [GPa]**	**Límit d'elasticitat [10^7 Pa]**	**Ruptura a la tracció [10^7 Pa]**	**Ruptura a la compressió [10^7 Pa]**
Acer	**200**	**30**	**52**	**52**
Alumini	**70**	**18**	**20**	
Coure	**120**	**20**	**40**	
Llautó	**90**		**37**	
Quars	**70**			
Granit	50			20
Ferro forjat	190	17	33	
Os tracció	16		12	
Os compressió	9			17
Rajol	20			4
Formigó	23		0,2	1,7
Fusta	6–22	2,5–8	5	20
Marbre	60			20
PVC	2,41–4,14	3,5–5,2	4,1	6,5
Poliestirè	2,28–3,28	2,9–5,6	3,6	5,6

Vidre, quars fos	73	5	110
Plom	16	1,2	

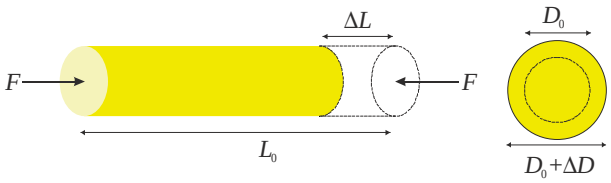
Quan s'aplica una tensió de tracció s'observa que el material s'allarga (dilatació longitudinal), però s'aprima (contracció en el pla perpendicular), i viceversa, quan apliquem un esforç de compressió el material s'escurça i s'eixampla:

Tracció



σ_l, ΔL i $\varepsilon_l > 0$ i $\Delta D<0$

Compressió



σ_l, ΔL i $\varepsilon_l < 0$ i $\Delta D>0$

Deformació unitària transversal: $\varepsilon_D = \dfrac{\Delta D}{D_0}$

Coeficient de Poisson: $\mu = -\dfrac{\varepsilon_D}{\varepsilon_l}$, unitats: adimensional

Així doncs, atesa $\sigma_l \overset{Y}{\Rightarrow} \varepsilon_l \overset{\mu}{\Rightarrow} \varepsilon_D$

Per exemple:

$\mu_{acer} = 0{,}28$

$\mu_{alumini} = 0{,}34$

Pel mateix ε_l la contracció és més gran per a l'alumini que per a l'acer.

Quan apliquem un esforç de tracció, el material s'allarga, però s'aprima. Què passa amb el seu volum, augmenta o disminueix? La resposta ens la dóna el coeficient de Poisson:

$$V = \pi L\left(\frac{D}{2}\right)^2$$

Variació del volum:

$$\ln V = \ln\left(\pi L\left(\frac{D}{2}\right)^2\right) = \ln\pi + \ln L + \ln\left(\frac{D}{2}\right)^2 = n\pi + \ln L + 2\ln\frac{D}{2} = \ln\pi + \ln L + 2\ln D - 2\ln 2$$

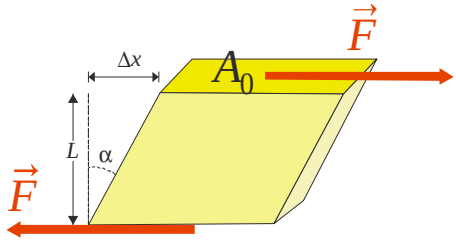
$$\frac{dV}{V} = 0 + \frac{dL}{L} + 2\frac{dD}{D} - 0 \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L}{L} + 2\frac{\Delta D}{D} \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_l + 2\varepsilon_D = \varepsilon_l\left(2\frac{\varepsilon_D}{\varepsilon_l} + 1\right) = \varepsilon_l(1 - 2\mu)$$

Conclusió: $\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_l(1 - 2\mu)$

Per tant:

- si $\mu < 0{,}5$, $\Delta V > 0 \rightarrow V\uparrow$
- en canvi, si $\mu > 0{,}5$, $\Delta V < 0 \rightarrow V\downarrow$

Cisallament. Mòdul de cisallament o torsió



La tensió és paral·lela a la superfície.

Tensió de cisallament:

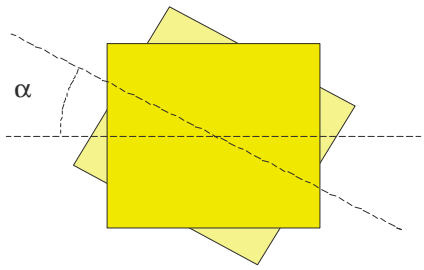
$$\sigma_\alpha = \frac{F}{A_0}$$

Les unitats de l'esforç de cisallament són en SI: $\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$ (pascal).

Deformació unitària de cisallament:

$\varepsilon_\alpha = \frac{\Delta x}{L} = \text{tg}\,\alpha \approx \alpha$, si α en radians (1 radian = 180º).

ε_α és adimensional.

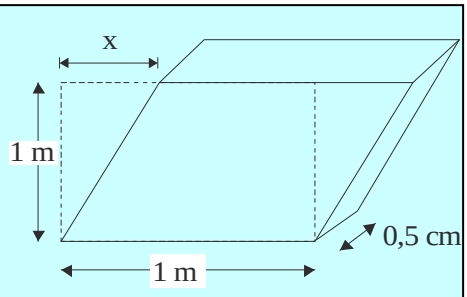


Mòdul de cisallament: $G = \frac{\sigma_\alpha}{\varepsilon_\alpha}$, unitat: Pa

També s'aplica a les torsions:

Acer: $G = 84\ 10^9$ Pa
Alumini: $G = 26{,}5\ 10^9$ Pa

Exemple: Tenim una làmina quadrada de llautó d'1 m de costat i 0,5 cm de gruix. Quina força tangencial F s'ha d'aplicar sobre cadascun dels costats si el desplaçament x de la figura és de 0,01 cm?
El mòdul de cisallament del llautó és de 0,36 10^{11} N/m^2.

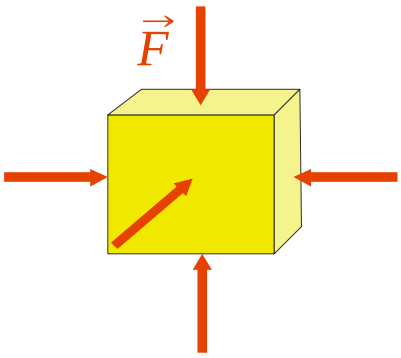


$$\varepsilon_\alpha = \alpha \approx \mathrm{tg}\alpha = \frac{x}{l} = \frac{0{,}01\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{m}} = 1\cdot 10^{-4}$$

$$G = \frac{\sigma}{\varepsilon_\alpha} \Rightarrow \sigma = G\cdot\varepsilon_\alpha = 0{,}36\cdot 10^{11}\,\mathrm{Pa}\cdot 1\cdot 10^{-4} = 36\cdot 10^{5}\ \mathrm{Pa}\,,$$

$$F = \sigma\cdot A = 36\cdot 10^{5}\,\mathrm{Pa}\cdot(1\,\mathrm{m}\cdot 0{,}5\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}) = 1{,}8\cdot 10^{4}\ \mathrm{N}$$

Mòdul de compressibilitat



La tensió està aplicada sobre tota la superfície i és perpendicular a la superfície. Per exemple, sòlids submergits.

La força per unitat d'àrea és la pressió:[1]

$p = \dfrac{F}{A}$, unitat: Pa

Mòdul de compressibilitat:

$B = -\dfrac{p}{\Delta V/V}$, unitat: Pa

El signe "–" s'ha introduït per definir el mòdul de compressibilitat positiu: $p\uparrow \rightarrow V\downarrow$.

Coeficient de compressibilitat:

$\beta = \dfrac{1}{B} = -\dfrac{\Delta V/V}{p}$, unitat: 1/Pa

Les unitats permeten distingir entre el mòdul de compressibilitat i el coeficient de compressibilitat.

[1] El concepte de pressió es descriu en detall al tema 4.

Exemple: El volum d'oli contingut en una premsa hidràulica és de 135 litres. Calculeu la disminució del volum d'oli si està sotmès a una pressió de 145 kp/cm^2. El coeficient de compressibilitat de l'oli és de 20 10^{-6} atm^{-1}.

$$\beta = 20 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{atm}} \cdot \frac{1\,\text{atm}}{101325\,\text{Pa}} = 1{,}974 \cdot 10^{-10}\ \text{Pa}^{-1}$$

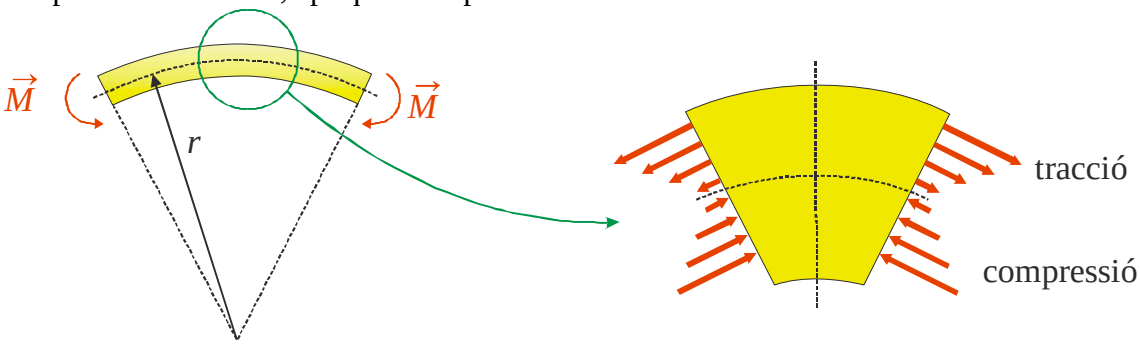
$$V = 1.35\,\text{l} \cdot \frac{1\,\text{m}^3}{1000\,\text{l}} = 0{,}135\ \text{m}^3$$

$$p = 145 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \cdot \frac{9{,}81\ \text{N}}{1\,\text{kp}} \cdot \left(\frac{100\ \text{cm}}{1\,\text{cm}}\right)^2 = 1{,}478 \cdot 10^7\ \text{Pa}$$

$$\beta = -\frac{\Delta V / V}{p} \Rightarrow \Delta V = -p\beta V = 3{,}7910^{-4}\,\text{m}^3 = 0{,}379\ \text{l}$$

Flexió de barres

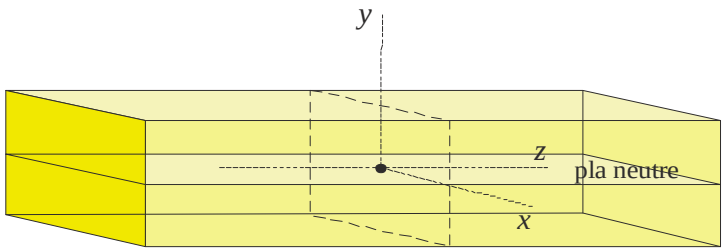
Per provocar la flexió, apliquem un parell de forces: moment flector.



A la part superior, el material està sotmès a tracció; a la part inferior, a compressió, i al pla que passa pel centre de gravetat de la secció, pla neutre, la tensió és nul·la.

Com més lluny de l'eix neutre, més intens és el moment i, per tant, més gran és la tensió aplicada. Llavors, la resistència a la flexió depèn de la rigidesa del material i de la forma de la secció transversal. En particular, com més material hi hagi lluny de l'eix neutre, la resistència serà més elevada:

$$M = Y\frac{I_x}{r} \Rightarrow r = \frac{YI_x}{M}$$



És a dir:

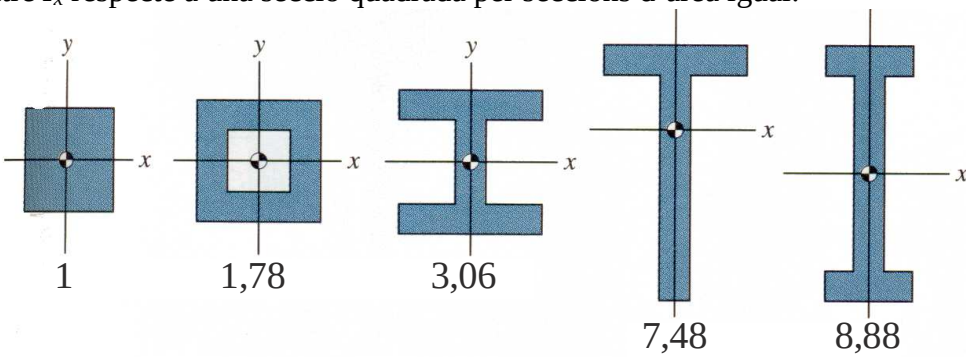
$$\frac{1}{r} = \frac{M}{YI_x}$$

I_x és el moment de segon ordre respecte a l'eix x que passa pel centre de gravetat (està contingut al pla neutre). I_x és una mitjana de les distàncies dels punts de la secció respecte al pla neutre.

YI_x és la resistència a la flexió: $R \equiv YI_x$.

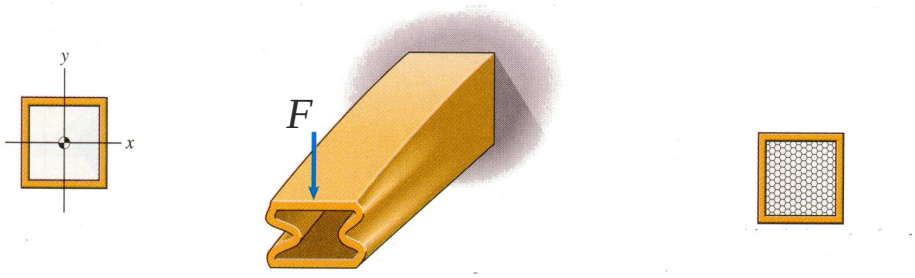
Si $YI_x\uparrow \rightarrow r\uparrow$, com més gran és el radi de curvatura, més plana és la barra, és a dir, menys es deforma.
La deformació és inversament proporcional a YI_x.

Raó entre I_x respecte a una secció quadrada per seccions d'àrea igual:



És a dir, que per a la mateixa càrrega, material i quantitat de material, la flexió que patirà una biga amb el darrer perfil serà unes 9 vegades inferior que si la biga tingués secció quadrada, o el que és equivalent, si fem servir el darrer perfil podem fer una biga que es comporta de manera equivalent amb 9 vegades menys material.

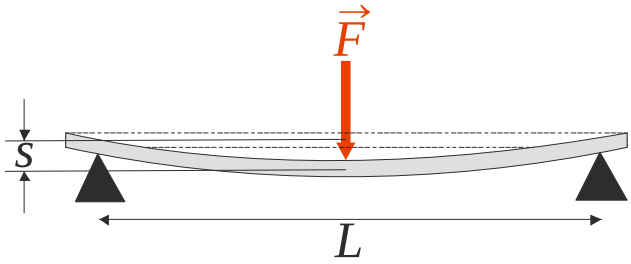
Hi ha un límit a fer I_x indefinidament gran, és el vinclament:



Fletxa per a dos casos particulars:

Biga doblement recolzada:

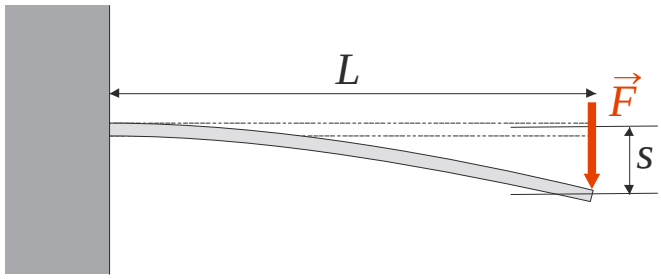
$$s = \frac{L^3}{384(YI_x)}(5 \cdot P + 8 \cdot F)$$



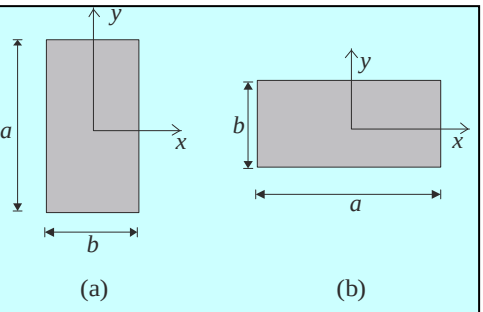
P: pes de la biga

Biga encastada:

$$s = \frac{L^3}{24(YI_x)}(3 \cdot P + 8 \cdot F)$$



Exemple 1: Atesa una biga de secció rectangular de costats *a* i *b*: *a)* Compareu la relació entre la resistència a la flexió de la biga recolzada verticalment (figura a) i horitzontalment (figura b). *b)* Quant val aquesta relació en el cas particular que $a = 3b$?



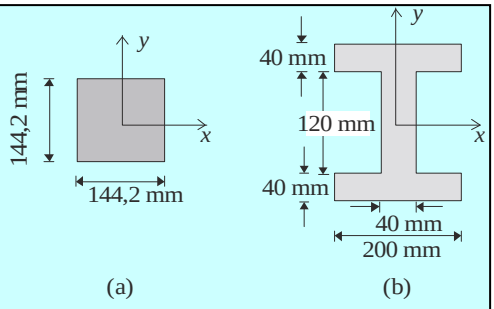
a)

$$\left.\begin{aligned} R_a &= YI_{x,a} = Y\frac{1}{12}ba^3 \\ R_b &= YI_{x,b} = Y\frac{1}{12}ab^3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{R_a}{R_b} = \frac{ba^3}{ab^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

b)

$$\frac{R_a}{R_b} = \left(\frac{3b}{b}\right)^2 = 9$$

Exemple 2: Els perfils de les dues bigues de la figura tenen la mateixa secció (0,0208 m^2), però moments de segon ordre diferents respecte a l'eix *x* (I_a = 3,6 10^{-5} m^4 i I_b = 11,04 10^{-5} m^4). (Vegeu el problema 52 del tema 2.)



Les dues bigues s'encasten a una paret, tenen una longitud igual a 4 m, estan fetes d'acer i a l'extrem de cadascuna es penja una massa de 200 kg. Quina és la fletxa a l'extrem de cada biga?

Dades: mòdul de Young de l'acer = 20 10^{10} N/m^2, densitat de l'acer = 7,82 g/cm^3

a)

$$P = V\rho g = LA\rho g = 4\,\text{m}\ 0{,}0208\,\text{m}^2\ 7{,}82\times10^3\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\ 9{,}81\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}} = 6.376\ \text{N}$$

$$s = \frac{L^3}{24(YI_x)}(3\cdot P + 8\cdot F) =$$

$$= \frac{4^3\ \text{m}^3}{24(20\times10^{10}\ \text{N/m}^2 3{,}6\times10^{-5}\ \text{m}^4)}(3\cdot 6.376 + 8\cdot 200\cdot 9{,}81)\text{N} = 0{,}013\ \text{m}$$

b)

$$s = \frac{L^3}{24(YI_x)}(3\cdot P + 8\cdot F) =$$

$$= \frac{4^3\ \text{m}^3}{24(20\times10^{10}\ \text{N/m}^2\ 11\times10^{-5}\ \text{m}^4)}(3\cdot 6.376 + 8\cdot 200\cdot 9{,}81)\text{N} = 4{,}2\ 10^{-3}\text{m}$$

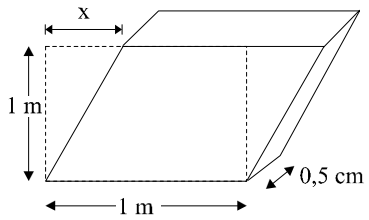
Qüestions del tema 3

Mòduls d'elasticitat

1. En un experiment per mesurar el mòdul de Young d'un cert acer, una massa de 500 kg suspesa d'un fil d'acer de 3 m de longitud i 0,20 cm^2 de secció va produir un estirament de 0,4 cm respecte a la seva longitud abans d'haver estat carregada. Avalueu la tensió, la deformació unitària i el valor del mòdul de Young per a aquest acer.

Sol.: 2,45 10^8 N/m^2; 1,3 10^{-3}; 1,8 10^{11} N/m^2

2. Tenim una làmina quadrada de llautó d'1 m de costat i 0,5 cm de gruix. Quina força tangencial *F* s'ha d'aplicar sobre cadascun dels costats si el desplaçament *x* de la figura és de 0,01 cm?
   El mòdul de cisallament del llautó és de 0,36 10^{11} N/m^2.



Sol.: 1,8 10^4 N

3. Atès un fil d'acer que penja verticalment i amb les característiques següents: longitud = 3 m; secció normal = 6,25 mm^2; mòdul de Young = 21 10^{10} N/m^2; mòdul de cisallament = 8 10^{10} N/m^2; límit de proporcionalitat = 42 10^7 N/m^2; tensió de ruptura = 84 10^7 N/m^2, avalueu:
   a) la càrrega màxima abans de superar el límit d'elasticitat.
   b) l'allargament que patirà quan s'assoleixi el límit d'elasticitat.
   c) la càrrega màxima abans de la ruptura.

Sol.: *a)* 2.625 N; *b)* 6 10^{-3} m; *c)* 5.250 N

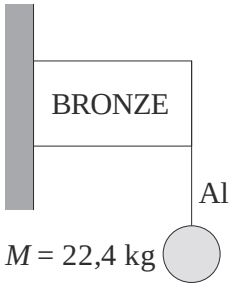
4. Una corda de niló utilitzada pels alpinistes s'allarga 1,5 m sota l'acció del pes d'un muntanyenc de massa 80 kg. Si la corda té una longitud inicial de 50 m i una secció de 9 mm de diàmetre:
   a) Quin és el mòdul de Young d'aquest material?
   b) Si el coeficient de Poisson per al niló és de 0,2, calculeu la variació del diàmetre sota aquesta tensió.

Sol.: *a)* 4,1 10^8 N/m^2; *b)* 0,054 mm

5. Un objecte de 13,4 kg de massa està subjecte per un cable d'acer d'1,33 m de longitud i amb una secció transversal d'1,63 mm^2. Calculeu: *a)* la tensió del cable, *b)* la deformació unitària del cable i *c)* l'increment de longitud del cable. Mòdul de Young de l'acer = 20 10^{10} N/m^2.

Sol.: *a)* 80,56 10^6 N/m^2; *b)* 4 10^{-4} ; *c)* 0,536 mm

6. Un bloc de 22,4 kg de massa es penja d'un cub de bronze de 85 mm de costat mitjançant un cable d'alumini de 750 mm de longitud i amb una secció de 18,2 mm de diàmetre. Calculeu: *a)* la tensió de l'alumini i *b)* la tensió al bronze suposant que el bronze està sota l'acció d'una tensió de cisallament pura.



Sol.: *a)* 844 kPa; *b)* 30 kPa

7. Tenim un tub d'acer de 4 m de llargada, radi exterior 1,2 cm i radi interior 1 cm. El tub es disposa verticalment i del seu extrem penja una càrrega de 10.000 N.
   a) Aquesta càrrega provocarà deformacions permanents en el tub? Raona la resposta.
   b) Quin allargament del tub provoca aquesta càrrega?
   Si el tub es disposa horitzontalment, i si se li aplica una tensió de torsió de 5 10^6 Pa
   c) Quina és la torsió que pateix la barra?

Dades de l'acer: Mòdul de Young = 21 10^{10} N/m^2; Mòdul de cisallament 8 10^{10} N/m^2; Límit elàstic = 42 10^7 N/m^2; Tensió de ruptura = 84 10^7 N/m^2.

Sol.: *a)* No; *b)* 1,38 mm; *c)* 6,25 10^{-5} rad.

8. El volum d'oli contingut en una premsa hidràulica és de 135 litres. Calculeu la disminució del volum d'oli si està sotmès a una pressió de 145 kp/cm^2.

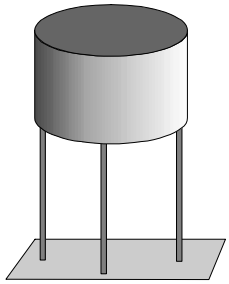
El coeficient de compressibilitat de l'oli és de 20 10^{-6} atm^{-1}.

Sol.: 0,379 litres

9. Donada una barra d'acer massissa de 2 m de llargada i 9 mm^2 de secció, calculeu:
   a) quina força a tracció cal aplicar per que la seva longitud augmenti en 0,1 mm.?
   b) quina és la màxima força a tracció que podem aplicar sense provocar deformacions permanents?
   c) quina és la màxima força a tracció que podem aplicar sense provocar la seva ruptura?
   Dades de l'acer: Mòdul de Young = 21 10^{10} N/m^2; Mòdul de cisallament 8 10^{10} N/m^2; Límit elàstic = 42 10^7 N/m^2; Tensió de ruptura = 84 10^7 N/m^2.

Sol.: *a)* 100 N; *b)* 3780 N i *c)* 7560 N.

10. Tres tubs verticals d'acer de 10 m de longitud aguanten un dipòsit d'aigua. Els radis interior i exterior dels tubs són 15 cm i 17 cm, respectivament. El dipòsit s'ha dissenyat de manera que la tensió sobre els tubs no superi els 10^8 N/m^2. *a)* Esbrineu el volum màxim d'aigua que es pot emmagatzemar al dipòsit d'aigua (suposeu que el pes del dipòsit és negligible respecte al de l'aigua continguda). La densitat de l'aigua és 1.000 kg/m^3. *b)* Quina longitud s'encongiran els tubs quan el dipòsit contingui la càrrega màxima d'aigua?

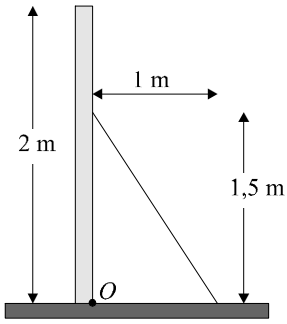


Sol.: *a)* 615,5 m^3; *b)* 0,005 m

11. El límit elàstic d'un cable d'acer és $2{,}4 \cdot 10^8$ Pa i la seva secció transversal és 1,2 cm^2.
    a) Calculeu el pes màxim de un ascensor que pengi del cable de manera que la tensió no superi 1/3 del límit elàstic.
    b) Calculeu l'acceleració màxima cap a dalt que pot donar-se a un ascensor de 900 kg sense que la tensió del cable superi 1/3 del límit elàstic.

Sol.: 9.600 N m, 0,87 m/s^2.

12. La força que fa el vent sobre una paret de plàstic, de pes menyspreable, d'un hivernacle es pot calcular amb l'expressió $F = Bv^2$, on v és la velocitat del vent, B és una constant de valor 4 Ns^2/m^2. Aquesta força es reparteix a la superfície de la paret, però cal tractar-la com si fos aplicada al centre de masses. La paret pot pivotar entorn a l'eix que passa per O. Per impedir que la paret caigui a terra, està suportada per un tensor. En un moment donat bufa un vent de 10 km/h perpendicular a la paret. *a)* Quina tensió suporta el cable? *b)* Si el tensor és de niló, que té un límit de ruptura de 55 GPa, i el diàmetre de la secció és 1 mm, quin vent màxim pot suportar sense trencar-se?



Sol.: *a)* 37,10 N; *b)* 341 km/h

Flexió de barres

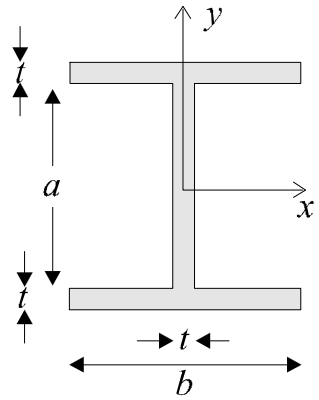
13. Un estudiant d'Enginyeria Agrònoma creu que podrà augmentar el seu èxit entre les dones tornant-se més fort. Per això decideix de penjar una barra cilíndrica del sostre de casa seva per poder fer flexions de braços. Per tal de subjectar la barra compra dos suports que van clavats al sostre mitjançant dos cargols cadascun.
    a) Quina secció mínima hauran de tenir aquests cargols d'acer per evitar que l'estudiant caigui per terra fent les flexions?
    b) Quin serà l'augment de longitud dels cargols quan l'estudiant faci les flexions si ha escollit uns cargols de secció 1 mm^2?
    c) Quina és la fletxa de flexió quan l'estudiant està penjat si la relació entre la fletxa s i la força F normal aplicada al centre de la barra és:

$$s = \frac{L^3}{384\ Y\ I}\ (\ 5W\ +\ 8\,F\ )$$

on L és la distància entre els suports, Y el mòdul de Young, I el moment de segon ordre de la secció de la barra respecte a un eix horitzontal que passa pel centre de masses i W el pes de la barra.
Dades: pes de la barra = 25 kp, diàmetre de la secció de la barra = 2 cm, pes de l'estudiant = 90 kp, pes d'un suport = 2,5 kp, mòdul de Young de l'acer = $20\ 10^{10}$ N/m^2, límit de ruptura de l'acer = $50\ 10^7$ N/m^2, longitud del cargol = 2 cm i distància entre els suports = 1 m

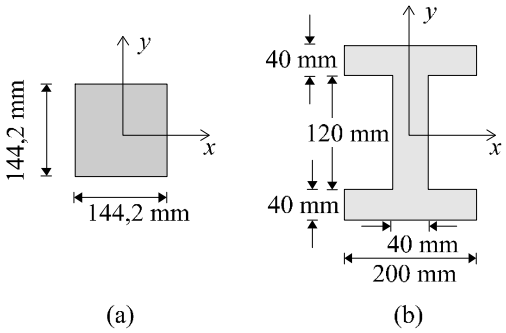
Sol.: $S_{mín}$ = 0,6 mm^2; $2{,}9\ 10^{-5}$ m; 0,014 m

14. Suposeu que la biga en I de la figura es gira 90º respecte al seu eix longitudinal, de manera que la I esdevé una H. *a)* Demostreu que el moment de segon ordre de la biga en I respecte a l'eix x és $\frac{1}{2}ba^2t+\frac{1}{12}a^3t$ quan $t << a, b$. *b)* Demostreu que el moment de segon ordre de la biga en H respecte a l'eix x és $\frac{1}{6}b^3t$ quan $t << a, b$. *c)* Calculeu la relació que hi ha entre les fletxes de la biga col·locada en I i en H quan $a = b$.



Sol.: fletxa de la biga en H = 3,5 vegades de la fletxa de la biga en I

15. Tal com s'ha vist al problema 52 del tema anterior, els perfils de les dues bigues de la figura tenen la mateixa secció (0,0208 m^2), però moments de segon ordre diferents respecte a l'eix x (I_a = 3,6 10^{-5} m^4 i I_b = 11,04 10^{-5} m^4). Les dues bigues s'encasten a una paret, tenen una longitud igual a 4 m, estan fetes d'acer i a l'extrem de cadascuna es penja una massa de 200 kg. Quina és la fletxa a l'extrem de cada biga?
Dades: mòdul de Young de l'acer = 20 10^{10} N/m^2, densitat de l'acer = 7,82 g/cm^3



Sol.: s_a = 12,892 mm i s_b = 4,204 mm

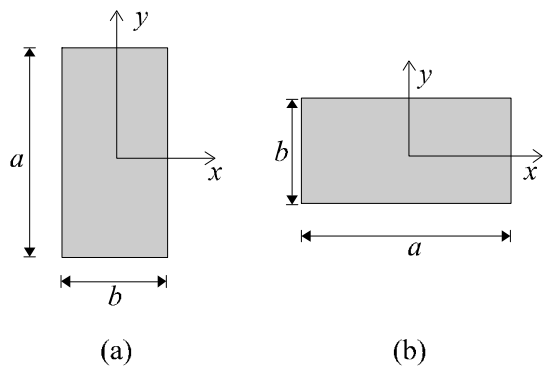
16. Es construeixen dos cilindres, un d'ells massís de radi r i un altre de buit de radi exterior $2r$ i radi interior $7r/4$. *a)* Calculeu la relació entre les dues seccions. *b)* Compareu la resistència a la flexió de les dues barres. Dades: el moment de segon ordre d'un cercle de radi r respecte a un eix que passa pel seu centre és $\frac{\pi r^4}{4}$, i el moment de segon ordre d'un anell de radi interior b i radi exterior a respecte a un eix que passa pel seu centre és $\frac{\pi(a^4-b^4)}{4}$.

Sol.: *a)* secció buit/secció massís = 0,94; *b)* resistència buit/resistència massís = 6,62

17. Una barra de radi r se substitueix per un tub buit de la mateixa longitud i radi interior r. *a)* Si el tub ha de tenir la mateixa resistència a la flexió que la barra, quin ha de ser el seu radi exterior? *b)* Quina és la raó entre les masses de la barra i del tub?

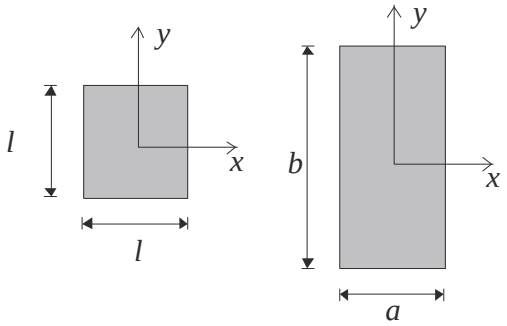
Sol.: *a)* $\sqrt[4]{2}\cdot r$; *b)* massa barra/massa tub = 2,414

18. Atesa una biga de secció rectangular de costats *a* i *b*: *a)* Compareu la relació entre la resistència a la flexió de la biga recolzada verticalment (figura a) i horitzontalment (figura b). *b)* Quant val aquesta relació en el cas particular que *a* = 3*b*?



Sol.: *a)* resistència vertical/resistència horitzontal = $\left(\frac{a}{b}\right)^2$; *b)* resistència vertical/resistència horitzontal = 9

19. Atesa una biga de secció quadrada de costat *l*; es vol aconseguir reduir la seva massa a una quarta part tot mantenint la seva resistència a flexió i utilitzant el mateix material. Per aquesta raó es decideix substituir-la per una biga de secció rectangular de base *a* i alçada *b*. Determina els valors de *a* i *b* en funció de la longitud *l*. Dades: el moment de segon ordre respecte l'eix de les *x* d'un rectangle de base *a* i alçada *b* és $I_{x,b} = \frac{1}{12}ab^3$.



Sol. $a = \frac{1}{8}l; b = 2l$.

II. Fluids

4. Estàtica de fluids

Objectius:

Què és un fluid?
Concepte de densitat
Què és la pressió?
Com varia la pressió amb la profunditat?
Descriure el principi de Pascal
Descriure el principi d'Arquimedes
Què és i quant val la pressió atmosfèrica?
Què és la pressió manomètrica? Principi de funcionament del manòmetre
Com resoldre les forces i moments aplicats per un fluid sobre una paret

Què és un fluid?

Estats de la matèria: sòlid, líquid, gas i plasma

- Sòlid:[1] quan sobre un sòlid actua una força, aquest tendeix a conservar la forma i volum.
- Líquid: canvia de forma però no de volum.[2]
- Gas: no conserva ni la forma ni el volum.

} Fluids

Líquids i gasos no tenen forma, s'adapten al recipient. Del moviment de líquids o gasos quan s'adapten al recipient se'n diu fluir. Els fluids no suporten un esforç de cisalla, no tenen resposta elàstica davant d'un esforç de cisalla.

Definició de fluid: que té la capacitat de fluir.

Alguns sòlids també poden fluir:

- el gel a les glaceres
- el plom de les canonades
- el tungstè de les bombetes

Ho fan materials que estan a la frontera entre sòlids i líquids, les gelatines.

Una definició més acurada:

- Líquids: poc compressibles, als efectes pràctics incompressibles, volum constant (fluid ideal)
- Gasos: compressibles

Estàtica de fluids: fluids en repòs (temes 4 i 5)
Dinàmica de fluids: fluids en moviment (temes 6 i 7)

[1] De fet, els sòlids tenen una certa capacitat de canviar de forma, tal com hem vist al tema 3.
[2] Això és una idealització del concepte de líquid. El volum dels líquids en presència de forces pot canviar; no obstant això, aquests canvis són molt petits quan es comparen amb el volum total d'un líquid o amb els canvis de volum que s'observen en gasos.

Densitat

Tal com hem vist al tema 2, la densitat és una variable macroscòpica que permet emprar el càlcul diferencial.

Què pesa més: 1 kg de palla o 1 kg de plom? Igual pes, però volum diferent.
Què pesa més: 1 m^3 de palla o 1 m^3 de plom?

En llenguatge col·loquial, quan diem que un material és més pesant que un altre, de fet no parlem del pes, sinó de la densitat.

La densitat és la massa per unitat de volum:

$\rho \equiv \frac{dm}{dV}$, unitat: $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

En un material homogeni ρ és constant:

$$\rho \equiv \frac{M}{V}$$

Densitat relativa: $\bar{\rho} \equiv \frac{\rho}{\rho_{H_2O}}$, és un paràmetre adimensional.

$$\rho_{H_2O} = 1\frac{\text{kg}}{\text{l}} = 1\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1.000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Pes específic: és el pes per unitat de volum.

$\bar{p} \equiv \frac{Mg}{V} = \rho g$, unitat: $\frac{\text{N}}{\text{m}^3}$

El volum pot variar per culpa de la temperatura o la pressió, és a dir, $\rho(T, p)$.

L'aire de l'atmosfera no és homogeni, és més dens prop de la superfície i a mesura que ascendim es torna menys dens, més lleuger (cal pujar uns 5 km perquè la densitat es redueixi a la meitat). També depèn de la temperatura: canvis de temperatura a l'atmosfera provoquen canvis de densitat.

En general:

$$dm = \rho\, dV \Rightarrow M = \int_V dm = \int_V \rho\, dV = \rho \int_V dV = \rho V$$

si és homogeni

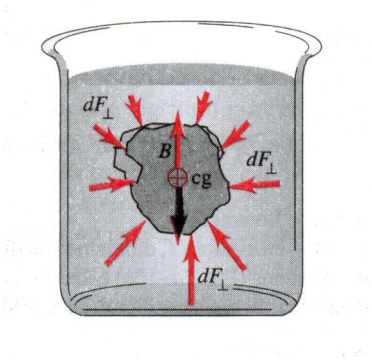
<u>Exemple</u>: La massa d'un picnòmetre és de 22,71 g. Un cop omplert d'aigua destil·lada té una massa de 153,38 g. Quan el picnòmetre s'omple de llet la seva massa és de 157,67 g. Quina és la densitat de la llet?

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_{llet} \cdot V}{\rho_{H_2O} \cdot V} = \frac{M_{llet}}{M_{H_2O}} = \frac{157{,}67\,\text{g} - 22{,}71\text{g}}{153{,}38\,\text{g} - 22{,}71\text{g}} = 1{,}0328$$

$$\rho_{llet} = \bar{\rho} \cdot \rho_{H_2O} = 1{,}0328 \cdot 1.000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1{,}0328 \cdot 10^3\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1{,}0328\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

Pressió

Estàtica de fluids → fluid en repòs → no sotmès a esforç de cisalla



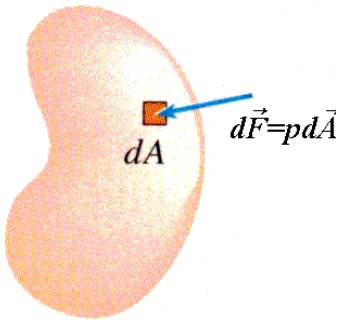
Submergim un sòlid dins d'un fluid:

Un sòlid submergit en un fluid pateix en tots els punts que estan en contacte amb el fluid una força que és perpendicular a la superfície de l'objecte.

Per la tercera llei de Newton, el sòlid respon aplicant una força de la mateixa magnitud, i direcció i sentit oposats.

Si la força no fos perpendicular a la superfície → esforç de cisalla → fluid en moviment.

Pressió: força normal exercida pel fluid per unitat d'àrea:



$$p = \frac{dF}{dA}$$

D'aquesta manera podem calcular la força resultant com:

$$\vec{F} = \int p d\vec{A}$$

Unitat SI: Pa (pascal), 1 Pa = 1 N/m^2

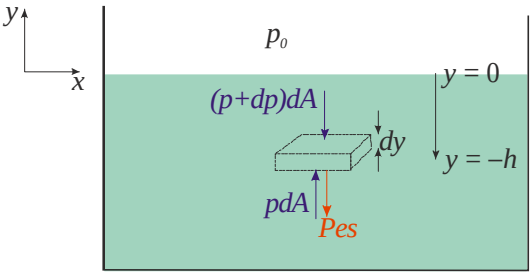
Altres unitats:

1 bar = 10^3 mil·libars = 100 kPa
1 atm = 760 mmHg = 760 Torr = 101.325 Pa

1 atm: és la pressió deguda a l'atmosfera al nivell del mar.

<u>La pressió no depèn de la direcció ni de l'orientació de la superfície atès que sempre és perpendicular a la superfície → només pot dependre de la posició.</u>

Equació fonamental de l'estàtica de fluids



Fluid en repòs

Perquè l'element de volum del fluid no es mogui, la suma de forces ha de ser nul·la, és a dir, la força neta feta per la pressió ha de compensar el pes de l'element de volum:

$(p+dp)dA + dPes = pdA$

A més:

$dPes = gdm = \rho g dV$

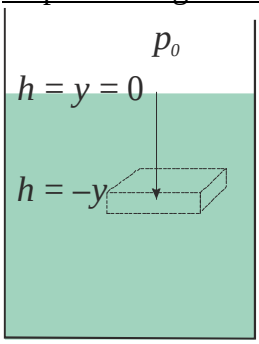
Llavors:

$$(p+dp)dA + \rho g dV = pdA \Rightarrow dpdA + \rho g dV = 0 \Rightarrow dp = -\rho g \frac{dV}{dA} = -\rho g dy$$

Equació fonamental de l'estàtica de fluids:

$dp = -\rho g dy$

<u>La pressió augmenta proporcionalment a la profunditat.</u>



Quan l'altura disminueix, la profunditat augmenta:

$$dh = -dy \Rightarrow dp = \rho g dh$$

Calculem la pressió en funció de la profunditat, *h*:

$$\left.\begin{array}{l} \int_0^h dp = p(h) - p_0 \\ \int_0^h dp = \int_0^h \rho g dh = \rho g \int_0^h dh = \rho g (h-0) = \rho g h \end{array}\right\} \Rightarrow p = p_0 + \rho g h$$

si és incompressible

$$\rho g h = \frac{\rho g h A}{A} = \frac{mg}{A}$$

El terme $\rho g h$ és el pes per unitat d'àrea. Per exemple, la pressió atmosfèrica a la superfície de la Terra és igual al pes per unitat d'àrea de la columna d'aire que s'estén des de la superfície de la Terra fins al final de l'atmosfera.

<u>Exemple 1</u>: El volum d'una bombolla d'aire esdevé 10,7 vegades més gran quan puja des del fons d'un llac a la superfície. Si la pressió atmosfèrica a la superfície del llac és igual a 101.325 Pa, calculeu la profunditat del llac.

$p_{dalt} = p_0 = 101.325$ Pa

$p_{fons} = p_0 + \rho g h$

Gas ideal: $p_{fons} V_{fons} = p_{dalt} V_{dalt} \Rightarrow \frac{p_{fons}}{p_{dalt}} = \frac{V_{dalt}}{V_{fons}} = 10{,}7$

$$p_{fons} = 10{,}7 \cdot p_{dalt} \Rightarrow p_{fons} = p_0 + \rho g h = 10{,}7 \cdot p_0 \Rightarrow \rho g h = 9{,}7 \cdot p_0$$

$$h = 9{,}7 \cdot \frac{p_0}{\rho g} = 9{,}7 \cdot \frac{101.325 \text{ N/m}^2}{1.000 \text{ kg/m}^3 \cdot 9{,}8 \text{ 1m/s}^3} = 100{,}2 \text{ m}$$

Exemple 2: Quina força neta actua sobre una planxa de 0,45 m^2 de superfície de la paret d'un submarí, quan el centre de gravetat d'aquest està 31 m per sota de la superfície del mar? Considereu que la pressió atmosfèrica és igual a 103 kPa i la densitat de l'aigua de mar és igual a 1,03 g/cm^3.

$$p = p_0 + \rho g h = 103.000 \text{ Pa} + 1.030 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9{,}81 \text{m/s}^3 \cdot 31 \text{ m} = 416.000 \text{ Pa}$$

$$F = \Delta p \cdot A = (416.000 - 103.000) \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 0{,}45 \text{ m}^2 = 141.000 \text{ N} = 1{,}41\ 10^5 \text{ N}$$

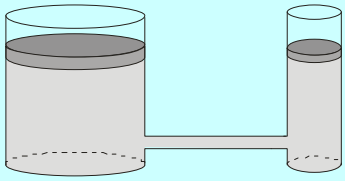
Principi de Pascal

$p = p_0 + \rho g h \Rightarrow$ Si l'altura varia poc $\rightarrow$ la pressió és aproximadament constant.

Principi de Pascal:

La pressió aplicada a un líquid confinat es transmet sense reducció a tots els punts del líquid i a les parets del dipòsit que les conté.

Exemple: Els radis dels èmbols gran i petit d'un elevador hidràulic són 16 cm i 4 cm, respectivament. *a)* Quina força cal exercir sobre l'èmbol petit per aixecar un cotxe col·locat sobre l'èmbol gran i que pesa 10 kN? *b)* Si l'èmbol petit baixa 12 cm, quant puja l'èmbol gran? *c)* Calculeu el treball que ha calgut fer per abaixar 12 cm l'èmbol petit? *d)* Calculeu el treball realitzat per l'èmbol gran sobre el cotxe.



a) $p_{\text{èmbol gran}} = \dfrac{10.000 \text{ N}}{\pi (0{,}16 \text{ m})^2} = 124.339 \text{ Pa} = p_{\text{èmbol petit}}$

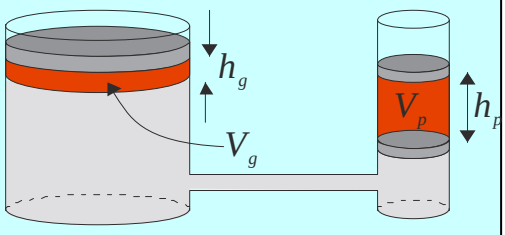
$$p_{\text{èmbol petit}} = \frac{F}{A} \Rightarrow F = p_{\text{èmbol petit}} \cdot A = 124.339 \text{ Pa} \pi (0{,}04 \text{ m})^2 = 625 \text{ N}$$

$$\frac{10.000 \text{ N}}{625 \text{ N}} = 16, \quad \frac{\pi (0{,}16 \text{ m})^2}{\pi (0{,}04 \text{ m})^2} = 4^2 = 16$$

b) $V_p = V_g \Rightarrow$

$$h_p \pi (0{,}04 \text{ m})^2 = \pi (0{,}16 \text{ m})^2 h_g$$

$$h_g = h_p \frac{\pi (0{,}04 \text{ m})^2}{\pi (0{,}16 \text{ m})^2} = 7{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$



c) $W = F \cdot \Delta s \cdot \cos 0^\circ$

$$W_{petit} = 625 \text{ N} \cdot 0{,}12 \text{ m} = 75 \text{ J}$$

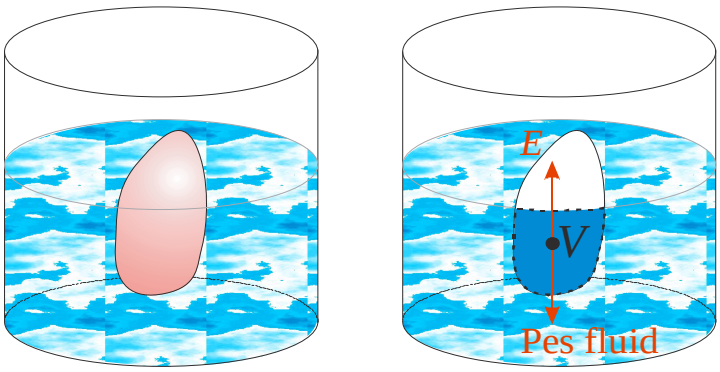
$$W_{gran} = 10.000 \text{ N} \cdot 7{,}510^{-3} \text{ m} = 75 \text{ J}$$

Principi d'Arquimedes

La força que experimenta un cos submergit totalment o parcialment en un fluid s'anomena *força ascensional* o *empenyiment* $\vec{E}$, i és igual al pes del fluid desallotjat.

$E = \rho g V$

on ρ és la densitat del fluid i V és el volum de fluid desplaçat.

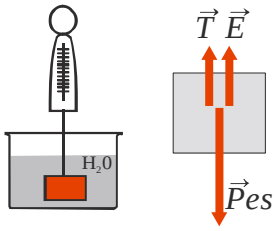


Demostració: Si traiem el sòlid i omplim amb el mateix fluid el volum V ocupat per la fracció de sòlid submergit, $\vec{E}$ és la mateixa atès que el fluid que envolta aquest volum V és el mateix. Per tant, E ha de ser igual al pes del fluid: $\rho g V$.

En el cas que la densitat del fluid sigui constant, el punt d'aplicació correspon al centre geomètric del volum.

Història (s. III aC): Arquimedes volia determinar la densitat d'un material de forma irregular, en concret volia determinar si la corona del rei Hieró II estava feta d'or massís:

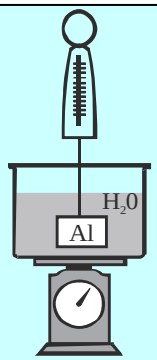
$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}} = \frac{\rho \cdot g \cdot V}{\rho_{H_2O} \cdot g \cdot V} = \frac{\text{Pes en aire}}{\text{Pes del líquid desplaçat}} = \frac{\text{Pes en aire}}{\text{E}}$$



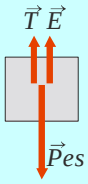
I l'empenyiment es pot calcular com la diferència del pes en aire i en aigua:

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}} = \frac{\text{Pes}}{\text{Pes - T}} = \frac{\text{Pes en aire}}{\text{Pes en aire - Pes en aigua}}$$

<u>Exemple</u>: Un recipient d'1 kg de massa conté 2 kg d'aigua destil·lada i reposa sobre una balança (vegeu la figura adjunta). Un bloc de 2 kg d'alumini (densitat específica: 2,70) està submergit dins l'aigua i penja d'un dinamòmetre. Determineu les lectures de la balança i del dinamòmetre.



a) Dinamòmetre:



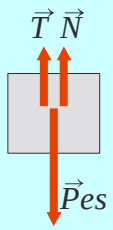
$$T + E = Pes$$

$$T + \rho_{H_2O} \cdot g \cdot V = \rho_{Al} \cdot g \cdot V$$

$$T = (\rho_{Al} - \rho_{H_2O}) \cdot g \cdot V = (\bar{\rho}_{Al} - 1)\rho_{H_2O} \cdot g \cdot V$$

$$T = (2{,}7 - 1)1.000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 7{,}41 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^3 = 12{,}34\ \text{N}$$

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{m}{\bar{\rho} \cdot \rho_{H_2O}} = 7{,}41 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^3$$



b) Balança:

$$\text{Balança} = \frac{N}{g} = \frac{m_T g - T}{g} = m_T - \frac{T}{g} = 5\,\text{kg} - \frac{12{,}34\,\text{N}}{9{,}81\,\text{m/s}^2} = 3{,}74\,\text{kg}$$

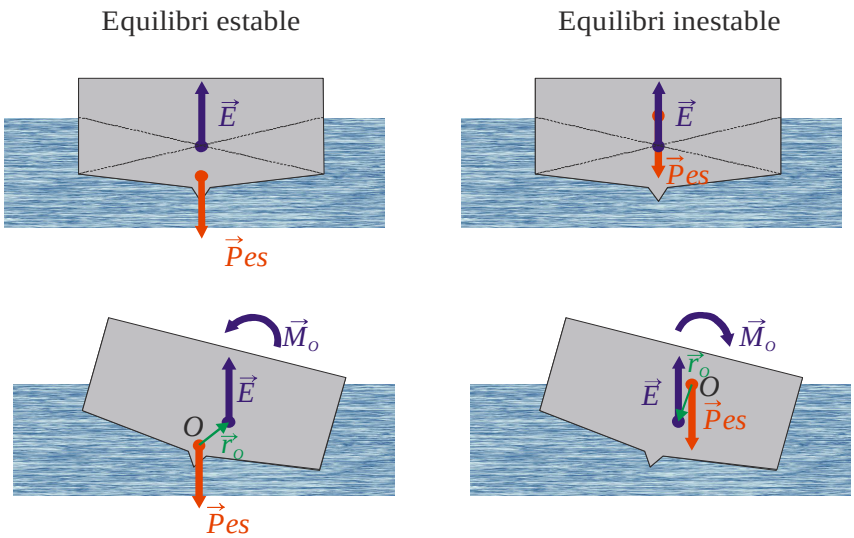
Flotació

$$\frac{Pes}{E} = \frac{\rho \cdot g \cdot V}{\rho_{H_2O} \cdot g \cdot V} = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}} = \bar{\rho}$$

Noteu que en aigua si $\bar{\rho} > 1 \Rightarrow Pes > E$, és a dir, el sòlid s'enfonsa.

En canvi, si $\bar{\rho} < 1$, el sòlid flota, de manera que el pes del volum submergit és igual al pes del sòlid: $Pes = E \Rightarrow \rho \cdot g \cdot V = \rho_{H_2O} \cdot g \cdot V_{Submergit} \Rightarrow V_{Submergit} = \bar{\rho} V$.

Per assolir l'equilibri també cal que la suma de moments sigui zero. Cal tenir present que el punt d'aplicació de la força exercida pel fluid és el centre geomètric del volum submergit i que el punt d'aplicació del pes és el centre de gravetat:



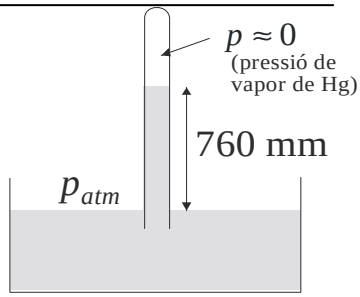
És a dir, perquè el vaixell no bolqui cal que el centre de gravetat estigui situat al més avall possible.

Pressió atmosfèrica: experiència de Torricelli

La pressió atmosfèrica és la pressió deguda a l'aire que ens envolta. En concret és el pes per unitat d'àrea de la columna d'aire que tenim a sobre nostre.

El 1643 Evangelista Torricelli va idear un mètode per mesurar la pressió atmosfèrica i va construir el primer *baròmetre* de mercuri.

Baròmetre: aparell de vidre per mesurar la pressió.



Torricelli va utilitzar un recipient de vidre llarg tancat per un dels extrems:

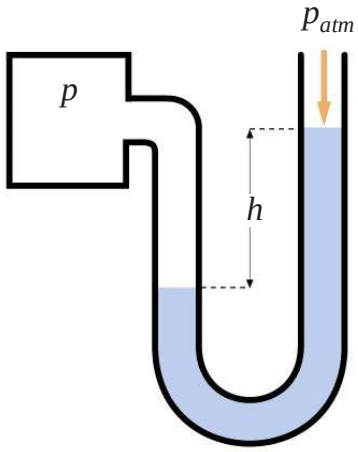
$$p_{atm} = 0 + \rho_{Hg} g h$$

$\rho_{\text{Hg}} = 13{,}595\ \text{kg/m}^3$ i $h = 760$ mm

Valor de la pressió atmosfèrica:

$$p_{atm} = 1\ \text{atm} = 760\ \text{mm de Hg} = 760\ \text{Torr} = 13{,}595 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}76\ \text{m} = 101.325\ \text{Pa}$$

Manòmetre



Manòmetre: aparell que mesura la pressió manomètrica.

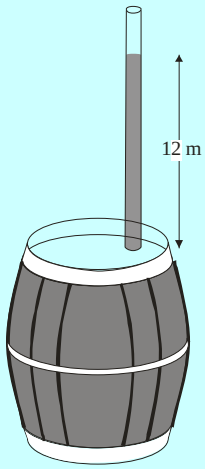
La pressió manomètrica és la diferència de pressió respecte de la pressió atmosfèrica:

$$\overline{p} = p - p_{atm}$$

$$p = p_{atm} + \rho g h$$

$$\overline{p} = p - p_{atm} = \rho g h$$

<u>Exemple</u>: Cap al 1646, Pascal va dur a terme l'experiment següent: va connectar un tub molt llarg, de secció transversal 3 10^{-5} m^2, a un barril de vi que tenia una tapa d'àrea 0,12 m^2. Primer, es va emplenar el barril amb aigua i a continuació es va afegir aigua dins del tub fins que el barril va esclatar. El trencament del barril es va esdevenir quan l'altura de la columna d'aigua va assolir els 12 m. En aquestes condicions: *a)* quin és el pes de l'aigua continguda dins el tub? *b)* quina és la pressió manomètrica que exerceix l'aigua al damunt de la tapa del barril? *c)* quina és la força neta exercida sobre la tapa?



a) $Pes = \rho g V = 1.000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} 9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} 12 \cdot 3\ 10^{-5} \text{m}^3 = 34{,}57\ \text{N}$

b) $\overline{p} = p - p_{atm} = p_{atm} + \rho g h - p_{atm} = 117.600\ \text{Pa} = 117{,}6\ \text{kPa}$

c) $F = \Delta p \cdot A = \overline{p} \cdot A = 117.600\ \text{Pa} \cdot 0{,}12\ \text{m}^2 = 14.112\ \text{N} = 14{,}1\ \text{kN}$

La pressió absoluta sempre és positiva, $p \geq 0$ (el fluid sempre exerceix una força contra la superfície del sòlid).

En canvi, $\overline{p} \leq 0$ o $\overline{p} \geq 0$. Per exemple, si fem el buit a l'interior d'un recipient, $\overline{p} \leq 0$ (la pressió a l'interior és inferior a l'atmosfèrica); en canvi, en un neumàtic inflat, $\overline{p} \geq 0$ (la pressió a l'interior és superior a l'atmosfèrica).

Pregunta: És possible que la pressió manomètrica de les rodes mesurada en una gasolinera canviï d'un dia a l'altre encara que no hi hagi pèrdues d'aire al pneumàtic?

Forces i moments sobre parets i preses

Pressió manomètrica:
$\bar{p} = \rho g h = \rho g x \cos\theta$

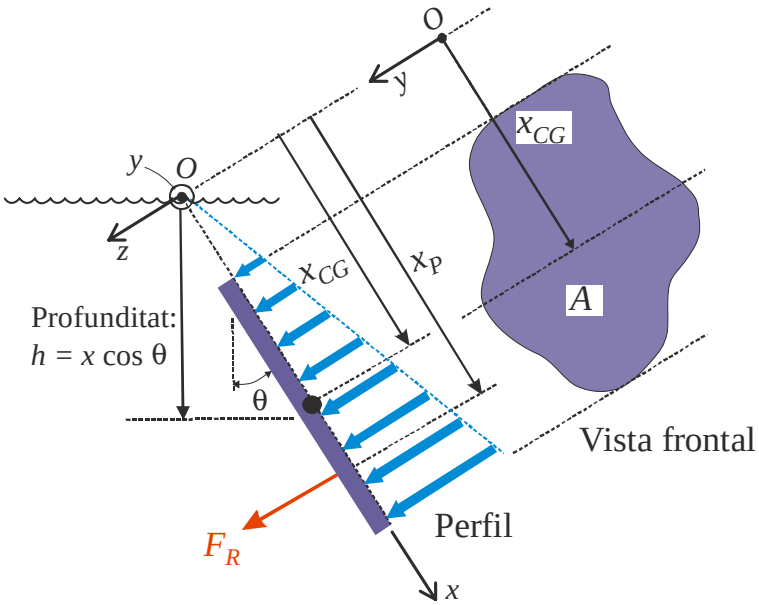
Força resultant:

$$dF = \bar{p} dA = \rho g x \cos\theta dA$$

$$F_R = \int dF = \rho g \cos\theta \int x dA$$

$$= \rho g \cos\theta A \left(\frac{1}{A} \int x dA \right)$$

$$F_R = \rho g \cos\theta x_{CG} A$$



Moment resultant:

$$M_{R,O} = \int x dF = \int x \rho g \cos\theta x dA = \rho g \cos\theta \int x^2 dA = \rho g \cos\theta I_{O,y}$$

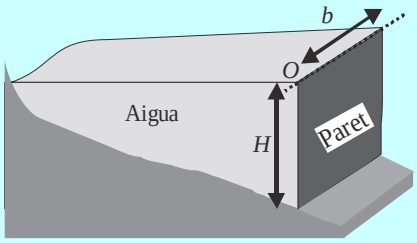
$$M_{R,O} = \rho g \cos\theta I_{O,y}$$

Centre de pressió, punt d'aplicació de la força resultant:

$$x_p = \frac{M_{R,O}}{F_R} = \frac{\rho g \cos\theta I_{O,y}}{\rho g \cos\theta x_{CG} A} = \frac{I_{O,y}}{x_{CG} A}$$

És a dir, és com si tota la força estigués aplicada al centre de pressions.

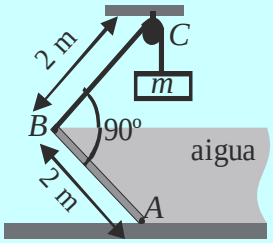
<u>Exemple 1</u>: Atesa la presa de la figura, on la cara que està en contacte amb l'aigua té una amplada *b* i una alçada *H*, calculeu la força total i el moment de forces respecte a l'eix *O* aplicats per l'aigua sobre la paret. Expresseu els resultats en funció de la densitat de l'aigua ρ i l'acceleració de la gravetat *g*.

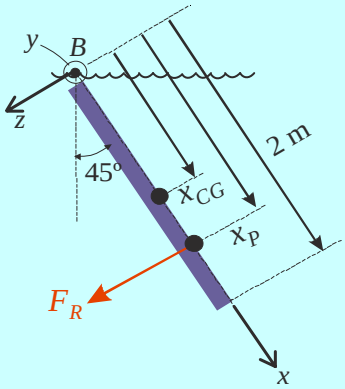


$$F_R = \rho g \cos\theta x_{CG} A = \rho g \cos 0 \frac{H}{2} H b = \frac{1}{2} \rho g b H^2$$

$$M_{R,O} = \rho g \cos\theta I_{O,y} = \rho g \frac{1}{3} b H^3 = \frac{1}{3} \rho g b H^3$$

Exemple 2: La comporta *AB* de la figura té una massa de 200 kg. Està articulada a *A* i les seves dimensions són: 1 m (normal al pla de la figura) i *b* = *AB* = 2 m. La comporta està subjectada en el punt *B* per una cadena que passa per una politja de radi negligible a *C*. El punt *C* està sobre la vertical que passa per *A*. De l'altre extrem de la cadena penja una massa *m*. Calculeu *m* perquè el sistema es trobi en equilibri a la posició de la figura.





$$A = 1 \cdot 2\,\text{m}^2$$

$$x_{CG} = \frac{2}{2}\,\text{m} = 1\,\text{m}$$

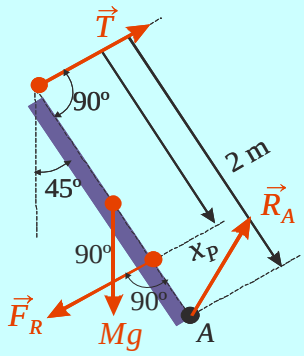
$$F_R = \rho g \cos\theta x_{CG} A =$$

$$= 1.000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9{,}81 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \cos 45^\circ \cdot 1\,\text{m} \cdot 2\,\text{m}^2 = 13.900\,\text{N}$$

$$I_{B,x} = \frac{1}{3} 1 \cdot 2^3\,\text{m}^4 = \frac{8}{3}\,\text{m}^4$$

$$x_p = \frac{I_{O,y}}{x_{CG} A} = \frac{8/3\,\text{m}^4}{1 \cdot 2\,\text{m}^3} = \frac{4}{3}\,\text{m}$$

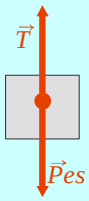
Equilibri de la paret:



$$\sum M_A = 0: \quad T \cdot 2\,\text{m} = F_R \cdot (2 - 4/3)\,\text{m} + \text{M} \cdot \text{g} \cdot \sin 45^\circ \cdot 1\text{m}$$

$$T = \frac{13.900 \cdot 0{,}667 + 1.390}{2}\,\text{N} = 5.320\,\text{N}$$

Suma de forces:



$T = mg$

$m = T/g = 542{,}1$ kg

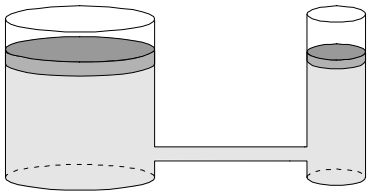
Qüestions del tema 4

Densitat i pressió

1. La massa d'un picnòmetre és de 22,71 g. Un cop omplert d'aigua destil·lada té una massa de 153,38 g. Quan el picnòmetre s'omple de llet la seva massa és de 157,67 g. Quina és la densitat de la llet?

Sol.: 1,033 kg/l

2. Els radis dels èmbols gran i petit d'un elevador hidràulic són 16 cm i 4 cm, respectivament. *a)* Quina força cal exercir sobre l'èmbol petit per aixecar un cotxe col·locat sobre l'èmbol gran i que pesa 10 kN? *b)* Si l'èmbol petit baixa 12 cm, quant puja l'èmbol gran? *c)* Calculeu el treball que ha calgut fer per abaixar 12 cm l'èmbol petit. *d)* Calculeu el treball realitzat per l'èmbol gran sobre el cotxe.



Sol.: *a)* 625 N; *b)* 0,75 cm; *c)* 75 J; *d)* 75 J

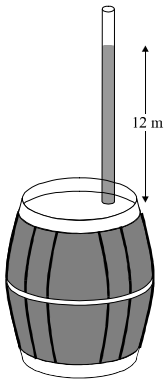
3. L'àrea del pistó del pedal de frens és de 6,5 cm^2, l'àrea del pistó de la sabata del tambor de la roda és de 19,4 cm^2. Quina força apliquem a les rodes quan pressionem el pedal de frens amb una força de 100 N?

Sol.: 300 N

4. Al 1654 Otto von Guericke va realitzar la següent experiència. Va ajuntar dues semiesferes de coure formant una esfera buida (no hi ha cap element que mantingui les dues semiesferes unides). Desprès, amb una bomba de buit va extreure l'aire de l'interior de la esfera. A cada semiesfera es va lligar un tir de cavalls. Els dos tirs de cavalls (en total 16 cavalls) no varen aconseguir separar les dues semiesferes.
a) quina força manté unides les dues esferes?
b) quina força cal fer per separar les dues semiesferes si el seu radi és de 50 cm.

Sol.: 159.160 N

5. Cap al 1646, Pascal va dur a terme l'experiment següent: va connectar un tub molt llarg, de secció transversal 3 10^{-5} m^2, a un barril de vi que tenia una tapa d'àrea 0,12 m^2. Primer, es va emplenar el barril amb aigua i a continuació es va afegir aigua dins del tub fins que el barril va esclatar. El trencament del barril es va esdevenir quan l'altura de la columna d'aigua va assolir els 12 m. En aquestes condicions: *a)* quin és el pes de l'aigua continguda dins el tub? *b)* quina és la pressió manomètrica que exerceix l'aigua al damunt de la tapa del barril? *c)* quina és la força neta exercida sobre la tapa?



Sol.: *a)* 3,53 N; *b)* 117,6 kPa; *c)* 14,1 kN

6. A 8.000 m d'alçada la pressió atmosfèrica és 30 kPa. Si la pressió a l'interior d'una avió es manté constant a 101 kPa. Quina és la força total sobre el fusellatge de l'avió? Dades: superfície del fusellatge de l'avió 230 m2.

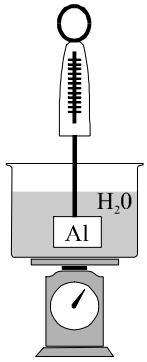
Sol.: 1,633 10^7 N

Principi d'Arquimedes

7. Un rai quadrat de 3 m de costat i 11 cm de gruix està construït amb una fusta de densitat específica 0,6. Quantes persones de 70 kg poden estar-se dempeus sobre el rai sense mullar-se els peus? Suposeu l'aigua en calma.

Sol.: 5 persones

8. Un recipient d'1 kg de massa conté 2 kg d'aigua destil·lada i reposa sobre una balança (vegeu la figura adjunta). Un bloc de 2 kg d'alumini (densitat específica: 2,70) està submergit dins l'aigua i penja d'un dinamòmetre. Determineu les lectures de la balança i del dinamòmetre.

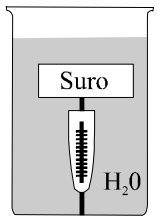


Sol.: 3,74 kg i 12,3 N, respectivament

9. Un objecte té una força ascensional nul·la quan la seva densitat s'iguala a la del líquid on està submergit; en conseqüència, ni sura ni s'enfonsa. Si la densitat mitjana del cos humà és de 0,96 kg/l, quina massa de plom s'hauria d'afegir a un nedador de 85 kg que es cabussa en aigua dolça perquè la seva força ascensional fos nul·la?

Sol.: 3,54 kg

10. Un tros de suro pesa 0,285 N a l'aire. Quan està submergit dins l'aigua, la lectura amb un dinamòmetre (vegeu la figura) és de 0,885 N. Calculeu la densitat del suro.



Sol.: 244 kg/m^3

11. Es pesa a l'aire un objecte de vidre i s'obté que té una massa de 0,84 kg. Posteriorment es torna a pesar submergint-lo completament en aigua i trementina, i s'obtenen els valors de 0,45 kg i 0,56 kg, respectivament. Si la densitat de l'aigua és 1.000 kg/m^3, quines són les densitats de la trementina i del vidre?

Sol.: 718 kg/m^3 i 2.154 kg/m^3

12. Es pesa a l'aire un bloc de niló i s'obté que té una massa de 0,4 kg. Posteriorment es torna a pesar submergint-lo completament en aigua i s'obté el valor de 52,2 g. Si la densitat de l'aigua és 1.000 kg/m^3, quina és la densitats del niló?

Sol.: 1150 kg/m^3.

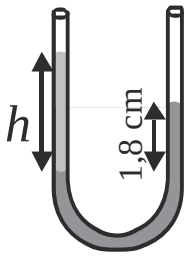
13. La massa d'un picnòmetre és de 40,36 g. Un cop omplert d'aigua destil·lada (densitat 1.000 kg/m^3) té una massa de 301,23 g. Quan el picnòmetre s'omple d'oli d'oliva la seva massa és de 262,17 g. Quina és la densitat de l'oli d'oliva?

Sol.: 850 kg/m^3.

14. Si sabem que quan un iceberg sura en el gel, el 92% del seu volum està submergit. ¿Quina és la mesura del pes d'un bloc de gel de 2 kg de massa submergit totalment en metanol? Dades: densitat de l'aigua líquida 1000 kg/m^3 i densitat del metanol 789 kg/m^3.

Sol.: 2,791 N.

Equació fonamental de l'estàtica de fluids



15. Disposem d'un tub en forma de U, de secció uniforme i que conté mercuri. En una de les seves branques hi aboquem alcohol, fins a aconseguir que el mercuri de l'altra branca pugi 1,8 cm. Quina és l'altura *h* de la columna d'alcohol? Densitat del mercuri: 13,6 g/cm^3 i de l'alcohol: 0,79 g/cm^3

Sol.: *h* = 31,0 cm

16. Quina força neta actua sobre una planxa de 0,45 m^2 de superfície de la paret d'un submarí, quan el centre de gravetat d'aquest està 31 m per sota de la superfície del mar? Considereu que la pressió atmosfèrica és igual a 103 kPa i la densitat de l'aigua de mar és igual a 1,03 g/cm^3.

Sol.: 141 kN

17. Quina és l'altura mínima a la qual hem de col·locar una bossa de sèrum fisiològic per tal que el sèrum entri dins el flux sanguini? Dades: la pressió del sèrum a la bossa és la pressió atmosfèrica, la pressió manomètrica a la vena és de 2,2 kPa i la densitat del sèrum és de 1,005 g/cm^3.

Sol.: 22 cm

18. Un submarí utilitza l'aire a pressió i l'aigua per sortir a la superfície o per enfonsar-se. Si la massa del submarí és de 80 tones i el seu volum 200 m^3, quin volum mínim d'aigua haurà de fer entrar el submarí per enfonsar-se. Nota, la densitat de l'aigua de mar és 1025 kg/m^3. Podeu negligir el pes de l'aire (la densitat de l'aire és aproximadament 1000 vegades més petita que la de l'aigua).

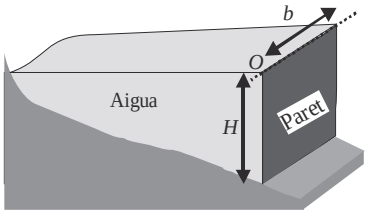
Sol.: 122 m^3.

19. Es pretén reflotar un vaixell que està completament enfonsat sobre un fons rugós a 16 m de profunditat utilitzant el mètode d'injecció d'aire comprimit al seu interior. Per als càlculs, aproximarem el vaixell a un paral·lelepípede de 7 x 10 x 40 m. Aquest reposa sobre la cara de 7 x 40 m i té una massa de 863 tones. La injecció d'aire es fa adientment mitjançant una mànega flexible situada a la part superior del vaixell. El compressor, situat a la superfície del mar, aspira un volum de 10 m^3 d'aire per minut a pressió atmosfèrica i el comprimeix a la pressió adient per ser injectat a l'interior del vaixell. El compressor deixa de funcionar quan el vaixell se separa del fons. *a)* Quant temps ha estat en marxa el compressor? *b)* A quina profunditat per sota del nivell del mar es trobarà la cara inferior del vaixell quan suri? Pressió atmosfèrica: 1,033 kp/cm^2, densitat relativa de l'aigua de mar: 1,026.

Sol.: *a)* t = 2 h 39 min 5 s; *b)* 7,322 m

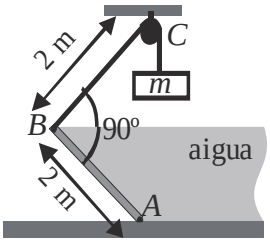
Forces i moments sobre parets

20. Atesa la presa de la figura, on la cara que està en contacte amb l'aigua té una amplada *b* i una alçada *H*, calculeu la força total i el moment de forces respecte a l'eix *O* aplicats per l'aigua sobre la paret. Expresseu els resultats en funció de la densitat de l'aigua ρ i l'acceleració de la gravetat *g*.



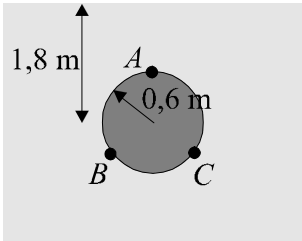
Sol.: $F = \frac{1}{2}\rho g b H^2$, $M_O = \frac{1}{3}\rho g b H^3$

21. La comporta *AB* de la figura té una massa de 200 kg. Està articulada a *A* i les seves dimensions són: 1 m (normal al pla de la figura) i *b* = *AB* = 2 m. La comporta està subjectada al punt *B* per una cadena que passa per una politja de radi negligible a *C*. El punt *C* està sobre la vertical que passa per *A*. De l'altre extrem de la cadena penja una massa *m*. Calculeu *m* perquè el sistema es trobi en equilibri a la posició de la figura.



Sol.: m = 542,11 kg

22. El centre d'una comporta circular vertical d'1,2 m de diàmetre està 1,8 m per sota la superfície de l'aigua. La comporta s'aguanta mitjançant tres perns *A*, *B* i *C* equidistants, tal com s'esquematitza a la figura. Determineu la força que exerceix cada pern. Nota: atesa la simetria del problema, podeu suposar que la magnitud i la direcció de les reaccions a *B* i *C* són iguals.



Sol.: $R_B = R_C = 7.204$ N; $R_A = 5.542$ N

23. Repetiu el problema anterior, però per al cas en què el centre de la comporta estigui 1,5 m per sota de la superfície de l'aigua.

Sol.: $R_B = R_C = 6.095$ N; $R_A = 4.433$ N

5. Forces de cohesió en líquids

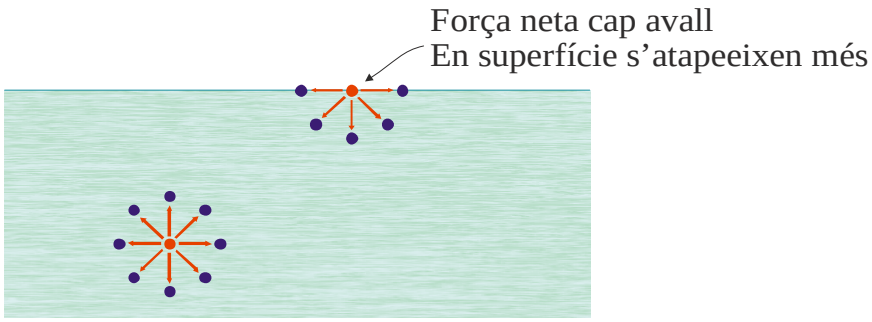
Objectius:

Descriure l'origen de la tensió superficial
Tensió superficial: definició i unitats
Concepte d'angle de contacte
Quina altura puja o baixa un líquid a l'interior d'un tub capil·lar?
Quina és la diferència de pressió entre l'exterior i l'interior d'una bombolla?
Descriure l'ascens de la saba als arbres per capil·laritat

Fenòmens moleculars: adhesió i cohesió

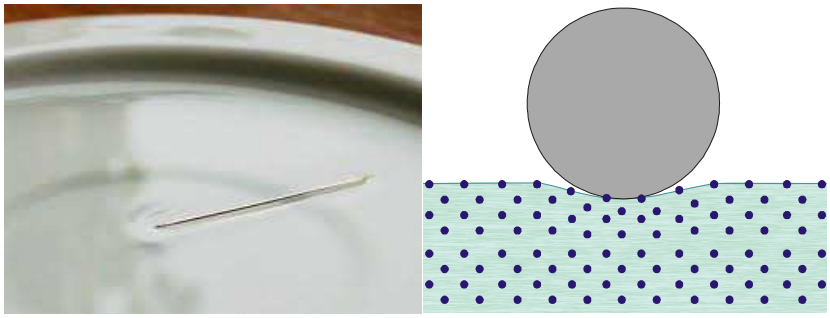
Fenòmens:
- Insectes que caminen damunt de l'aigua
- Formació de gotes
- Moneda que sura a l'aigua
- Ascensió de l'aigua de la capa freàtica

La causa són les forces de cohesió associades a les atraccions entre les molècules del líquid. A l'interior del líquid, la presència de molècules veïnes pertot arreu fa que les forces de cohesió siguin iguals en totes les direccions, i per tant, s'anul·len. Aquesta compensació no es dóna a la superfície:



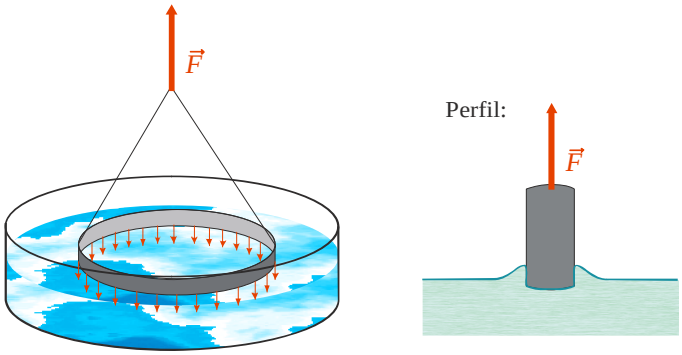
Les tensions associades a les forces de cohesió augmenten com més gran és la superfície i, per tant, la tendència és de fer la superfície el més petita possible.

A banda de les forces de cohesió entre molècules del líquid, també tenim forces d'adhesió entre les molècules del líquid i les d'un sòlid en contacte amb el líquid.



Per exemple, quan dipositem una agulla sobre la superfície d'un líquid, les molècules superficials que estan sota l'agulla s'enfonsen, baixen de nivell. El resultat és una disminució de la distància intermolecular. Aquesta disminució de la distància intermolecular ofereix una força restauradora que pot arribar a sostenir el pes de l'agulla. La superfície del líquid actua com una membrana tensa. Un efecte similar té lloc si volem treure l'agulla, quan estirem l'agulla cap enfora, estirem també la superfície del líquid. L'augment corresponent de la distància intramolecular resulta en una força restauradora que estira l'agulla cap avall.

Tensió superficial



Suposem que situem un anell de perímetre l sobre la superfície d'un líquid i en contacte amb aquest. Quina força cal fer per aixecar el fil?

S'observa que la força que cal fer és superior al pes del sòlid. La raó és que a banda del pes també cal superar la força feta per la tensió superficial T_S:

$$F = T_S + mg$$

A més s'observa que aquesta tensió és proporcional al perímetre de l'anell, és a dir, és proporcional a la longitud mullada pel líquid; en aquest cas és $2l$ perquè el líquid mulla el sòlid pels dos costats (la tensió superficial s'aplica a una longitud total $2l$):

$$T_S = \sigma 2l$$

La constant de proporcionalitat és el coeficient de tensió superficial:

$$\sigma \equiv \frac{T_S}{2l}, \text{ unitat: } \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

El coeficient de tensió superficial és la força normal a la superfície exercida pel fluid per unitat de longitud.

El coeficient de tensió superficial disminueix amb la temperatura: $\sigma\downarrow$ quan $T\uparrow$ (a causa de l'afebliment de l'enllaç químic amb la temperatura).

Líquid	Tensió superficial N/m	Temperatura ºC
Alcohol etílic	$2{,}23\ 10^{-2}$	20
Oli d'oliva	$3{,}20\ 10^{-2}$	20
Glicerina	$6{,}31\ 10^{-2}$	20
Mercuri	0,465	20
Benzè	$2{,}90\ 10^{-2}$	20
Querosè	$2{,}50\ 10^{-2}$	20
Plata	0,800	970
Or	1,000	1.070
Coure	1,100	1.130
Oxigen	$1{,}57\ 10^{-2}$	–193
Neó	$5{,}15\ 10^{-3}$	–247

Capil·laritat: llei de Jurin

A les superfícies dels líquids en contacte amb un sòlid s'originen dos fenòmens diferents que donen com a resultat dues forces en competència:

- Cohesió, líquid−líquid
- Adhesió, líquid−sòlid

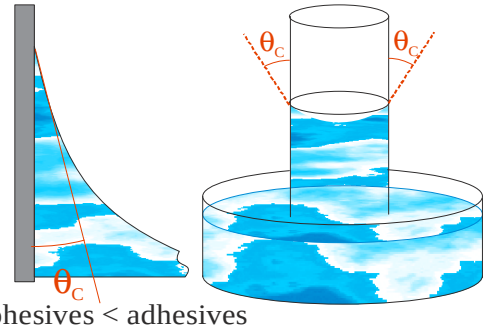
} angle de contacte

Possibilitats:

- Forces d'adhesió > forces de cohesió
  Per exemple, aigua−aire−vidre

  En aquest cas el líquid *mulla* el vidre.

  Acció capil·lar: Dins d'un tub capil·lar el líquid pujarà. L'ascens del líquid es deu a les forces adhesives que estiren cap amunt. El menisc és còncau.

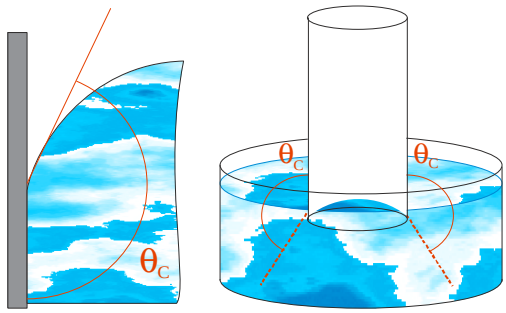


Cohesives < adhesives
$0º<\theta_C<90º$

- Forces d'adhesió < forces de cohesió
  Per exemple, mercuri−aire−vidre

  En aquest cas el líquid *no mulla* el vidre.

  Acció capil·lar: Dins d'un tub capil·lar el líquid baixarà. El descens del líquid es deu a les forces de cohesió que estiren cap avall. El menisc és convex.



Cohesives > adhesives
$90º<\theta_C<180º$

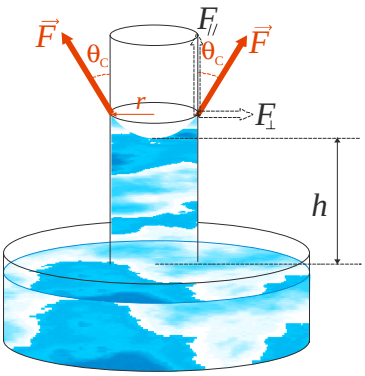
L'angle de contacte no sols depèn del líquid i el sòlid, sinó que també depèn del gas present. A més, depèn críticament de la presència d'impureses dissoltes al líquid i de la neteja de la superfície del sòlid.

Angles de contacte amb aire	
Aigua−vidre	0º
Alcohol etílic − vidre	0º
Mercuri−vidre	140º
Aigua−plata	90º
Aigua−parafina	107º
Iodur de metilè−vidre Pyrex	30º

Llei de Jurin

Si les forces d'adhesió > forces de cohesió, el líquid s'adhereix a la paret (mulla la paret) i després la tensió superficial manté el líquid per sobre del nivell del dipòsit. En el cas contrari, la tensió superficial empeny el líquid cap avall.

Quina altura puja o baixa el líquid en un tub capil·lar?



Força ascensional:

$$F_{//} = F\cos\theta_C = 2\pi r\sigma\cos\theta_C$$

Pes:

$$mg = \left(\rho\pi r^2 h\right)g$$

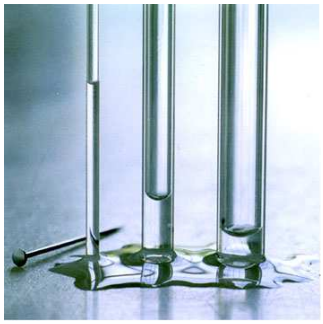
Equilibri:

$$F_{//} = mg \Rightarrow 2\pi r\sigma\cos\theta_C = \left(\rho\pi r^2 h\right)g$$

Llei de Jurin:

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta_C}{\rho r g}$$

$h\uparrow$ quan $\sigma\uparrow$ o $r\downarrow$, per això aquest efecte es veu només en tubs capil·lars (radis petits).



Si $\theta = 90^\circ \Rightarrow h = 0$

Si $\theta > 90^\circ \Rightarrow h < 0$, depressió capil·lar

Si no fos per la capil·laritat, l'aigua no mullaria tota la Terra; només hi hauria aigua a la capa freàtica. La Terra és porosa, és a dir, hi ha petits conductes responsables de l'ascensió de l'aigua de la capa freàtica fins al sòl.

<u>Exemple 1</u>: Els nutrients de les plantes pugen a través d'uns tubs molt prims anomenats *xilemes*. Cada tub té un radi de 0,01 mm aproximadament. A quina altura s'eleva l'aigua per aquests tubs a causa de l'acció capil·lar, suposant 0 l'angle de contacte? (Tensió superficial de l'aigua: 0,073 N/m.)

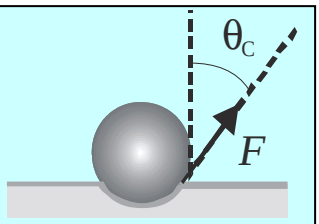
$$h = \frac{2\sigma\cos\theta_C}{\rho r g} = \frac{2\cdot 0{,}073\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\cdot 1}{1.000\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\cdot 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 0{,}01\cdot 10^{-3}\mathrm{m}} = 1{,}489\,\mathrm{m}$$

<u>Exemple 2</u>: Quin radi haurien de tenir els capil·lars del xilema dels arbres si la tensió superficial fos l'únic mecanisme que permetés que la saba assolís la copa d'una sequoia de 100 m d'altura? (Tensió superficial de la saba: 0,073 N/m, i angle de contacte: 0.)

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta_C}{\rho r g} \Rightarrow r = \frac{2\sigma\cos\theta_C}{\rho g h} = \frac{2\cdot 0{,}073\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\cdot 1}{1.000\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\cdot 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 100\,\mathrm{m}} = 1{,}489\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$$

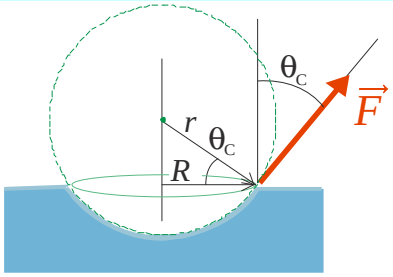
Creieu que la capil·laritat és l'únic mecanisme d'ascensió de la saba als arbres?

Exemple 3: Una petita esfera reposa sobre la superfície d'un líquid (vegeu la figura). *a)* Demostreu que l'angle θ_c està relacionat amb el radi de l'esfera r, amb la seva densitat ρ i amb el coeficient de tensió superficial del líquid σ per



$$\cos^2\theta_C = \frac{2r^2\rho g}{3\sigma}.$$

Nota: Atès que la part de l'esfera submergida és molt petita, podeu negligir la força d'empenta feta pel fluid.

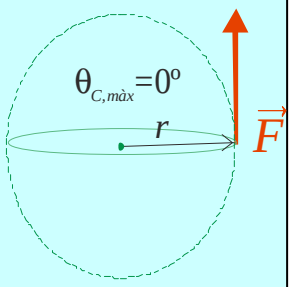


$$F\cos\theta_c = mg \Rightarrow 2\pi R\sigma\cos\theta_c = mg$$

$$\left.\begin{array}{l} R = r\cos\theta_C \\ m = \rho V = \rho\dfrac{4}{3}\pi r^3 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\pi r\sigma\cos^2\theta_C = \rho\frac{4}{3}\pi r^3 g$$

$$\sigma\cos^2\theta_C = \rho\frac{2}{3}r^2 g \Rightarrow \cos^2\theta_C = \frac{2\rho g r^2}{3\sigma}$$

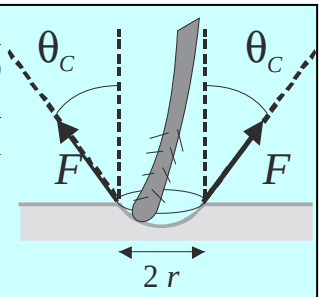
b) Calculeu el radi màxim que pot tenir una esfera de coure perquè pugui estar al damunt de l'aigua sense enfonsar-se (densitat del coure: 8,93 10^3 kg/m^3).



$$r^2 = \frac{3\sigma\cos^2\theta_C}{2\rho g} = \frac{3\cdot 0{,}073\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\cdot 1}{2\cdot 8.900\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\cdot 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 1{,}25\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2$$

$$r^2 = \sqrt{1{,}25\cdot 10^{-6}}\,\mathrm{m} = 1{,}12\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} = 1{,}12\,\mathrm{mm}$$

Exemple 4: La pota d'un insecte aturat sobre l'aigua forma una depressió de radi r = 2 mm i angle 40º. *a)* Quin pes suporta aquesta depressió? *b)* Quina és la massa de l'insecte, suposant que el seu pes es reparteix igual a les sis potes?



a) $F = 2\pi r\sigma = 2\pi\, 2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}\cdot 0{,}073\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} = 9{,}174\cdot 10^{-4}\,\mathrm{N}$

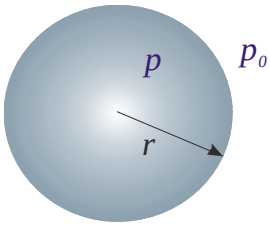
$$F\cos\theta_c = mg \Rightarrow mg = 9{,}174\cdot 10^{-4}\,\mathrm{N}\cdot\cos(40^\circ) = 7{,}03\cdot 10^{-4}\,\mathrm{N}$$

b) $m = \dfrac{6\cdot 7{,}03\cdot 10^{-4}\,\mathrm{N}}{g} = 4{,}30\cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg} = 0{,}43\,\mathrm{g}$

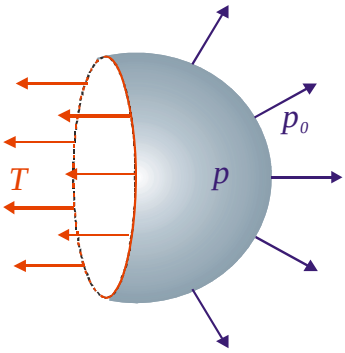
Llei de Laplace

La llei de Laplace relaciona la diferència de pressió a ambdós costats d'una membrana elàstica o pel·lícula líquida tancada per l'efecte de la tensió superficial.

L'expressió depèn de la forma de la membrana. Nosaltres farem la deducció per a la forma esfèrica. Aquesta és la forma més comuna, atès que la tensió superficial tendeix a minimitzar la superfície. Per exemple, tenim la formació de gotes.



Avaluem les forces sobre una semiesfera:



Condició d'equilibri: $T = F$

$T = \sigma l = 2\sigma\pi r$

$dF = (p-p_0)dA$

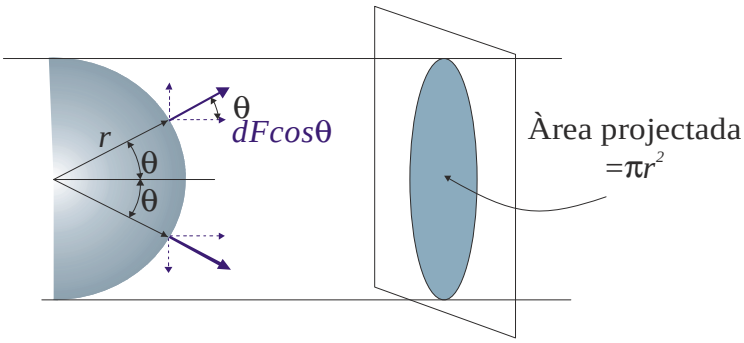
$F = \int dF = (p-p_0)\pi r^2$ (vegeu la demostració més endavant)

I si apliquem la condició d'equilibri: $2\sigma\pi r = (p-p_0)\pi r^2$

Llei de Laplace: $p - p_0 = \dfrac{2\sigma}{r}$

Demostració de: $\int dF = (p-p_0)\pi r^2$

$$F = \int dF = \int dF \cos\theta = \int (p - p_0)\cos\theta \, dA$$

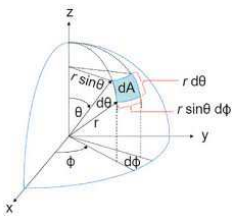


$$F = (p - p_0)\int \cos\theta \, dA$$

El terme $\cos\theta \, dA$ és la projecció de dA en una superfície plana. Per tant, $\int \cos\theta \, dA$ és la projecció de la closca esfèrica sobre un pla, és a dir, és la superfície d'un cercle: $\int \cos\theta \, dA = \pi r^2$.

Així doncs, queda: $F = (p - p_0)\int \cos\theta \, dA = (p - p_0)\pi r^2$, QED[7].

Per a qui prefereixi una demostració més rigorosa:



$$dA = r\sin\theta d\phi \cdot r d\theta$$

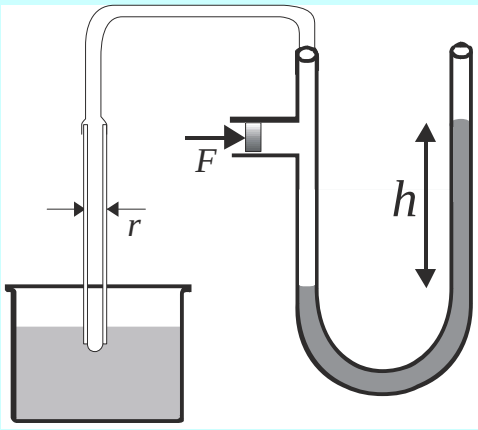
$$\int \cos\theta \, dA = \int_0^{\pi}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \sin\theta\cos\theta d\theta\right)d\phi = \pi r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta d\theta$$

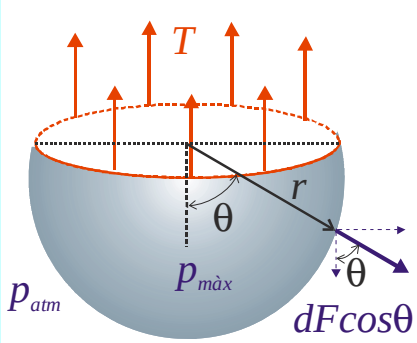
$$= \pi r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta d\theta = \pi r^2 \int_{-1}^{1} u du = \pi r^2 \left[\frac{u^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \pi r^2$$

Canvi de variable: $u = \sin\theta \Rightarrow du = \cos\theta d\theta$

[7] Abreviació de la expressió llatina Quod Erat Demonstrandum que vol dir: tal com es volia demostrar.

Exemple 1: A la figura adjunta s'esquematitza un muntatge que se sol emprar per determinar la tensió superficial d'un líquid. Se submergeix en un líquid un capil·lar de radi r i mitjançant l'aplicació d'una força sobre l'èmbol s'augmenta la pressió dins del capil·lar, de manera que apareix una bombolla a l'extrem inferior del capil·lar. La pressió màxima dins del capil·lar, $p_{màx}$, s'assoleix just abans que la bombolla esclati. Quan s'assoleix aquest valor de la pressió, la bombolla és un hemisferi, tal com s'indica a la figura. *a)* Demostreu que en aquesta situació la pressió manomètrica, $\overline{p}_{màx}$, al capil·lar és:





$$\overline{p}_{màx} = \frac{2\sigma}{r}$$

Condició d'equilibri: $T = F$

$$T = \sigma l = 2\sigma\pi r$$

$$F = \int dF = \int dF\cos\theta = \int (p_{màx} - p_{atm})\cos\theta\, dA$$

$$F = (p_{màx} - p_{atm})\int \cos\theta\, dA = \overline{p}_{màx}\pi r^2$$

Finalment, si $T = F$: $2\pi r\sigma = \overline{p}_{màx}\pi r^2 \Rightarrow \overline{p}_{màx} = \dfrac{2\sigma}{r}$.

b) Se submergeix en tetraclorometà un capil·lar de 0,2 mm de radi i es formen bombolles quan la diferència d'altures, h, a les dues branques del manòmetre d'aigua és de 2,75 cm. Quina és la tensió superficial del tetraclorometà?

$$\overline{p} = \rho g h = 1.000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 0{,}0275\text{ m} = 270\text{ Pa}$$

$$\overline{p}_{màx} = \frac{2\sigma}{r} \Rightarrow \sigma = \frac{\overline{p}_{màx} r}{2} = \frac{1}{2}270\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\cdot 0{,}2\cdot 10^{-3}\text{m} = 0{,}027\frac{\text{N}}{\text{m}}$$

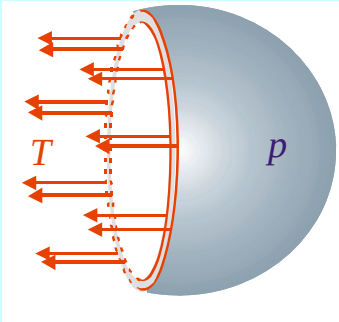
c) Quina és la diferència d'altures als dos braços del manòmetre quan el capil·lar forma una bombolla en aigua a 20ºC?

$$\overline{p}_{màx} = \frac{2\sigma}{r} = \frac{2\cdot 0{,}073\text{ N/m}}{0{,}2\cdot 10^{-3}\text{m}} = 730\text{ Pa}$$

$$\overline{p} = \rho g h \Rightarrow h = \frac{\overline{p}}{\rho g} = \frac{730\text{ Pa}}{1.000\text{ kg/m}^3\cdot 9{,}81\text{m/s}^2} = 0{,}0745\text{ m} = 7{,}45\text{ cm}$$

Exemple 2: *a)* Quina és la pressió manomètrica a l'interior d'una bombolla de sabó de 2 cm de radi formada a partir d'una dissolució de tensió superficial igual a 0,06 N/m? *b)* Si la tensió superficial de la dissolució es mesura mitjançant el mètode descrit a l'exemple anterior, quina és la pressió màxima en un capil·lar de 0,02 cm de radi? Nota: La bombolla de l'apartat *a)* té dues superfícies (interior i exterior) en contacte amb l'aire, mentre que en l'apartat *b)* només hi ha una superfície en contacte amb l'aire.

a) Condició d'equilibri: $T = F$



$T = \sigma l = 4\pi r\sigma$

$F = (p - p_0)\pi r^2$

I si apliquem la condició d'equilibri:

$4\sigma\pi r = (p-p_0)\pi r^2$

$$p - p_0 = \frac{4\sigma}{r} = \frac{4 \cdot 0{,}06\,\text{N/m}}{0{,}02\,\text{m}} = 12\,\text{Pa}$$

b) $\overline{p}_{màx} = \dfrac{2\sigma}{r}$

$$\overline{p}_{màx} = \frac{2\sigma}{r} = \frac{2 \cdot 0{,}06\,\text{N/m}}{0{,}02 \cdot 10^{-2}\,\text{m}} = 600\,\text{Pa}$$

Aplicació: l'ascens de la saba als arbres, pressions negatives

Durant molt de temps no se sabia com pujava la saba fins a les fulles de les sequoies de 60 m o 100 m d'altura. No tenen cap bomba com el cor humà. A més, hi ha obstacles com les bombolles d'aire, microbis, etc.

El descobriment de la llei de Jurin data del principi del segle XVIII. Tot i que a mitjan segle XIX se'n coneixen els mecanismes principals, no és fins al final del segle XX que s'ha entès totalment.

La conducció es fa per:

- Xilemes: Són al tronc, són rígids (cel·lulosa) i estan formats bàsicament per cèl·lules mortes. Hi circula la saba bruta, que és poc rica en sals minerals. El radi dels xilemes és de 5 a 250 μm.
- Floema: Són a les fulles, estan formats per cèl·lules vives i són flexibles. Hi circula saba elaborada, que és rica en sals minerals.

Quin radi cal per sostenir per capil·laritat una columna de H_2O de 100 m d'altura?

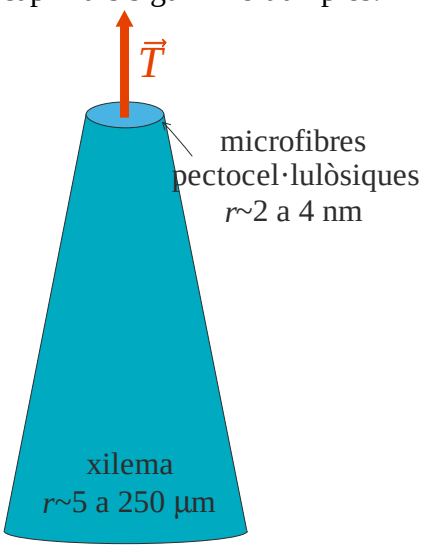
Segons la llei de Jurin: $r = \dfrac{2\sigma\cos\theta_C}{\rho g h} = 1{,}489 \cdot 10^{-7}$ m (vegeu l'exemple de la pàgina 88).

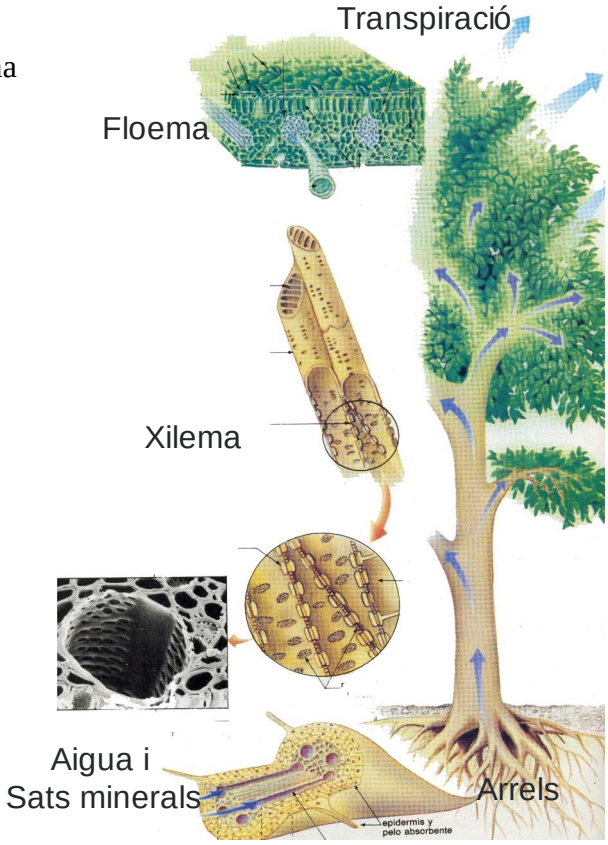
Aquest radi és:
$1{,}489 \cdot 10^{-7}\ \text{m} \approx 0{,}15\,\mu\text{m} << \text{radi del xilema}$

Llavors, com és possible l'ascens de la saba?

A les fulles tenim les microfibres pectocel·lulòsiques:
$r \approx 2 \text{ a } 4\,\text{nm} << 0{,}15\,\mu\text{m}$

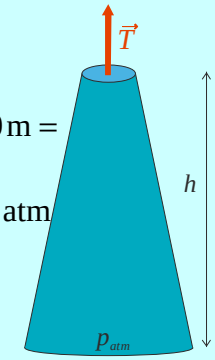
La força de la tensió superficial s'aplica al menisc; per aquesta raó no és cap problema que al tronc els capil·lars siguin molt amples:





Pel que fa al moviment, és degut a l'evaporació de l'aigua a les fulles. Quan s'evapora aigua a les fulles, entra aigua per les arrels, de manera que es manté el nivell. En evaporar-se l'aigua a les fulles, aquesta deixa a les cèl·lules vives els nutrients (sals minerals) que portava dissolts.

<u>Exemple</u>: *a)* Quina és la pressió negativa a les fulles d'un arbre de 20 m d'altura? *b)* I a les fulles d'una sequoia de 100 m d'altura? Suposeu que la densitat de la saba és igual a la de l'aigua.



a)

$$p_{atm} = p_h + \rho g h \Rightarrow p_h = p_{atm} - \rho g h = p_{atm} - 1.000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 20\,\text{m} =$$

$$= p_{atm} - 196.200\,\text{Pa} = 1\text{atm} - 196.200\,\text{Pa}\frac{1\text{atm}}{101.325\,\text{Pa}} = -0{,}935\,\text{atm}$$

b)

$$p_h = p_{atm} - \rho g h = p_{atm} - 1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 100\,\text{m} =$$

$$= p_{atm} - 981.000\,\text{Pa} = 1\text{atm} - 981.000\,\text{Pa}\frac{1\text{atm}}{101.325\,\text{Pa}} = -8{,}674\,\text{atm}$$

Què vol dir pressions negatives? L'aigua no està sotmesa a un esforç de compressió, sinó que és de tracció; per exemple, si omplim una xeringa amb aigua, la tapem i estirem l'èmbol. Aquesta és una situació inestable, si entra aire l'aigua cau.

Com ho fan les plantes per omplir els canals d'aigua i aconseguir pressions negatives? De manera natural gràcies al creixement!! La planta guanya alçària de manera gradual.

Què passa a un xilema si entra aire? Deixa de funcionar, l'aigua ja no pot tornar a pujar. De tota manera, les plantes tenen mecanismes per "tapar forats". Poden aïllar el conducte per on ha entrat aire i desviar el pas per altres conductes.

Qüestions del tema 5

1. Quan s'introdueix un capil·lar de 0,8 mm de diàmetre en metanol, aquest puja fins a una altura de 15 mm. Si l'angle de contacte és zero, calculeu la tensió superficial del metanol (densitat específica: 0,79).

Sol.: 0,0232 N/m

2. Els nutrients de les plantes pugen a través d'uns tubs molt prims anomenats *xilemes*. Cada tub té un radi de 0,01 mm aproximadament. A quina altura s'eleva l'aigua per aquests tubs a causa de l'acció capil·lar, suposant 0 l'angle de contacte? (Tensió superficial de l'aigua: 0,073 N/m.)

Sol.: 1,49 m

3. Quin radi haurien de tenir els capil·lars del xilema dels arbres si la tensió superficial fos l'únic mecanisme que permetés que la saba assolís la copa d'una sequoia de 100 m d'alçària? (Tensió superficial de la saba: 0,073 N/m, angle de contacte: 0.)

Sol.: 1,49 10^{-7} m

4. *a)* Quina és la pressió negativa a les fulles d'un arbre de 20 m d'alçària? *b)* I a les fulles d'una sequoia de 100 m d'alçària? Suposeu que la densitat de la saba és igual a la de l'aigua.

Sol.: *a)* –0,935 atm; *b)* –8,674 atm

5. *a)* Fins a quina altura *h* pujarà l'etanol en un capil·lar de 0,5 mm de radi si l'angle de contacte és 0? *b)* En un experiment fet amb un capil·lar de 0,5 mm de radi d'un cert material s'obté que l'alcohol puja fins a una altura d'1,09 cm. Quin és l'angle de contacte entre l'alcohol i el material del capil·lar? Nota: la tensió superficial de l'etanol és 2,27 10^{-2} N/m, i la densitat és 806 kg/m^3.

Sol.: *a)* 1,15 cm; *b)* 18,5º

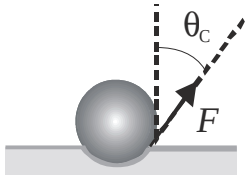
6. S'introdueix en aigua un pot buit que té un petit orifici al fons de 0,1 mm de radi. Si la tensió superficial de l'aigua és de 0,073 N/m, a quina fondària començarà l'aigua a introduir-se dins del pot?

Sol.: 14,9 cm

7. Els agregats de la mida de les sorres són més favorables per al creixement de les plantes que els agregats molt petits (massa aigua) o que els molt grans (poca aigua). Un sòl fet de llim no pot drenar per gravetat perquè els seus porus són molt petits. Quina pressió cal exercir per drenar un sòl de llim si la mida dels porus és de 0,006 mm de diàmetre? Nota: la tensió superficial de l'aigua és 0,073 N/m.

Sol.: 0,5 atm

8. Una petita esfera reposa sobre la superfície d'un líquid (vegeu la figura). *a)* Demostreu que l'angle θ_c està relacionat amb el radi de l'esfera r , amb la seva densitat ρ i amb el coeficient de tensió superficial del líquid σ per a



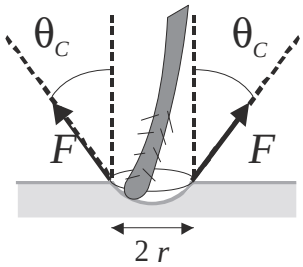
$$\cos^2 \theta_C = \frac{2r^2 \rho g}{3\sigma}$$

Nota: atès que la part de l'esfera submergida és molt petita, podeu negligir la força d'empenta feta pel fluid.

b) Calculeu el radi màxim que pot tenir una esfera de coure perquè pugui estar al damunt de l'aigua sense enfonsar-se. Nota: densitat del coure: 8,93 10^3 kg/m^3.

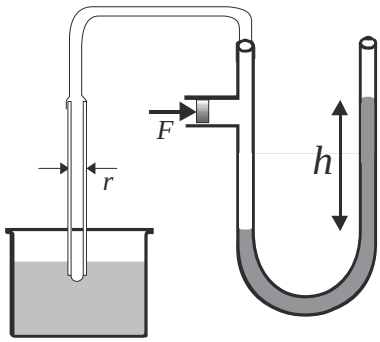
Sol.: *b)* 1,12 mm

9. *a)* La pota d'un insecte aturat sobre l'aigua forma una depressió de radi r = 2 mm i angle 40º. *a)* Quin pes suporta aquesta depressió? *b)* Quina és la massa de l'insecte, suposant que el seu pes es reparteix igual a les sis potes?



Sol.: *a)* 7,0 10^{-4} N; *b)* 0,43 g

10. A la figura adjunta s'esquematitza un muntatge que se sol emprar en la determinació de la tensió superficial d'un líquid. Se submergeix en un líquid un capil·lar de radi r i mitjançant l'aplicació d'una força sobre l'èmbol s'augmenta la pressió dins del capil·lar, de manera que apareix una bombolla a l'extrem inferior del capil·lar. La pressió màxima dins del capil·lar, $p_{màx}$, s'assoleix just abans que la bombolla esclati. Quan s'assoleix aquest valor de la pressió, la bombolla és un hemisferi, tal com s'indica a la figura. *a)* Demostreu que en aquesta situació la pressió manomètrica, $\overline{p}_{màx}$, al capil·lar és:



$$\overline{p}_{màx} = \frac{2\sigma}{r}$$

b) Se submergeix en tetraclorometà un capil·lar de 0,2 mm de radi i es formen bombolles quan la diferència d'altura, h, a les dues branques del manòmetre d'aigua és de 2,75 cm. Quina és la tensió superficial del tetraclorometà? *c)* Quina és la diferència d'altura als dos braços del manòmetre quan el capil·lar forma una bombolla en aigua a 20ºC?

Sol.: *b)* 0,0270 N/m; *c)* 7,45 cm

11. *a)* Quina és la pressió manomètrica a l'interior d'una bombolla de sabó de 2 cm de radi formada a partir d'una dissolució de tensió superficial igual a 0,06 N/m? *b)* Si la tensió superficial de la dissolució es mesura mitjançant el mètode descrit al problema 9, quina és la pressió màxima en un capil·lar de 0,02 cm de radi? Nota: La bombolla de l'apartat *a)* té dues superfícies (interior i exterior) en contacte amb l'aire, mentre que en l'apartat *b)* només hi ha una superfície en contacte amb l'aire.

Sol.: *a)* 1200 Pa; *b)* 600 Pa

12. Un alvèol típic té aproximadament un radi de 50 μm. *a)* Calculeu quina pressió cal desenvolupar per començar a inflar l'alvèol si està recobert amb una mucosa amb σ = 0,05 N/m. *b)* Calculeu la pressió final si el radi màxim un cop inflat és de 100 μm.

Sol.: *a)* 2.000 Pa; *b)* 1.000 Pa

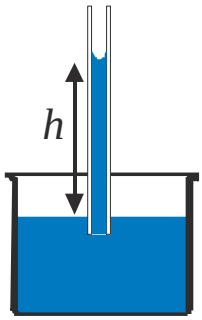
13. Si l'alçada d'un arbre és de 30 m:
    a) quin ha de ser com a màxim el radi de les microfibres pectocelulàsiques de les fulles?
    b) quina és la pressió negativa a les fulles de l'arbre?
    Dades: densitat de la saba 1000 Kg/m^3, tensió superficial de la saba 0,073 N/m, l'angle de contacte és 0 i la pressió atmosfèrica 101325 Pa.

Sol.: *a)* 0,5 μm; *b)* -192.975 Pa

14. Quan la base d'un terròs de sucre es posa en contacte amb la superfície d'un líquid, sense submergir-lo, el líquid ascendeix una alçada de 1,2 cm. Determineu la mida dels porus del terròs de sucre. Dades: densitat del líquid 1.060 kg/m^3, tensió superficial 0,078 N/m i angle de contacte 10º. Nota: en cap moment el terròs de sucre s'enfonsa dins del líquid. El que es fa es apropar el terròs sucre fins que la base inferior d'aquest entre en contacte amb el líquid.

Sol.: 1,23 mm.

15. Col·loquem verticalment un tub capil·lar de 10 cm de llarg i 0,5 mm de diàmetre en contacte amb un recipient amb aigua.
    a) A quina altura s'eleva l'aigua a causa de l'acció capil·lar?
    b) Quina és la pressió manomètrica del líquid en contacte amb el menisc.
    c) Demostreu que en general, si l'angle de contacte és 0º, llavors la diferència de pressió als dos costats del menisc coincideix amb la llei de Laplace.



Dades: densitat de l'aigua 1.000 kg/m^3, tensió superficial de l'aigua 73 10^{-3} N/m i angle de contacte 0º.

Sol.: *a)* 5,95 cm Pa; *b)* $\overline{p} = -\rho g h$

16. Es possible que un sòlid més dens que l'aigua floti en l'aigua?.

6. Dinàmica de fluids ideals

Objectius:

Concepte de fluid ideal
Conceptes de cabal i cabal màssic
Conceptes de flux estacionari, uniforme i no uniforme
Quin és el significat de l'equació de continuïtat?
Descriure l'equació de Bernoulli
A quina velocitat surt el líquid d'un dipòsit gran per un petit orifici?
Descriure l'efecte Venturi
Descriure el venturímetre i la sonda de Prandtl
Com funciona un polvoritzador?
Descriure el vol dels avions i dels ocells

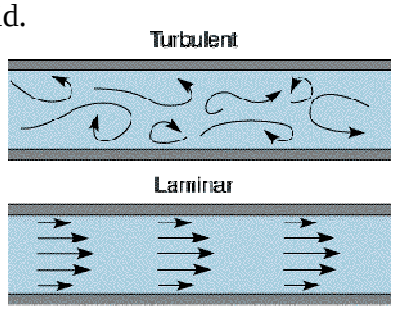
El moviment d'un fluid pot ser extremament complex, de manera que pot ser molt difícil o impossible obtenir expressions i resultats analítics (relacions matemàtiques). Sovint cal recórrer a simulacions numèriques per a elements finits per tal d'obtenir prediccions acurades. Per aquesta raó, ens limitarem a casos senzills però que ens permetran descriure un gran ventall d'aplicacions. D'altra banda, també són el punt de partida per abordar casos més complexos.

Equació de continuïtat, flux estacionari

En aquest tema suposarem que el fluid flueix sense dissipar energia, sense frec. Aquests fluids s'anomenen *no viscosos* o *ideals*. També suposarem que el fluid és *incompressible*, és a dir, que el volum i per tant la densitat es mantenen constants encara que apliquem tensions al fluid. Aquesta és una bona aproximació per a la majoria de líquids. De tota manera, com veurem més endavant, els resultats que obtindrem també es podran aplicar als gasos.

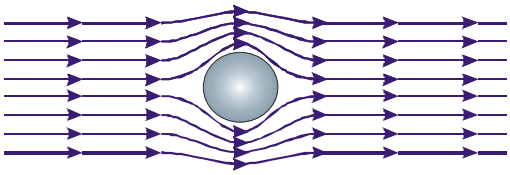
Flux estacionari

El moviment d'un fluid pot ser molt complex; per exemple, tenim el flux turbulent, en què es poden produir canvis sobtats de la velocitat del fluid.

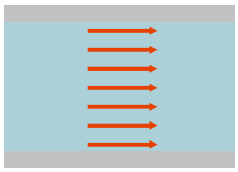


Si la velocitat del fluid en un punt es manté constant, o dit d'una altra manera, si la velocitat només depèn de la posició, el *flux* és *estacionari* o *permanent*.

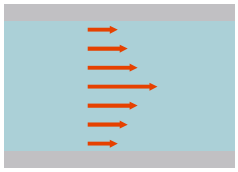
Podem representar el moviment del fluid (flux) a través de les línies de corrent: línies tangents a la velocitat del fluid. En cada punt, la velocitat del fluid és tangent a la línia de corrent que passa per aquest punt:



El flux estacionari pot ser uniforme o no uniforme:



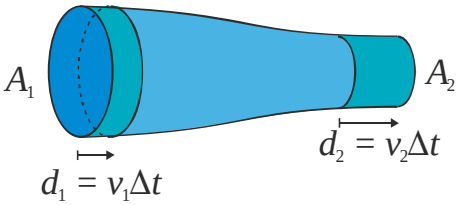
Perfil de velocitats uniforme: La velocitat és la mateixa a tota la secció. Aquesta situació es dóna quan no hi ha viscositat.



Perfil de velocitats no uniforme: La velocitat canvia al llarg de la secció. Està associat a la presència de frec.

Cal tenir en compte que fins i tot en el cas de flux estacionari i uniforme, la velocitat pot canviar d'un punt a l'altre.

Equació de continuïtat



Suposem un fluid incompressible i flux uniforme: $\Delta V_1 = \Delta V_2$ (el volum que surt és igual al volum que entra)

Equació de continuïtat:

$$A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t \Rightarrow A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Si definim el cabal com el volum de fluid que passa per una secció A per unitat de temps:

$$Q \equiv \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{Av\Delta t}{\Delta t} = Av \text{, unitat: } \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

És a dir, el cabal és la velocitat a la qual passa el volum de líquid.

Si expressem l'equació de continuïtat en funció del cabal obtenim:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \Leftrightarrow Q_1 = Q_2$$

És a dir, *si el fluid és incompressible llavors el cabal es manté constant*.

Si el fluid és compressible, pot ser que els volums d'entrada i sortida siguin diferents a causa del canvi de volum del fluid. Aquest és en principi el cas d'un gas. Per exemple, per l'efecte de la compressió pot ser que el volum d'entrada sigui superior al de sortida. Ara bé, quan s'assoleix el règim estacionari, el gas ja no es comprimeix/dilata més. Per tant, si el flux és estacionari, l'equació de continuïtat és vàlida amb independència que tinguem un líquid o un gas (que el fluid sigui incompressible o compressible).

Quan el flux és no uniforme, la velocitat a la secció A no és constant. En aquest cas, el cabal s'expressa com:

$$Q \equiv A\bar{v},\ \bar{v} \equiv \frac{1}{A}\int_A v dA,\ \bar{v} \text{ és la velocitat mitjana a la secció } A$$

i l'equació de continuïtat continua sent vàlida.

Si multipliquem el cabal per la densitat ρ tenim la transferència de massa, és a dir, el cabal màssic, Q_m:

$$Q_m = \rho Q = \frac{dm}{dt}$$

És a dir, el cabal màssic és la massa que passa per unitat de volum o la velocitat a la qual circula la massa del fluid.

Si multipliquem els dos costats de l'equació de continuïtat per ρ tenim:

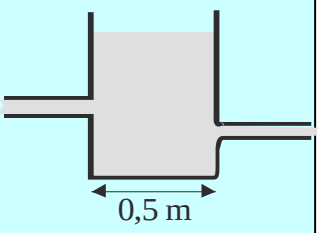
$$\rho Q_1 = \rho Q_2 \Leftrightarrow Q_{m,1} = Q_{m,2}$$

És a dir, que tota la massa que entra per A_1 surt per A_2. L'equació de continuïtat simplement indica que el líquid no desapareix.

D'altra banda, a partir del cabal podem calcular la quantitat de fluid que passa per un tub en un interval de temps Δt:

$$m = \rho \cdot Q \cdot \Delta t$$

<u>Exemple</u>: Al dipòsit de la figura l'aigua entra a una velocitat de 0,5 m/s a través d'una canonada de 0,1 m^2 de secció i desaigua a través d'una canonada amb un cabal constant de 0,2 m^3/s. El dipòsit és cilíndric i el diàmetre de la base és de 0,5 m. Determineu la velocitat a la qual varia el nivell del dipòsit.



cabal que entra = cabal que surt

$$0{,}1\ \text{m}^2 \cdot 0{,}5\ \text{m/s} = Q + 0{,}2\ \text{m}^3/\text{s} \Rightarrow Q = -0{,}15\ \text{m}^3/\text{s}$$

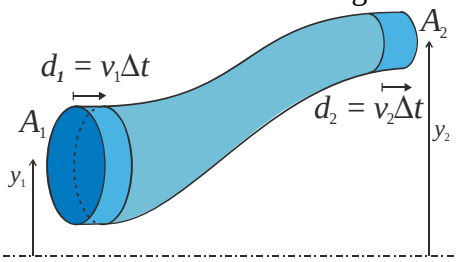
El cabal Q és negatiu, és a dir, el nivell baixa:

$$Q = Av \Rightarrow v = \frac{Q}{A} = \frac{-0{,}15\ \text{m}^3/\text{s}}{\pi(0{,}25\ \text{m})^2} = -0{,}764\ \text{m/s}$$

Equació de Bernoulli: efecte Venturi

Suposem:
- Fluid incompressible → cabal constant
- Fluid ideal → conservació de l'energia
- Flux estacionari → velocitat independent del temps (als gasos equival a un comportament incompressible)

Avaluem la variació d'energia en un interval de temps Δt:



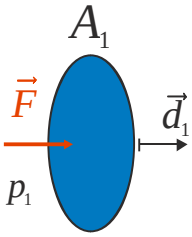
$$W = \Delta E_m = \Delta E_c + \Delta U_g = E_{c,2} - E_{c,1} + U_{g,2} - U_{g,1}$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}\rho Q \Delta t v_2^2 - \frac{1}{2}\rho Q \Delta t v_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\rho Q \Delta t (v_2^2 - v_1^2)$$

$$\Delta Ug = m_2 g y_2 - m_1 g y_1 = \rho Q \Delta t g y_2 - \rho Q \Delta t g y_2 = \rho Q \Delta t g (y_2 - y_1)$$
$$\Delta Ug = m_2 g y_2 - m_1 g y_1 = \rho Q \Delta t g (y_2 - y_1)$$

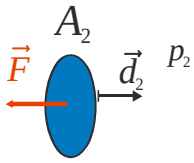
El treball de les forces externes es manifesta a partir de la pressió que exerceix l'exterior sobre el fluid:



$$W_1 = \int \vec{F} d\vec{s}_1 = \int p_1 A_1 \cos 0 d\vec{s}_1 = p_1 A_1 d_1 = p_1 A_1 v_1 \Delta t = Q \Delta t p_1$$

$$W_2 = \int \vec{F} d\vec{s}_2 = \int p_2 A_2 \cos 180^o d\vec{s}_2 = -p_2 A_2 d_2 = -Q \Delta t p_2$$

$$W_{Tot} = W_1 + W_2 = Q \Delta t (p_1 - p_2)$$



Finalment, el balanç total és: $W = \Delta E_m = \Delta E_c + \Delta U_g = E_{c,2} - E_{c,1} + U_{g,2} - U_{g,1}$

$$Q\Delta t(p_1 - p_2) = Q\Delta t(\rho g y_2 - \rho g y_1) + Q\Delta t\left(\frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2\right)$$

Balanç energètic: $Q\Delta t\left(p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2\right) = Q\Delta t\left(p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2\right)$

L'equació de Bernoulli s'obté de dividir el balanç energètic pel terme $Q\Delta t$:

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

O el que és equivalent:

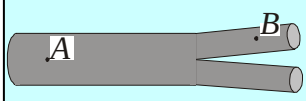
$$p + \rho g y + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constant}$$

Les unitats dels termes de l'equació de Bernoulli són:

$\frac{W}{Q\Delta t} = \frac{Pot}{Q}$, és a dir, els termes de Bernoulli corresponen a una potència per unitat de cabal. Per tant, l'equació de Bernoulli és el balanç de la potència per unitat de cabal.

Les unitats són: $\frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{m}^3/\text{s} \cdot \text{s}} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$, és a dir, unitats de pressió.

<u>Exemple 1</u>:



Al punt *A* de la figura la pressió manomètrica és de 75 kPa i la velocitat de l'aigua que flueix per la canonada cilíndrica de diàmetre 50 mm és d'1,7 m/s. La canonada es desdobla en dues de 25 mm de diàmetre, tot mantenint l'altura.

a) Quins són els cabals als punts *A* i *B*? *b)* Quina és la pressió manomètrica al punt *B*? Suposeu un flux ideal.

a) $Q_A = A_A v_A = \pi(25 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^2)^2 \cdot 1{,}7\,\text{m/s} = 3{,}34 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3/\text{s}$

$$Q_A = 2Q_B \Rightarrow Q_B = \frac{1}{2}Q_A = 1{,}67 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3/\text{s}$$

$$v_B = \frac{Q_B}{A_B} = \frac{1{,}67 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3/\text{s}}{\pi(12{,}5 \cdot 10^{-3}\,\text{m})^2} = 3{,}4\,\text{m/s}$$

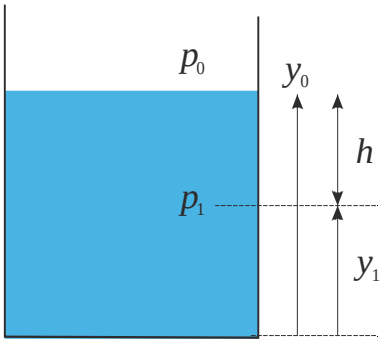
$$b)\ p_A + \rho g y_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \rho g y_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

$$p_A - p_{Atm} + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B - p_{Atm} + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

$$\overline{p}_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = \overline{p}_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 \Rightarrow \overline{p}_B = \overline{p}_A + \frac{1}{2}\rho(v_A^2 - v_B^2)$$

$$\overline{p}_B = 75.000\,\text{Pa} + \frac{1}{2}1.000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}(1{,}7^2 - 3{,}4^2)\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = (75.000 - 4.335)\,\text{Pa} = 70.665\,\text{Pa}$$

Equació fonamental de l'estàtica de fluids



L'equació fonamental de l'estàtica de fluids es pot deduir de l'equació de Bernoulli:

$h = y_0 - y_1$

$v_0 = v_1 = 0$ (estàtica de fluids)

Bernoulli:

$$p_0 + \rho g y_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 = p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2$$

$$p_0 + \rho g y_0 = p_1 + \rho g y_1 \Rightarrow p_1 = p_0 + \rho g(y_0 - y_1) \Rightarrow$$

Equació fonamental de l'estàtica de fluids: $p_1 = p_0 + \rho g h$

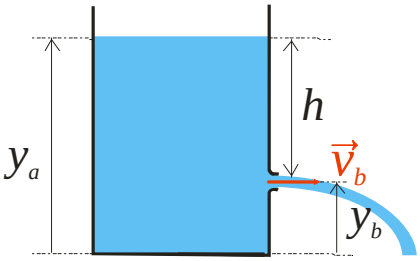
A partir d'aquest resultat s'han introduït els conceptes de pressió estàtica i dinàmica:

$$\underbrace{p + \rho g y}_{\text{Pressió estàtica}} + \underbrace{\frac{1}{2}\rho v^2}_{\text{Pressió dinàmica}}$$

Tots dos termes tenen unitats de pressió, però l'única pressió real de l'equació de Bernoulli és *p*, els termes *pressió estàtica* i *dinàmica* no són pressions reals, simplement és una qüestió de nomenclatura.

Teorema de Torricelli

A partir de l'equació de Bernoulli podem determinar la velocitat a què surt un fluid d'un dipòsit.



$h = y_a - y_b$

$p_a = p_b = p_{atm}$

Continuïtat:

$$A_a v_a = A_b v_b \Rightarrow v_a = v_b \frac{A_b}{A_a}$$

Com que $A_a >> A_b \Rightarrow v_a << v_b \Rightarrow v_a \approx 0$ comparat amb v_b

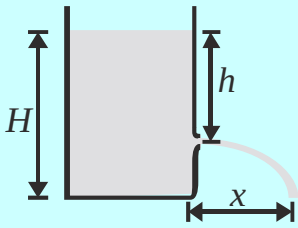
Bernoulli:

$$p_a + \rho g y_a + \frac{1}{2}\rho v_a^2 = p_b + \rho g y_b + \frac{1}{2}\rho v_b^2$$

$$\rho g y_a + 0 = \rho g y_b + \frac{1}{2}\rho v_b^2 \Rightarrow \frac{1}{2}\rho v_b^2 = \rho g (y_a - y_b) \Rightarrow v_b^2 = 2gh$$

Teorema de Torricelli: $v_b = \sqrt{2gh}$ (velocitat de caiguda lliure)

Exemple 2: Al dipòsit de la figura: *a)* Trobeu la distància *x* a la qual l'aigua arriba a terra en funció de *h* i *H*. *b)* Demostreu que si col·loquem l'orifici de sortida a dues alçàries equidistants del punt *H*/2, la distància *x* és la mateixa. *c)* Demostreu que *x* és màxim quan *h* = *H*/2. Quin és el valor d'aquesta distància *x* màxima?



a) Teorema de Torricelli: $v_b = \sqrt{2gh}$

$$\left.\begin{array}{l} y = (H-h) - \frac{1}{2}gt^2 \\ x = \left(\sqrt{2gh}\right)t \end{array}\right\} y = 0 \Rightarrow (H-h) - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \Rightarrow t = \pm\sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$$

$$x = \left(\sqrt{2gh}\right)\sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} = 2\sqrt{h(H-h)}$$

b)

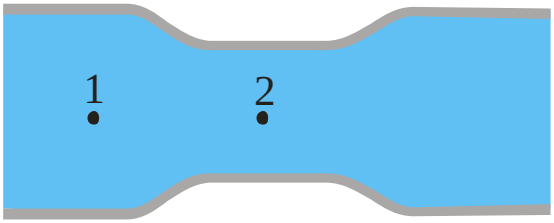
$$\left.\begin{array}{l} h_1 = d + H/2 \\ h_2 = H/2 - d \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_1 = 2\sqrt{(d+H/2)(H-d-H/2)} = 2\sqrt{(H/2+d)(H/2-d)} \\ x_2 = 2\sqrt{(H/2-d)(H-H/2+d)} = 2\sqrt{(H/2-d)(H/2+d)} \end{array}$$

c) $$\frac{dx}{dh} = \frac{d(2\sqrt{h(H-h)})}{dh} = \frac{1}{\sqrt{h(H-h)}}(-h+H-h) = \frac{H-2h}{\sqrt{h(H-h)}}$$

Condició de mínim: $\frac{dx}{dh} = 0 \Rightarrow H - 2h = 0 \Rightarrow h = \frac{H}{2}$

Efecte Venturi

Estrenyiment o obstacle al pas d'un fluid.



$y_1 - y_2$

Continuïtat:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow v_1 = v_2 \frac{A_2}{A_1}$$

Com que $A_1 >> A_2 \Rightarrow v_1 << v_2$

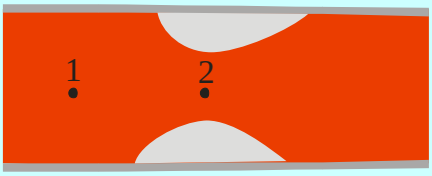
Bernoulli:

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Rightarrow p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Com que $v_1 << v_2 \Rightarrow p_1 >> p_2$

Hi ha una baixada de pressió al punt on es produeix un estrenyiment.

Exemple 3: Una artèria o una vena es poden obstruir parcialment quan alguns materials redueixen el seu radi en un petit tram de la seva longitud. *a)* Varia la velocitat del flux sanguini a la regió obstruïda? *b)* Varia la pressió a la regió obstruïda? *c)* Quin efecte pot tenir el canvi de pressió si tenim en compte que venes i artèries són tubs flexibles?



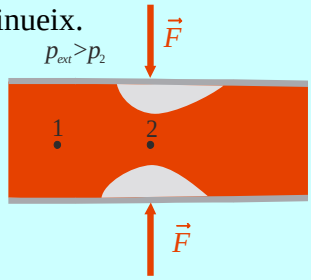
a) Continuïtat: $A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow v_1 = v_2 \dfrac{A_2}{A_1}$

Com que $A_1 >> A_2 \Rightarrow v_2 >> v_1$,
la velocitat augmenta.

b) $p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Rightarrow p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$

Com que $v_1 << v_2 \Rightarrow p_1 >> p_2$, la pressió disminueix.

c) Si la pressió a l'estrenyiment és inferior a la pressió exterior, el resultat és una força neta que tendeix a estrangular el vas sanguini.

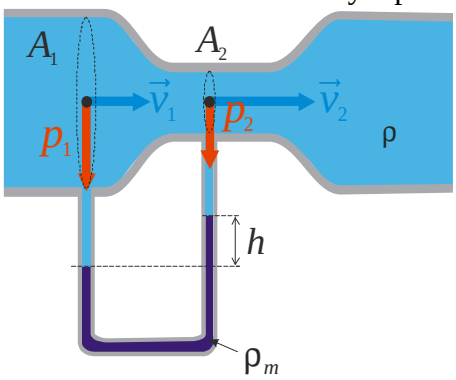


Sondes

Aparells de mesura de la velocitat d'un fluid.

Venturímetre

El venturímetre està dissenyat per mesurar la velocitat dels líquids.



Estàtica de fluids (mesura de la pressió):

$$p_1 + \rho g h = p_2 + \rho_m g h$$

$$p_1 = p_2 + g h(\rho_m - \rho)$$

Continuïtat:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2}$$

Bernoulli:

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Rightarrow p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$p_2 + gh(\rho_m - \rho) + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Rightarrow gh(\rho_m - \rho) = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$$

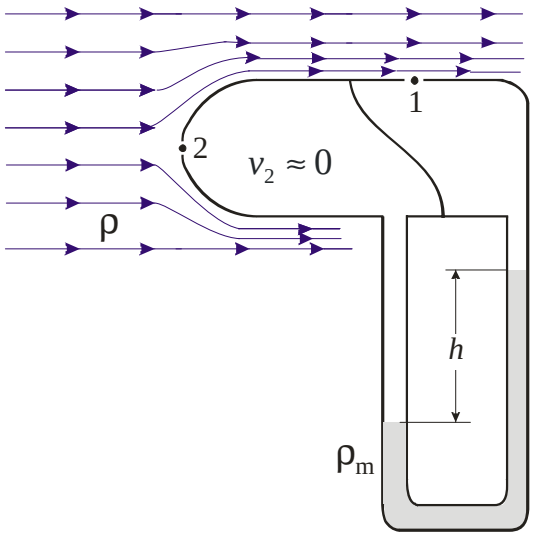
$$gh\left(\frac{\rho_m}{\rho} - 1\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 v_1^2 - v_1^2\right] \Rightarrow gh\left(\frac{\rho_m}{\rho} - 1\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right] v_1^2$$

$$v_1 = \sqrt{2gh\left(\frac{\rho_m}{\rho} - 1\right) \Big/ \left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right]}$$

$$v_1 = ct \cdot \sqrt{h}, \quad ct = \sqrt{2g\left(\frac{\rho_m}{\rho} - 1\right) \Big/ \left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right]}$$

És a dir, la velocitat del fluid és proporcional a l'altura de la columna del líquid manomètric. Per tant, mesurant l'altura *h* podem determinar la velocitat.

La constant depèn de les característiques geomètriques de la sonda. En general, no es calcula aquesta constant, sinó que es fa un calibratge: es fan passar per la sonda cabals coneguts, de manera que podem conèixer v_1 i h. A partir dels valors de v_1 i h determinem la constant *ct*. En general, el calibratge es fa a la mateixa fàbrica que construeix la sonda.



Sonda de Prandtl

La sonda de Prandtl està dissenyada per mesurar la velocitat dels gasos.

El punt 2 és un punt d'estancament: $v_2 \approx 0$

$y_2 \approx y_1$

Estàtica de fluids: $p_2 = p_1 + \rho_m g h$

Bernoulli:

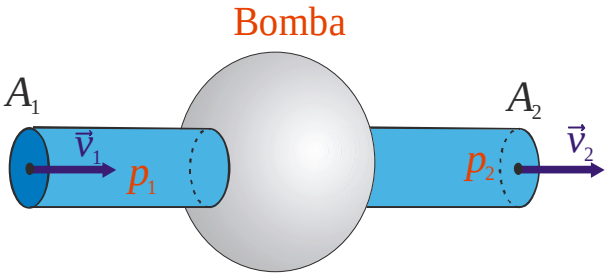
$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Rightarrow p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2$$

Pressió estàtica: p_1, pressió dinàmica: $\frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 - p_1$

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 \text{ i } p_2 = p_1 + \rho_m g h \Rightarrow \rho_m g h = \frac{1}{2}\rho v_1^2$$

I finalment, $v_1 = \sqrt{\frac{2\rho_m g h}{\rho}}$.

Bombes



Continuïtat:

$A_1 v_1 = A_2 v_2$ i $A_1 = A_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow v_2 = v_1$

No hi ha canvi en l'energia cinètica.

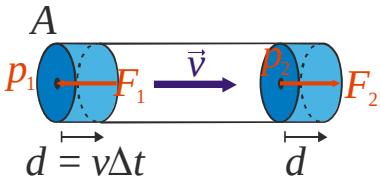
$y_1 = y_2$

No hi ha canvi en l'energia potencial.

El treball que desenvolupa la bomba es tradueix en un augment de la pressió:

$$\Delta p = p_2 - p_1 > 0$$

Segons la tercera llei de Newton, la força que fa la bomba és de magnitud igual i sentit oposat a la que fa el líquid. En un interval Δt,



$$W_1 = \int \vec{F}_1 d\vec{s} = \int p_1 A \cos 180^\circ \, d\vec{s} = -p_1 A d = -p_1 A v \Delta t$$

$$W_2 = \int \vec{F}_2 d\vec{s} = \int p_2 A \cos 0 d\vec{s} = p_2 A d = p_2 A v \Delta t$$

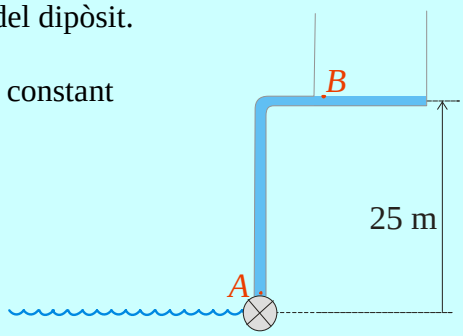
$$W_{Tot} = W_1 + W_2 = A v \Delta t (p_2 - p_1) = Q \Delta t \Delta p$$

I si calculem la potència:

$$Pot = \frac{W}{\Delta t} = Q \Delta p \Rightarrow \Delta p = \frac{Pot}{Q}$$

És a dir, que la diferència de pressió creada per la bomba és el quocient entre la potència desenvolupada i el cabal que fem passar.

<u>Exemple</u>: Volem omplir un dipòsit de 3.000 l de capacitat bombant aigua des d'un riu que està 25 m per sota del nivell del dipòsit. Situem una bomba al nivell del riu, i volem omplir el dipòsit en 3 h utilitzant una canonada de 5 cm de diàmetre. *a)* Quina pressió manomètrica ha de subministrar la bomba? *b)* Quina potència subministra aquesta bomba? *c)* Demostreu que no és possible omplir el dipòsit, amb aquesta bomba ni amb cap altra, si se situa al costat del dipòsit.



a) Continuïtat: secció constant → velocitat constant

$$Q = \frac{V}{\Delta t} = \frac{3\,\text{m}^3}{10.800\,\text{s}} = 2{,}78 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^3/\text{s}$$

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{2{,}78 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^3/\text{s}}{\pi (2{,}5 \cdot 10^{-2}\,\text{m})^2} = 0{,}14\,\text{m/s}$$

$$p_A + \rho g y_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \rho g y_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 \Rightarrow p_A = p_{atm} + \rho g y_B$$

$$p_A - p_{atm} = \rho g y_B = 1.000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} 25\,\text{m} = 245.000\,\text{Pa}$$

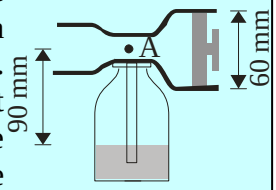
b) $Pot = Q\Delta p = 2{,}78\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^3/s}\cdot 245.000\ \mathrm{Pa} = 68\ \mathrm{W}$

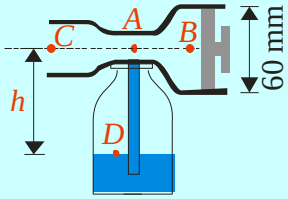
c) $p_A + \rho g y_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \rho g y_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 \Rightarrow p_{atm} = p_B + \rho g y_B$

$p_B = p_{atm} - \rho g y_B = 101.300\,\mathrm{Pa} - 245.000\,\mathrm{Pa} = -143.700\,\mathrm{Pa} < 0$. No!!!!

Aplicacions: polvorització, vol dels avions i dels ocells

Exemple: El polvoritzador de la figura té un èmbol de 60 mm de diàmetre. El nivell d'insecticida està 90 mm per sota del tub d'entrada *A*, amb un diàmetre de 2 mm. Avalueu la velocitat mínima que cal obtenir tot prement l'èmbol perquè l'aire que surti per l'altre extrem contingui insecticida. Suposeu que l'insecticida té la densitat de l'aigua i que el flux d'aire és incompressible i no turbulent.





Estàtica de fluids:

$$\left.\begin{array}{l} p_D = p_{atm} \\ p_D = p_A + \rho_{aigua} g h \end{array}\right\} p_A = p_{atm} - \rho_{aigua} g h$$

Continuïtat:

$$A_A v_A = A_B v_B = A_C v_C \Rightarrow v_B = v_A \frac{A_A}{A_B} \text{ i } v_C = v_A \frac{A_A}{A_C}$$

$$A_B, A_C >> A_A \Rightarrow v_B, v_C << v_A$$

Bernoulli:

$$p_C = p_{atm},\ v_B \approx 0,\ v_C \approx 0 \text{ i } y_A = y_B = y_C$$

$$p_A + \rho g y_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \rho g y_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 = p_C + \rho g y_C + \frac{1}{2}\rho v_C^2$$

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B = p_{atm} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} p_B = p_{atm} \\ p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_{atm} \end{array}\right. \text{ i } p_A = p_{atm} - \rho_{aigua} g h$$

$$p_{atm} - \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_{atm} - \rho_{aigua} g h \Rightarrow v_A = \sqrt{\frac{2\rho_{aigua} g h}{\rho}}$$

$$v_A = \sqrt{\frac{2\rho_{aigua} g h}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1.000\ \mathrm{kg/m^3}\cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}\cdot 0{,}09\ \mathrm{m}}{1{,}293\ \mathrm{kg/m^3}}} = 36{,}9\ \mathrm{m/s}$$

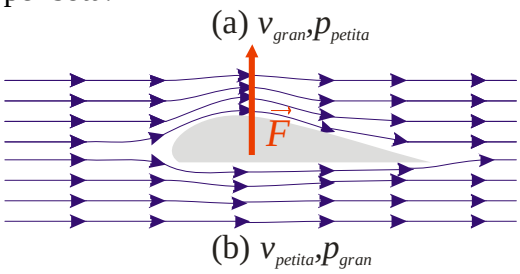
$$A_A v_A = A_B v_B \Rightarrow v_B = v_A \frac{A_A}{A_B} = 36{,}9\,\mathrm{m/s}\,\frac{\pi(1\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m})^2}{\pi(0{,}03\,\mathrm{m})^2} = 0{,}041\,\mathrm{m/s}$$

Vol dels avions i dels ocells

L'estudi precís és molt complex, el que farem és una descripció qualitativa a partir de Bernoulli.

Prenem com a sistema de referència l'avió, d'aquesta manera l'aire és el que es mou i el seu moviment és pertorbat per la presència de l'avió, és a dir, la velocitat de l'aire depèn de la posició.

L'ala d'un avió es dissenya de manera que el pas de l'aire és més estret per sobre que per sota:



$v_a >> v_b$

Per tant, per l'efecte Venturi: $p_a << p_b$

$$p_a + \frac{1}{2}\rho v_a^2 = p_b + \frac{1}{2}\rho v_b^2$$

$$p_b - p_a = \frac{1}{2}\rho(v_a^2 - v_b^2)$$

Com que apareix una diferència de pressions, llavors apareix una força, la força ascencional, que va dirigida de les pressions altes a les baixes i és igual a:

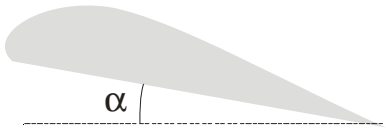
$$F = (p_b - p_a)A_{Ales} = \frac{1}{2}\rho(v_a^2 - v_b^2)A_{Ales}$$

En general,

$F = \frac{1}{2}\rho C v^2 A_{Ales}$, on C és el coeficient de sustentació i v, la velocitat de l'avió.

Si la velocitat és gran, no cal que les ales siguin gaire grans. Aquest és el cas dels petits avions de reacció militars.

El coeficient de sustentació depèn de l'angle d'atac α, en general $C\uparrow$ quan $\alpha\uparrow$.



D'altra banda, els alerons dels cotxes es munten al revés perquè la força empenyi el cotxe contra el sòl i així millori l'adherència.

En el cas dels ocells, podem dir que:

$$A_{ales} \propto l^2$$

$$Pes \propto l^3$$

on l seria una longitud mitjana de l'ocell. Com que la força ascensional ha d'igualar el pes com a mínim:

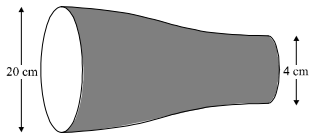
$$F = Pes \Rightarrow \frac{1}{2}Cv^2 A_{ales} = Pes \Rightarrow v^2 l^2 \propto l^3 \Rightarrow v \propto \sqrt{l}$$

Per tant, com més gran és l'ocell, més gran ha de ser la velocitat per sustentar-lo. Per aquesta raó, com més gran és l'ocell més necessita córrer per agafar el vol, i per tant més difícil li és poder volar.

Qüestions del tema 6

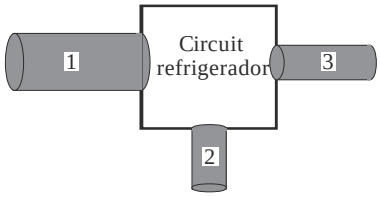
Equació de continuïtat

1. L'aigua entra a una velocitat de 3 m/s per una canonada de secció circular. Al llarg de la canonada la secció es redueix progressivament, de manera que el diàmetre a la secció d'entrada és de 20 cm i a la secció de sortida és igual a 4 cm. Quina és la velocitat de l'aigua a la sortida de la canonada?



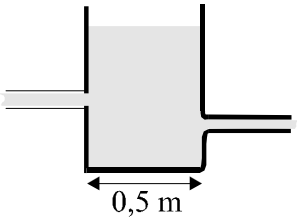
   Sol.: 75 m/s

2. Un motor es refrigera a través de la circulació d'aigua al circuit refrigerador. L'aigua entra per la canonada *1* amb un cabal de 50 l/s i s'evacua per les canonades *2* i *3* amb uns cabals de 20 l/s i 25 l/s. Determineu les pèrdues que es donen per fuites al circuit refrigerador.



   Sol.: 5 l/s

3. Al dipòsit de la figura l'aigua entra a una velocitat de 0,5 m/s a través d'una canonada de 0,1 m^2 de secció i desaigua a través d'una canonada amb un cabal constant de 0,2 m^3/s. El dipòsit és cilíndric i el diàmetre de la base és de 0,5 m. Determineu la velocitat a la qual varia el nivell del dipòsit.



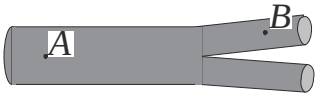
   Sol.: –0,764 m/s

4. Un vaixell de 2.500 kg de massa navega pel mar i xoca contra una roca. Com a resultat de la col·lisió, s'obre una via d'aigua per la que entra un cabal de 0,1 litres/s. Si el volum del casc del vaixell és de 4 m^3, quin temps trigarà en enfonsar-se completament? Dades: densitat de l'aigua de mar 1.029 kg/m^3.

Sol.: 4h 21 min

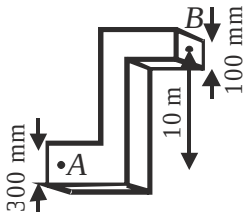
Equació de Bernoulli

5. En el punt *A* de la figura la pressió manomètrica és de 75 kPa i la velocitat de l'aigua que flueix per la canonada cilíndrica de diàmetre 50 mm és d'1,7 m/s. La canonada es desdobla en dues de 25 mm de diàmetre, tot mantenint l'altura. *a)* Quins són els cabals en els punts *A* i *B*? *b)* Quina és la pressió manomètrica en el punt *B*? Suposeu un flux ideal.



   Sol.: *a)* 3,34 10^{-3} m^3/s i 1,67 10^{-3} m^3/s, respectivament; *b)* 71 kPa

6. La figura mostra una part d'una conducció d'aire de secció quadrada. Quina és la pressió manomètrica de l'aire en el punt *B* quan la pressió diferencial a *A* és de 320 Pa i el cabal és 2,2 m^3/s?



Suposeu un flux ideal. La densitat de l'aire és 1,293 kg/m^3.

Sol.: –30.711 Pa

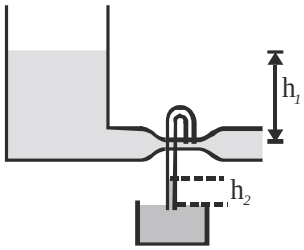
7. Una artèria o una vena es poden obstruir parcialment quan alguns materials redueixen el seu radi en un petit tram de la seva longitud. *a)* Varia la velocitat del flux sanguini a la regió obstruïda? *b)* Varia la pressió a la regió obstruïda? *c)* Quin efecte pot tenir el canvi de pressió si tenim en compte que venes i artèries són tubs flexibles?

   Sol.: *a)* sí; *b)* disminueix; *c)* estrangulament de l'artèria o vena

8. En una artèria s'ha format una placa arterioscleròtica que redueix la secció transversal a 1/5 part del valor normal. *a)* Quina és la velocitat del flux sanguini en aquest punt? *b)* Quina és la disminució de pressió en aquest punt? *c)* Quina és la disminució percentual de la pressió en aquest punt? Dades: la velocitat de la sang en una artèria sana és de prop de 0,12 m/s, la pressió és de 16.050 Pa i la densitat de la sang és 1,056 10^3 kg/m^3.

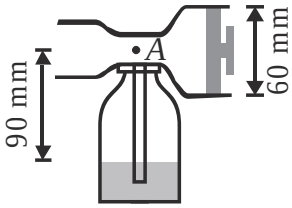
   Sol.: *a)* 0,6 m/s; *b)* 182 Pa; *c)* 1,14%

9. Un dipòsit de gran capacitat té una canonada de sortida al fons (vegeu la figura). Al llarg de la canonada hi ha un estrangulament de diàmetre un terç del de la resta de la canonada. En aquest estrangulament hi ha un tub que porta a un segon dipòsit que conté el mateix fluid que el primer. Quan el fluid estigui fluint vers l'exterior, quina altura h_2 assolirà el fluid al tub? Expresseu el resultat en funció de h_1. Suposeu un flux ideal.



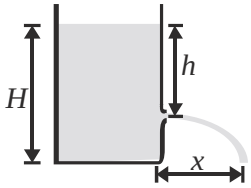
   Sol.: $h_2 = 80\ h_1$

10. El polvoritzador de la figura té un èmbol de 60 mm de diàmetre. El nivell d'insecticida està 90 mm per sota del tub d'entrada *A*, amb un diàmetre de 2 mm. Avalueu la velocitat mínima que cal obtenir prement l'èmbol perquè l'aire que surt per l'altre extrem contingui insecticida. Suposeu que l'insecticida té la densitat de l'aigua i que el flux d'aire és incompressible i no turbulent.



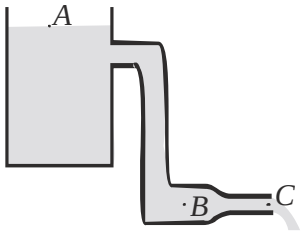
   Sol.: 0,041 m/s

11. Al dipòsit de la figura: *a)* Trobeu la distància *x* a la qual l'aigua arriba a terra en funció de *h* i *H*. *b)* Demostreu que si col·loquem l'orifici de sortida a dues altures equidistants del punt *H*/2, la distància *x* és la mateixa. *c)* Demostreu que *x* és màxim quan *h* = *H*/2. Quin és el valor d'aquesta distància *x* màxima?



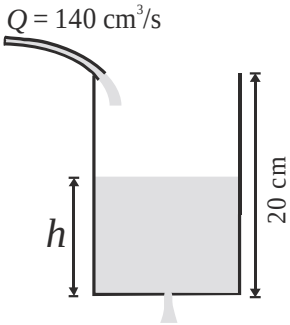
   Sol.: *a)* $x = 2\sqrt{h(H-h)}$; *c)* $x_{màx} = H$

12. Del dipòsit representat a la figura surt aigua contínuament. L'altura del punt *A* és de 10 m; la dels punts *B* i *C* és d'1 m. La secció transversal en el punt *B* és de 0,04 m^2, i en el punt *C* és de 0,02 m^2. L'àrea del dipòsit és molt gran comparada amb les seccions del tub. Calculeu: *a)* el cabal d'aigua que surt i *b)* la pressió manomètrica en el punt *B*.



Sol.: *a)* 0,266 m^3/s; *b)* 66,1 kPa

13. Tenim un dipòsit cilíndric, obert per la seva part superior, de 20 cm d'altura i 10 cm de diàmetre. El dipòsit té un forat circular al centre del fons de secció 1 cm^2. Al dipòsit, que inicialment està buit, s'hi aboca aigua mitjançant una mànega col·locada a la part superior del dipòsit i que subministra un cabal continu de 140 cm^3/s. Quina altura assolirà el nivell d'aigua al dipòsit molt de temps després de posar-hi la mànega?

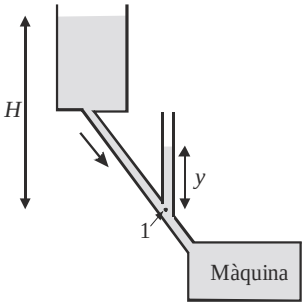


Sol.: 10 cm

14. Volem construir un magatzem al polígon industrial de Vilamalla. Calculeu la força que patirà una paret orientada cap al nord de 2 m d'alçària i 4 m d'amplada un dia de tramuntana forta. Dades: la tramuntana a Vilamalla pot assolir velocitats de fins a 100 km/h en direcció nord-sud, i la densitat de l'aire és de 1,293 kg/m^3.

Sol.: 4.000 N

15. En una indústria convé saber la velocitat del fluid al punt *1* de la figura. Trobeu-la en funció de *g* i les alçàries *y* i *H* (la secció del dipòsit és molt superior a la dels tubs).

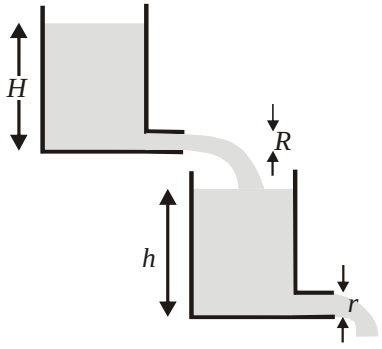


Sol.: $v_1 = \sqrt{2g(H-y)}$

16. Al terrat d'un edifici, a 10 m d'altura, hi ha un gran dipòsit d'aigua ple fins a un nivell d'1 m per sobre la seva base. L'aigua arriba a una aixeta situada al segon pis, a 4 m del sòl, després de baixar fins al nivell del sòl, lloc on el tub té una secció de 5 cm^2. La secció de l'aixeta és de 2 cm^2. *a)* Quina és la velocitat de sortida de l'aigua per l'aixeta? *b)* Quin és el cabal de sortida? *c)* Quina pressió marca un manòmetre situat al nivell del sòl?

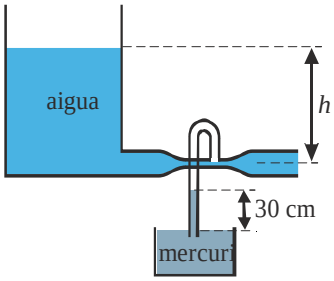
Sol.: *a)* 11,7 m/s; *b)* 2,34 l/s; *c)* 96,8 kPa

17. El dipòsit superior conté aigua fins al nivell constant *H*, i desaigua en un segon dipòsit a través d'un forat de radi *R*. El segon dipòsit desaigua per un forat de radi *r* (vegeu la figura). Quin és el nivell d'equilibri *h* al dipòsit inferior?



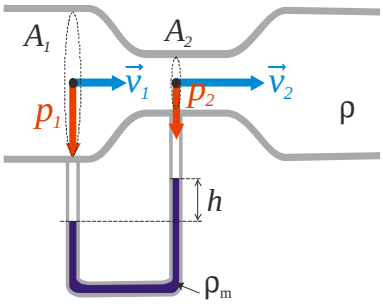
Sol.: $h = H\left(\frac{R}{r}\right)^4$

18. Un dipòsit de gran capacitat conté aigua (densitat 1.000 kg/m^3) i té una canonada de sortida al fons (vegeu la figura). La canonada té una secció constant 100 cm^2 excepte en un estrangulament on la secció és de 20 cm^2. En aquest estrangulament hi ha un tub que porta a un segon dipòsit que conté mercuri (densitat 13.600 kg/m^3). Si l'alçada del mercuri en aquest tub és de 30 cm. *a)* Quina és la velocitat de l'aigua a al sortida de la canonada? *b)* Quina és l'alçada del nivell del dipòsit (*h* a la figura)? Suposeu que l'aigua es comporta com un fluid ideal.



Sol.: *a)* 1,826 m/s; *b)* 17 cm.

19. Es fa servir un venturímetre per mesurar la velocitat de l'aire, v_1, dins d'una canonada. Per mesurar la diferència de pressió entre la canonada i el pas estret es fa servir un manòmetre d'alcohol. La relació entre la secció de la canonada i el pas estret A_1/A_2=4.
a) Quina és la diferència d'alçada entre les dues columnes d'alcohol, *h*, quan la velocitat de l'aire és v_1=10 m/s.
b) Si degut a la acumulació de brutícia es tapona parcialment el pas estret de manera que A_1/A_2=5. Quin és l'error en la mesura de la velocitat quan la velocitat de l'aire és v_1=10 m/s.
Dades: densitat de l'aire ρ=1,3 kg/m^3 i densitat de l'alcohol ρ_m=790 kg/m^3



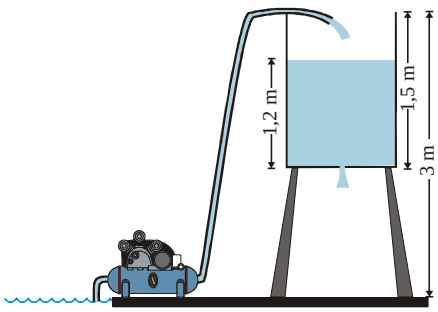
Sol.: *a)* 12,6 cm; *b)* 26,5%.

Bombes

20. Una font dissenyada per produir una columna vertical d'aigua de 12 m d'altura té un bec d'1 cm de diàmetre arran de terra. La bomba d'aigua està a 3 m sota terra. El conducte fins al bec té 2 cm de diàmetre. *a)* Quina és la pressió que ha de subministrar la bomba? *b)* Quina hauria de ser la potència de la bomba per fer funcionar 25 fonts simultàniament? Negligiu la viscositat de l'aigua.

Sol.: *a)* 2,38 atm; *b)* 4,19 kW

21. Tenim un dipòsit cilíndric, obert per la seva part superior, de 1,5 m d'altura. El dipòsit té un forat circular al centre del fons de secció 100 cm^2. Al dipòsit, que inicialment està buit, a la part superior del dipòsit s'hi aboca aigua (densitat 1.000 kg/m^3) mitjançant una mànega de secció constant que extreu aigua de la superfície d'un embassament mitjançant una bomba. La manega aboca l'aigua 3 m per sobre del nivell del embassament. Molt de temps després de posar-hi la mànega l'altura del nivell d'aigua al dipòsit no varia i és de 1,2 m. Quina potència desenvolupa la bomba? Suposeu que l'aigua es comporta com un fluid ideal.

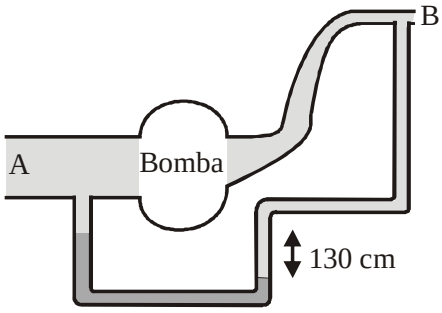


Sol.: 1430 W

22. Volem omplir un dipòsit de 3.000 l de capacitat bombant aigua des d'un riu que està 25 m per sota del nivell del dipòsit. Situem una bomba al nivell del riu, i volem omplir el dipòsit en 3 h utilitzant una canonada de 5 cm de diàmetre. *a)* Quina pressió manomètrica ha de subministrar la bomba? *b)* Quina potència subministra aquesta bomba? *c)* Demostreu que no és possible omplir el dipòsit, amb aquesta bomba ni amb cap altra, si se situa al costat del dipòsit.

    Sol.: *a)* 245 kPa; *b)* 68 W

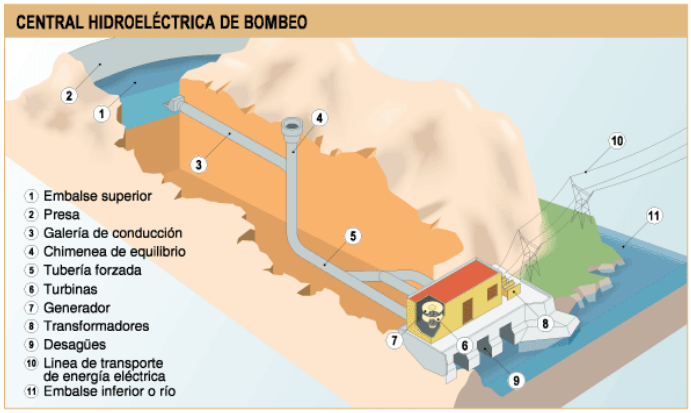
23. La bomba de la figura subministra contínuament un cabal d'aigua entre els punts *A* i *B* de 100 l/s (l'aigua entra pel punt *A* i surt pel punt *B*). Les canonades de la figura tenen secció circular. El diàmetre de la secció al punt *A* és de 8" i al punt *B* de 6". Per tal de calcular la potència subministrada per la bomba es connecta un manòmetre de mercuri entre els punts *A* i *B*. L'altura de la columna de mercuri és de 130 cm. Determineu la potència subministrada per la bomba. Dada: 1" = 2,54 cm



    Sol.: 23,23 CV

24. Un dels problemes de la gestió de la xarxa elèctrica és emmagatzemar energia quan hi ha sobreproducció i recuperar-la quan hi ha un augment sobtat de la demanda. Una solució consisteix en bombejar aigua des d'un embassament inferior cap un embassament superior quan tenim sobreproducció i desaiguar fent passar l'aigua per unes turbines quan tenim un augment de la demanda.
    a) Si es produeix un pic de producció que dona un excés de 10^6 W durant una hora. En total, quanta aigua es traspassarà cap a l'embassament superior durant aquesta hora?
    b) Si desaigüem, quina és la velocitat amb la que arriba l'aigua a les turbines, si aquestes es troben a l'alçada del embassament inferior i estan a pressió atmosfèrica.
    Dades: densitat de l'aigua 1000 Kg/m^3, diferència d'alçada entre els dos embassaments 100 m, per connectar els dos embassaments es fa servir una canonada de secció constant de 4 m^2, negligiu les pèrdues degudes a la fricció i a la viscositat i suposeu que les bombes aprofiten tota la potència elèctrica sense pèrdues.

    Central hidroelèctrica de bombeig:
    (1) embassament superior
    (6) turbines
    (11)embassament superior



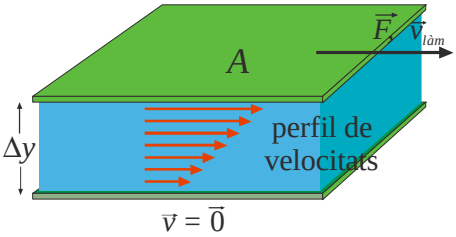
7. Dinàmica de fluids viscosos

Objectius:

Què és la viscositat i la viscositat cinemàtica?
Descriure el flux laminar i turbulent. Què és el nombre de Reynolds?
Descriure el flux a través d'una canonada, concepte de resistència al flux. Llei de Poiseuille
Potència dissipada pel flux a través d'una canonada
Descriure el moviment de sòlids a l'interior d'un fluid. Llei de Stokes
Descriure els processos de centrifugació i sedimentació per a la separació de molècules

Viscositat

Els fluids reals experimenten forces de fricció internes. Aquestes forces són responsables de les pèrdues d'energia. Quan aquestes pèrdues són significatives, l'equació de Bernoulli falla. D'altra banda, aquestes forces només apareixen quan el fluid es mou.



Si situem un líquid entre dues làmines paral·leles i apliquem un esforç de cisalla (transversal) sobre una làmina, de manera que aquesta es posa en moviment, i mantenim aturada l'altra làmina, s'observa l'aparició d'un perfil de velocitats lineal:

$\frac{dv}{dy} = \frac{\Delta v}{\Delta y}$, on $\Delta v = v_{lam} - 0$ i $v_{làm}$ és la velocitat de la làmina que es mou.

D'altra banda, s'observa que la força que cal aplicar per mantenir la làmina en moviment a velocitat constant F és proporcional a l'àrea A de la làmina i al gradient de velocitats $\Delta v / \Delta y$:

$$F \propto A \text{ i } \Delta v / \Delta y$$

El coeficient de proporcionalitat ens dóna una mesura de la dificultat de mantenir la làmina en moviment, o el que és equivalent, una mesura de la resistència que oposa el fluid al moviment. Aquest coeficient és la viscositat, η:

$$F \equiv \eta A \frac{dv}{dy} = \eta A \frac{\Delta v}{\Delta y}$$

Unitats: $\eta = \frac{F}{A}\frac{\Delta y}{\Delta v} = \frac{[\mathrm{M}][\mathrm{L}]/[\mathrm{T}]^2}{[\mathrm{L}]^2}\frac{[\mathrm{L}]}{[\mathrm{L}]/[\mathrm{T}]} = \frac{[\mathrm{M}]}{[\mathrm{L}][\mathrm{T}]}$

En SI: $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m \cdot s}}$ o $\frac{\mathrm{N \cdot s}}{\mathrm{m}^2}$ o $\mathrm{Pa \cdot s}$

S'utilitzen molt les unitats del sistema CGS:

$$\left.\begin{array}{l} 1\,\text{poise} = 1\dfrac{\text{dina}\cdot\text{s}}{\text{cm}^2} \\ \text{i el cp, centipoise}: 100\ \text{cp} = 1\ \text{poise} \end{array}\right\} \quad 1\ \text{Pa}\cdot\text{s} = 10\ \text{poise}$$

Alguns valors:

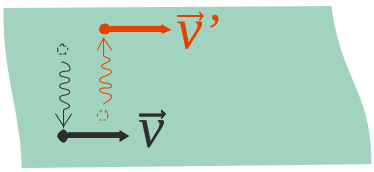
Fluid	Temperatura ºC	Viscositat Pa·s
Oli lubrificant	16	113 10^{-3}
	38	34 10^{-3}
	100	4,9 10^{-3}
Acetona	25	0,316 10^{-3}
Etanol	20	1,2 10^{-3}
Èter	20	0,233 10^{-3}
Glicerina	20	1.490 10^{-3}
Mercuri	20	1,55 10^{-3}
Metà	20	0,0109 10^{-3}
Vapor d'aigua	100	0,0125 10^{-3}
Sang	20	3,015 10^{-3}
	37	2,084 10^{-3}

La η dels gasos << η dels líquids.

La η dels gasos ↑ quan T↑; en canvi, la η dels líquids ↓ quan T↑.

Diferent origen de la viscositat en gasos i líquids:

- η dels líquids. Forces de cohesió entre molècules. Enllaç químic. S'afebleix quan T↑.
- η dels gasos. Intercanvi de molècules entre diferents capes del fluid, és a dir, és el resultat de l'activitat molecular i augmenta quan T↑.



Sovint s'utilitza la viscositat cinemàtica:

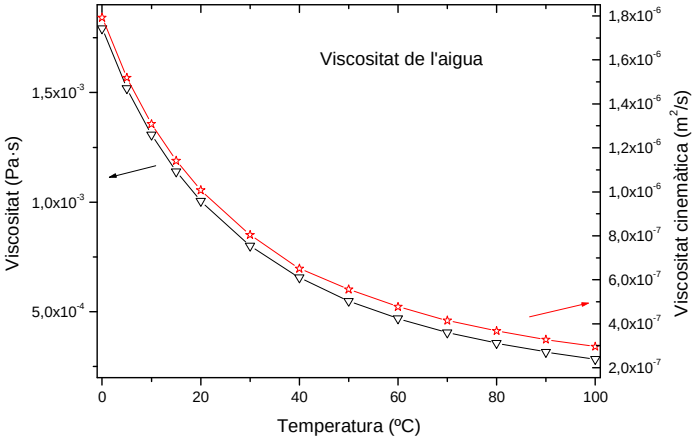
$$\nu \equiv \frac{\eta}{\rho}, \text{ unitats: } \frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}\cdot\frac{\text{m}^3}{\text{kg}} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

Cal tenir en compte que tant la viscositat cinemàtica com la viscositat només apareixen quan el fluid està en moviment i que ambdues representen el mateix fenomen.

La densitat ρ depèn de la temperatura T. A més a més, en els gasos ρ també depèn de la pressió p, llavors la relació entre η i ν no és lineal, sinó que depèn de T (i en gasos de p).

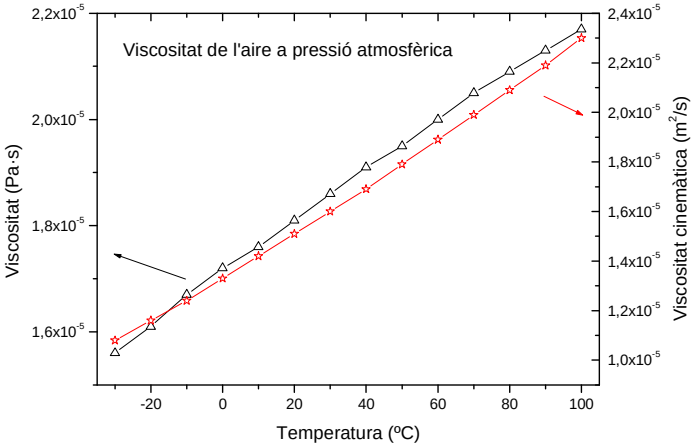
Viscositat i viscositat cinemàtica de l'aigua:

Temperatura ºC	Viscositat ($N \cdot s/m^2$)	Viscositat cinemàtica (m^2/s)
0	$1{,}792\ 10^{-3}$	$1{,}792\ 10^{-6}$
5	$1{,}519\ 10^{-3}$	$1{,}519\ 10^{-6}$
10	$1{,}308\ 10^{-3}$	$1{,}308\ 10^{-6}$
15	$1{,}140\ 10^{-3}$	$1{,}141\ 10^{-6}$
20	$1{,}005\ 10^{-3}$	$1{,}007\ 10^{-6}$
30	$0{,}801\ 10^{-3}$	$0{,}804\ 10^{-6}$
40	$0{,}656\ 10^{-3}$	$0{,}651\ 10^{-6}$
50	$0{,}549\ 10^{-3}$	$0{,}556\ 10^{-6}$
60	$0{,}469\ 10^{-3}$	$0{,}477\ 10^{-6}$
70	$0{,}406\ 10^{-3}$	$0{,}415\ 10^{-6}$
80	$0{,}357\ 10^{-3}$	$0{,}367\ 10^{-6}$
90	$0{,}317\ 10^{-3}$	$0{,}328\ 10^{-6}$
100	$0{,}284\ 10^{-3}$	$0{,}296\ 10^{-6}$

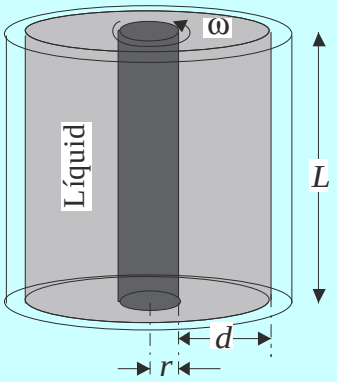


Viscositat i viscositat cinemàtica de l'aire a pressió atmosfèrica:

Temperatura ºC	Viscositat ($N \cdot s/m^2$)	Viscositat cinemàtica (m^2/s)
-30	$1{,}56\ 10^{-5}$	$1{,}08\ 10^{-5}$
-20	$1{,}61\ 10^{-5}$	$1{,}16\ 10^{-5}$
-10	$1{,}67\ 10^{-5}$	$1{,}24\ 10^{-5}$
0	$1{,}72\ 10^{-5}$	$1{,}33\ 10^{-5}$
10	$1{,}76\ 10^{-5}$	$1{,}42\ 10^{-5}$
20	$1{,}81\ 10^{-5}$	$1{,}51\ 10^{-5}$
30	$1{,}86\ 10^{-5}$	$1{,}60\ 10^{-5}$
40	$1{,}91\ 10^{-5}$	$1{,}69\ 10^{-5}$
50	$1{,}95\ 10^{-5}$	$1{,}79\ 10^{-5}$
60	$2{,}00\ 10^{-5}$	$1{,}89\ 10^{-5}$
70	$2{,}05\ 10^{-5}$	$1{,}99\ 10^{-5}$
80	$2{,}09\ 10^{-5}$	$2{,}09\ 10^{-5}$
90	$2{,}13\ 10^{-5}$	$2{,}19\ 10^{-5}$
100	$2{,}17\ 10^{-5}$	$2{,}30\ 10^{-5}$
200	$2{,}57\ 10^{-5}$	$3{,}45\ 10^{-5}$
300	$2{,}93\ 10^{-5}$	$4{,}75\ 10^{-5}$



Exemple: Per mesurar la viscositat s'utilitza un aparell que consisteix en un cilindre buit al centre del qual es col·loca un cilindre massís de radi r i longitud L, tal com s'indica a la figura adjunta. El cilindre exterior està fix, mentre que el cilindre interior pot girar sota l'acció d'un parell de forces. *a)* Demostreu que el parell de forces M que cal aplicar perquè el cilindre giri a una velocitat angular ω és:



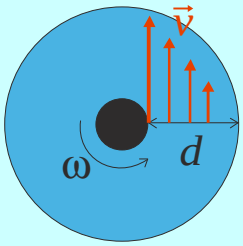
$$M = \frac{2\pi r^3 L}{d}\eta\omega .$$

b) La viscositat s'obté mesurant el parell de forces i la velocitat angular. Les dimensions del viscosímetre són L = 50 cm, d = 1 cm, r = 0,5 cm. Si a l'interior col·loquem un oli que està a 20ºC, la velocitat angular és de 3,5 rad/s i el parell de forces aplicat és igual a 1,36 10^{-4} Nm, quina és la viscositat d'aquest oli a 20ºC?

a) $$F \equiv \eta A\frac{dv}{dy} = \eta A\frac{\Delta v}{\Delta y} = \eta 2\pi r L\frac{\omega r - 0}{d}$$

$$M = rF \Rightarrow F = \frac{M}{r}$$

$$\eta 2\pi r^2 L\frac{\omega}{d} = \frac{M}{r} \Rightarrow M = \frac{2\pi r^3 L}{d}\eta\omega$$



b)

$$\eta = M\frac{d}{2\pi r^3 L\omega} = 1{,}36\times10^{-4}\,\text{Nm}\frac{0{,}01\,\text{m}}{2\pi(0{,}005\,\text{m})^3 0{,}5\,\text{m}\,3{,}5\,\text{rad/s}} = 0{,}989\frac{\text{N s}}{\text{m}^2} = 0{,}989\,\text{Pa}\cdot\text{s}$$

Flux laminar i turbulent: nombre de Reynolds

Per a velocitats petites el flux es troba en règim laminar, si la velocitat augmenta apareixen remolins, el flux és turbulent i la dissipació d'energia augmenta considerablement.

Quatre factors determinen l'aparició del règim turbulent. Aquests factors es poden agrupar en un únic paràmetre anomenat *nombre de Reynolds*. Per a una canonada, el nombre de Reynolds és:

$$N_R = \frac{\rho\bar{v}D}{\eta} = \frac{\bar{v}D}{\nu}$$

on D és el diàmetre del tub i $\bar{v}$ és la velocitat mitjana a la secció.

Unitats: $$\frac{\frac{[\text{M}]}{[\text{L}]^3}\cdot\frac{[\text{L}]}{[\text{T}]}[\text{L}]\frac{[\text{M}]}{[\text{L}][\text{T}]}}{\frac{[\text{M}]}{[\text{L}][\text{T}]}\frac{[\text{M}]}{[\text{L}][\text{T}]}} = 1$$, és un paràmetre adimensional.

Per a un tub rugós s'ha trobat experimentalment:

$0 < N_R < 2.000$, règim laminar

$2.000 < N_R < 3.000$, règim intermitent, se succeeixen règims laminars i turbulents, també es coneix amb el nom de *règim inestable*.

$3.000 < N_R$, règim turbulent

Valor crític en un tub rugós: $N_R = 2.000$

Exemple 1: Demostreu que en un tub de radi r pel qual flueix un cabal Q d'un fluid de densitat ρ i viscositat η el nombre de Reynolds es pot expressar de la manera següent: $N_R = \dfrac{2Q\rho}{\pi r \eta}$

$$\left.\begin{array}{l} Q = \pi r^2 \bar{v} \Rightarrow \bar{v} = \dfrac{Q}{\pi r^2} \\ N_R = \dfrac{\rho \bar{v} D}{\eta} = \dfrac{\rho \bar{v} 2r}{\eta} \end{array}\right\} \Rightarrow N_R = \frac{\rho 2r}{\eta}\frac{Q}{\pi r^2} = \frac{2Q\rho}{\pi r \eta}$$

Exemple 2: Quan el flux és turbulent es produeix més dissipació d'energia en forma de soroll i calor. *a)* Quin és el màxim cabal d'aigua que pot circular per una canonada d'1 cm de radi mantenint un flux laminar? Suposeu que la temperatura de l'aigua és de 20ºC. *b)* Si tenim en compte que la viscositat de l'aigua disminueix considerablement en augmentar la temperatura, quan és més fàcil que les canonades de la conducció d'aigua facin soroll, a l'estiu o a l'hivern? Dades: a 20ºC la viscositat de l'aigua és d'1,005 cp i la densitat, de 998,2 kg/m^3.

a)

$$N_{R,màx} = 2.000 = \frac{2Q\rho}{\pi r \eta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_{màx} = 2.000\frac{\pi r \eta}{2\rho} = 2.000\frac{\pi \cdot 0{,}01\text{m} \cdot 1{,}005 \cdot 10^{-3}\text{Pa}\cdot\text{s}}{2 \cdot 998{,}2\ \text{kg/m}^3} = 3{,}163 \cdot 10^{-5}\text{m}^3/\text{s}$$

b)

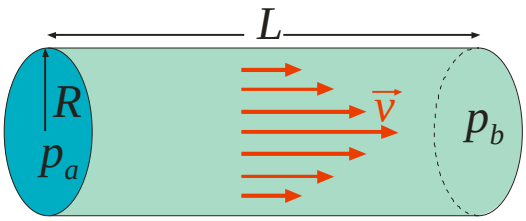
$N_R = \dfrac{2Q\rho}{\pi r \eta}$, si $\eta \downarrow \Rightarrow N_R \uparrow$ per tant, és més fàcil que el règim sigui turbulent quan η és més petit, és a dir, a l'estiu ($T\uparrow$).

Flux en una canonada: llei de Poiseuille

Tant si el flux és laminar com turbulent l'equació de continuïtat és vàlida:

$$Q = A\bar{v} = \text{constant}$$

Per a una canonada de longitud L i radi R per la qual circula un cabal $Q = A\bar{v}$, es pot demostrar (vegeu al final del capítol) que si el flux és laminar llavors hi ha una caiguda de pressió a causa de les forces de fricció viscoses:



$$\Delta p = p_a - p_b = \frac{8\eta L}{R^2}\bar{v} = \frac{8\eta L}{\pi R^4}Q$$

La relació anterior és l'equació de Poiseuille.

La pèrdua d'energia a causa de la fricció es tradueix en una caiguda de pressió, és a dir, la canonada oposa una resistència al pas del fluid, R_f:

$$\Delta p = R_f Q, \quad R_f = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$$

La relació anterior es pot escriure com:

$$Q = \frac{\Delta p}{R_f} \text{ (noteu la similitud amb la llei d'Ohm } I = \frac{\Delta V}{R_f}\text{)}$$

És a dir, que per mantenir un fluid en moviment cal l'aportació d'energia des de l'exterior (realització d'un treball extern):

Δp, causa que provoca el moviment (treball exterior)
Q, mesura del moviment del fluid
R_f, oposició al moviment del fluid

Aquest treball exterior el pot subministrar una bomba o el camp gravitatori (desnivell). Per exemple, als rius, el moviment del fluid el provoca el treball que fa el camp gravitatori. La disminució d'energia potencial gravitatòria deguda al descens del fluid es tradueix en energia cinètica (moviment del fluid) i energia dissipada en forma de calor i so (fricció viscosa).

Podem observar que: $R_f \begin{cases} \uparrow \text{ quan } L \uparrow \\ \downarrow \text{ quan } R \uparrow \text{ (molt ràpidament, elevat a 4)} \end{cases}$

Als tubs capil·lars, R petit, la resistència al flux, R_f, és molt gran.

Què passa quan el flux és turbulent?

La relació $Q = \frac{\Delta p}{R_f}$ continua sent vàlida; ara bé, la relació de Poiseuille ja no ho és i per tant no podem fer servir Poiseuille per calcular la resistència al flux, R_f. R_f es determina experimentalment o numèricament. També es compleix que $R_f\uparrow$ quan $L\uparrow$ o $R\downarrow$.

<u>Exemple 1</u>: *a)* Quina és la resistència al pas de l'aigua d'un capil·lar de vidre de 20 cm de longitud i 0,06 cm de radi? *b)* Quin és el cabal que passa a través del capil·lar quan la diferència de pressió entre els seus extrems és de 15 cm de H_2O? *c)* Quina és la diferència de pressió quan el flux és de 0,5 cm^3/s? Dades: la viscositat de l'aigua a 20ºC és d'1,005 cp i suposeu que el flux és laminar.

$$a)\ R_f = \frac{8\eta L}{\pi R^4} = \frac{8(1{,}005\cdot 10^{-3}\ \text{Pa}\cdot\text{s})\cdot(20\cdot 10^{-2}\ \text{m})}{\pi(0{,}06\cdot 10^{-2}\ \text{m})^4} = 3{,}949\cdot 10^9\ \frac{\text{Pa}\cdot\text{s}}{\text{m}^3}$$

$$b)\ \Delta p = \rho g h = 1.000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}0{,}15\ \text{m} = 1.470\,\text{Pa}$$

$$Q = \frac{\Delta p}{R_f} = \frac{1.470\ \text{Pa}}{3{,}949\cdot 10^9\ \text{Pa}\cdot\text{s/m}^3} = 3{,}72\cdot 10^{-7}\ \text{m}^3/\text{s} = 0{,}372\,\text{cm}^3/\text{s}$$

$$c)\ \Delta p = R_f Q = 3{,}949\cdot 10^9\ \text{Pa}\cdot\text{s/m}^3\cdot 0{,}5\cdot 10^{-6}\ \text{m}^3/\text{s} = 1.975\ \text{Pa}$$

Potència dissipada?

$$Pot = Q \cdot \Delta p = Q^2 \cdot R_f = \frac{\Delta p^2}{R_f}$$ (noteu la similitud amb la potència dissipada per l'efecte Joule en resistències elèctriques)

<u>Exemple 2</u>: Per regar un camp, un pagès necessita fer passar un cabal de 100 l/s per una canonada de 10 m de llargada i 5 cm de diàmetre. Per aconseguir-ho ha de connectar una bomba a la sèquia. Quina potència haurà de subministrar aquesta bomba? Dada: a 20ºC la viscositat de l'aigua és d'1,005 cp i suposeu que el flux és laminar.

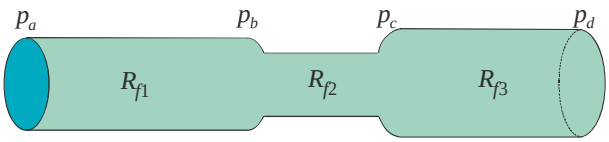
$$R_f = \frac{8\eta L}{\pi R^4} = \frac{8(1{,}005 \cdot 10^{-3}\ \text{Pa} \cdot \text{s}) \cdot (10\ \text{m})}{\pi (2{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{m})^4} = 65.516\ \frac{\text{Pa} \cdot \text{s}}{\text{m}^3}$$

$$Q = 100 \frac{\text{dm}^3}{s} \cdot \left(\frac{1\text{m}}{10\,\text{dm}}\right)^3 = 100 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{s} = 0{,}1\text{m}^3/\text{s}$$

$$\Delta p = R_f Q = 65.516\ \frac{\text{Pa} \cdot \text{s}}{\text{m}^3} \cdot 0{,}1\text{m}^3/\text{s} = 6.552\ \text{Pa}$$

$$Pot = Q^2 \cdot R_f = \left(0{,}1\text{m}^3/\text{s}\right)^2 65.516\ \frac{\text{Pa} \cdot \text{s}}{\text{m}^3} = 655\ \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^3}{\text{s}} = 655\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{s}} = 655\,\text{W}$$

Combinació en sèrie de canonades de diferent secció (resistències en sèrie):



La caiguda de pressió és la suma de les pèrdues a cada canonada:
$\Delta p = p_d - p_a = p_d - p_c + p_c - p_b + p_b - p_a = \Delta p_3 + \Delta p_2 + \Delta p_1$

D'altra banda, en una canonada: $\Delta p = R_f Q$

Llavors:
$\Delta p = R_{f3} Q_3 + R_{f2} Q_2 + R_{f1} Q_1$

I el cabal és constant: $Q = Q_1 = Q_2 = Q_3$, llavors:

$$\Delta p = R_{f3} Q + R_{f2} Q + R_{f1} Q = (R_{f3} + R_{f2} + R_{f1}) Q = R_{f,eq} Q$$

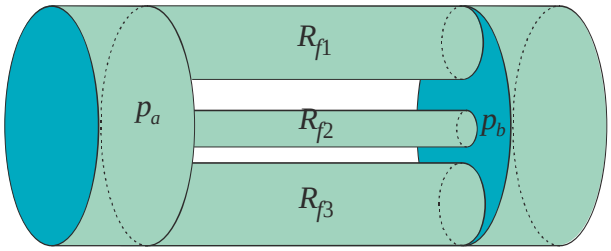
És a dir, la combinació de canonades és equivalent a una única canonada de resistència:

$$R_{f,eq} = R_{f1} + R_{f2} + R_{f3}$$

Combinació en paral·lel de canonades de diferent secció (resistències en paral·lel):

El cabal es distribueix per les diferents canonades:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$



D'altra banda, en una canonada:

$$Q = \frac{\Delta p}{R_f}$$

Llavors:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = \frac{\Delta p_1}{R_{f1}} + \frac{\Delta p_2}{R_{f2}} + \frac{\Delta p_3}{R_{f3}}$$

La caiguda de pressió és la mateixa a totes les canonades:

$$\Delta p = p_b - p_a = \Delta p_1 = \Delta p_2 = \Delta p_3$$

Llavors:

$$Q = \frac{\Delta p}{R_{f1}} + \frac{\Delta p}{R_{f2}} + \frac{\Delta p}{R_{f3}} = \Delta p\left(\frac{1}{R_{f1}} + \frac{1}{R_{f2}} + \frac{1}{R_{f3}}\right)$$

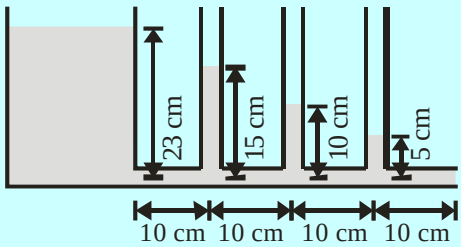
I la resistència total del sistema és:

$$R_{f,eq} = \frac{\Delta p}{Q} = \frac{\Delta p}{\Delta p\left(\frac{1}{R_{f1}} + \frac{1}{R_{f2}} + \frac{1}{R_{f3}}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{R_{f1}} + \frac{1}{R_{f2}} + \frac{1}{R_{f3}}} \Rightarrow \frac{1}{R_{f,eq}} = \frac{1}{R_{f1}} + \frac{1}{R_{f2}} + \frac{1}{R_{f3}}$$

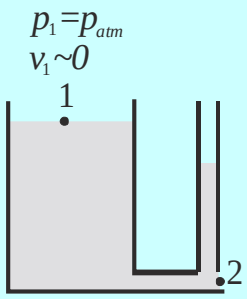
És a dir, la combinació de canonades és equivalent a una única canonada de resistència:

$$\frac{1}{R_{f,eq}} = \frac{1}{R_{f1}} + \frac{1}{R_{f2}} + \frac{1}{R_{f3}}$$

Exemple 3: A partir de les dades de la figura i sabent la densitat del líquid (1 g/cm^3) i que la secció circular és de 10 cm^2. Calculeu: *a)* la velocitat mitjana del fluid a la canonada, *b)* la viscositat del fluid en cp.



a) Quan el fluid avança 10 cm, la pressió disminueix (viscositat) i la columna de líquid baixa 5 cm.



$$\Delta p_{vis} = \rho g \cdot 0{,}05\,\text{m}$$

Estàtica de fluids:

$$p_2 = p_{atm} + \rho g \cdot 0{,}15\,\text{m}$$

Dinàmica de fluids:

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 - \Delta p_{vis} = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$p_{atm} + \rho g \cdot 0{,}23\text{m} + 0 - \rho g \cdot 0{,}05\text{m} = p_{atm} + \rho g \cdot 0{,}15\text{m} + 0 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$\rho g \cdot 0{,}03\text{m} = \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot 0{,}03\text{m}} = 0{,}767\,\text{m/s} = 76{,}7\,\text{cm/s}$$

b)

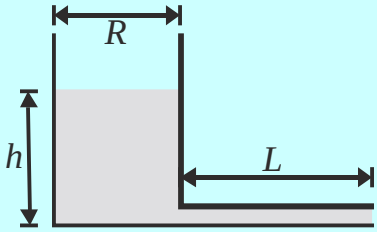
$$\Delta p_{vis} = \rho g \cdot 0{,}05\,\text{m} = 1.000\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\,9{,}8\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}}\,0{,}05\,\text{m} = 490\,\text{Pa}$$

$$\Delta p_{vis} = R_f Q \Rightarrow R_f = \frac{\Delta p_{vis}}{Q} = \frac{490\,\text{Pa}}{10 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2} = 639.000\,\frac{\text{Pa}}{\text{m}^2}$$

$$10 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2 = \pi R^2 \Rightarrow R\sqrt{10 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2/\pi} = 0{,}0168\,\text{m}$$

$$R_f = \frac{8\eta L}{\pi R^4} \Rightarrow \eta = \frac{R_f \pi R^4}{8L} = \frac{639.000\,\text{Pa/m}^2\,\pi\,(0{,}0178\,\text{m})^4}{8 \cdot 0{,}1\,\text{m}} = 0{,}254\,\text{Pa} \cdot \text{s} = 254\,\text{cp}$$

<u>Exemple 4</u>: L'aigua del dipòsit de la figura es va escapant per un capil·lar horitzontal de radi r i longitud L. *a)* Demostreu la relació següent entre l'altura del nivell de líquid al dipòsit h i el cabal de sortida $Q = \frac{\pi\rho g r^4}{8\eta L}h$. (Suposeu que la velocitat del fluid dins del capil·lar és molt petita.) *b)* Calculeu el temps que triga a baixar el nivell d'aigua de 10 cm a 5 cm. Dades: la viscositat de l'aigua és 1,00 mPa·s, R = 2,5 cm, L = 20 cm i r = 0,25 mm.



a)

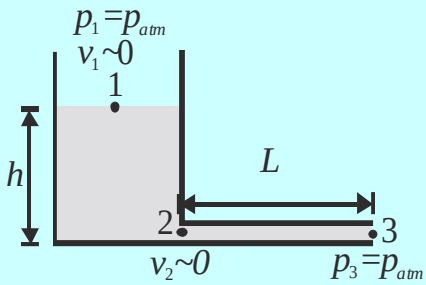
$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$p_{atm} + \rho g y_1 = p_2 + \rho g y_2 \Rightarrow p_2 = p_{atm} + \rho g h$$

$$\Delta p_{vis} = p_2 - p_3 = p_{atm} + \rho g h - p_{atm} = \rho g h$$

$$\Delta p_{vis} = R_f Q = \frac{8\eta L}{\pi r^4} Q \Rightarrow Q = \frac{\pi r^4}{8\eta L}\Delta p_{vis}$$

$$Q = \frac{\pi r^4}{8\eta L}\rho g h = \frac{\rho g \pi r^4}{8\eta L}h$$



b)

$$\left.\begin{array}{l} Q = \pi R^2 v_1 = -\pi R^2 \dfrac{dh}{dt} \\ Q = \dfrac{\rho g \pi r^4}{8\eta L}h \end{array}\right\} \Rightarrow -\pi R^2 \frac{dh}{dt} = \frac{\rho g \pi r^4}{8\eta L}h \Rightarrow \frac{dh}{h} = -\frac{\rho g r^4}{8\eta L R^2}dt \Rightarrow \int_{h_0}^{h_f}\frac{dh}{h} = \frac{-\rho g r^4}{8\eta L R^2}t$$

$$\ln h_f - \ln h_0 = \frac{-\rho g r^4}{8\eta L R^2}t \Rightarrow \ln\frac{h_f}{h_0} = \frac{-\rho g r^4}{8\eta L R^2}t \Rightarrow \ln\frac{h_0}{h_f} = \frac{\rho g r^4}{8\eta L R^2}t \Rightarrow t = \frac{8\eta L R^2}{\rho g r^4}\ln\frac{h_0}{h_f}$$

$$t = \frac{8\eta L R^2}{\rho g r^4}\ln\frac{h_0}{h_f} = \frac{8 \cdot 10^{-3}\,\text{Pa} \cdot \text{s} \cdot 0{,}2\,\text{m} \cdot (2{,}5\,10^{-2}\,\text{m})^2}{1.000\,\text{kg/m}^3 \cdot 9{,}8\,\text{m/s}^2 \cdot (0{,}5\,10^{-3}\,\text{m})^4}\ln\frac{10\,10^{-2}\,\text{m}}{5\,10^{-2}\,\text{m}} = 18.108\,\text{s}$$

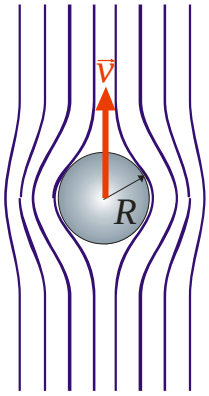
$$t = 18.108\,\text{s} = 5\,\text{h}\,1\,\text{min}\,46\,\text{s}$$

Moviment de sòlids en fluids a baixa i alta velocitat: llei de Stokes

Forces d'arrossegament viscoses: fricció d'un sòlid quan es mou dins d'un fluid. Per exemple, la fricció del cotxe augmenta amb la velocitat a causa de la viscositat de l'aire.

Les forces d'arrossegament viscoses s'oposen al moviment d'un objecte sòlid al si d'un fluid.

- A velocitat baixa, $F_F \propto v$ i η
- A velocitat alta, turbulència, $F_F \propto v^2$



La frontera entre els dos règims la marca el nombre de Reynolds. Per a una esfera que es mou al si d'un fluid, el nombre de Reynolds és:

$$N_R = \frac{\rho v R}{\eta}$$

on η és la viscositat del fluid, ρ la densitat del fluid, v la velocitat de l'esfera i R el radi de l'esfera.

Si $N_R < 1$, règim laminar o *fricció viscosa*, v petita o R petit
$N_R > 1$, règim turbulent, v gran o R gran.

Fricció viscosa

És el resultat del fregament entre la capa de fluid unida al sòlid i amb velocitat v (la mateixa que el sòlid) i les capes de fluid properes.

Llei de Stokes, per a una esfera:

$$F_F = 6\pi R v \eta$$

En general:

$F_F = \phi R v \eta$, ϕ coeficient aerodinàmic, paràmetre adimensional de caràcter geomètric associat a la forma del sòlid

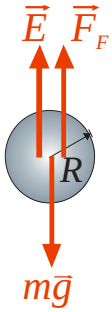
Velocitat límit:

Quan $v\uparrow$ llavors $F_F\uparrow \Rightarrow a = 0$

$$6\pi R v_L \eta + \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_s g$$

$$6 v_L \eta = \frac{4}{3} R^2 g(\rho_s - \rho)$$

$$v_L = \frac{2}{9}\frac{R^2}{\eta} g(\rho_s - \rho)$$



S'arriba a un punt en el qual F_F compensa la força que accelera el sòlid; llavors, la suma de forces = 0, a = 0, i el sòlid es mou a velocitat constant (F_F és constant).
Aquesta velocitat és la *velocitat límit* o *velocitat màxima en caiguda lliure.*

on v_L és la velocitat límit, η és la viscositat del fluid, ρ és la densitat del fluid i ρ_s és la densitat del sòlid.

Cal recordar que aquest resultat només és vàlid en règim laminar, és a dir, quan $N_R < 1$.

Exemple 1: Una esfera d'acer de 0,1 cm de radi es deixa caure en un tub ple de glicerina. *a)* Suposant que la força d'arrossegament segueix la llei de Stokes, quines seran les velocitats límit de l'esfera si la glicerina està a 20ºC, 40ºC, 60ºC i 80ºC? *b)* Calculeu el nombre de Reynolds per als quatre casos anteriors. *c)* És correcte suposar que la força d'arrossegament segueix la llei de Stokes? Dades: el coeficient de viscositat de la glicerina és 1,30 Pa·s a 20ºC, 0,34 Pa·s a 40ºC, 0,10 Pa·s a 60ºC i 0,036 Pa·s a 80ºC, la densitat de l'acer és 7,8 g/cm^3 i la densitat de la glicerina és 1,26 g/cm^3.

a) Per a esferes: $v_L = \frac{2}{9}\frac{R^2}{\eta} g(\rho_s - \rho)$

$$v_L(20^\circ\mathrm{C}) = \frac{2}{9}\frac{(0{,}1\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m})^2}{1{,}3\,\mathrm{Pa\cdot s}} 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\left(7.800\,\mathrm{kg/m^3} - 1.260\,\mathrm{kg/m^3}\right) = 0{,}011\,\mathrm{m/s}$$

$$v_L(40^\circ\mathrm{C}) = \frac{2}{9}\frac{(0{,}1\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m})^2}{0{,}34\,\mathrm{Pa\cdot s}} 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\left(7.800\,\mathrm{kg/m^3} - 1.260\,\mathrm{kg/m^3}\right) = 0{,}0419\,\mathrm{m/s}$$

$$v_L(60^\circ\mathrm{C}) = \frac{2}{9}\frac{(0{,}1\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m})^2}{0{,}10\,\mathrm{Pa\cdot s}} 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\left(7.800\,\mathrm{kg/m^3} - 1.260\,\mathrm{kg/m^3}\right) = 0{,}1424\,\mathrm{m/s}$$

$$v_L(80^\circ\mathrm{C}) = \frac{2}{9}\frac{(0{,}1\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m})^2}{0{,}036\,\mathrm{Pa\cdot s}} 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\left(7.800\,\mathrm{kg/m^3} - 1.260\,\mathrm{kg/m^3}\right) = 0{,}3956\,\mathrm{m/s}$$

b) Per a esferes: $N_R = \frac{\rho v R}{\eta}$

$$N_R(20^\circ\mathrm{C}) = \frac{\rho v R}{\eta} = \frac{1.260\,\mathrm{kg/m^3}\cdot 0{,}011\,\mathrm{m/s}\cdot 0{,}1\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}}{1{,}3\,\mathrm{Pa\cdot s}} = 0{,}0106 < 1$$

$$N_R(40^\circ\mathrm{C}) = \frac{\rho v R}{\eta} = \frac{1.260\,\mathrm{kg/m^3}\cdot 0{,}0419\,\mathrm{m/s}\cdot 0{,}1\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}}{0{,}34\,\mathrm{Pa\cdot s}} = 0{,}155 < 1$$

$$N_R(60^\circ\mathrm{C}) = \frac{\rho v R}{\eta} = \frac{1.260\,\mathrm{kg/m^3}\cdot 0{,}1424\,\mathrm{m/s}\cdot 0{,}1\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}}{0{,}10\,\mathrm{Pa\cdot s}} = 1{,}7945 > 1$$

$$N_R(80^\circ\mathrm{C}) = \frac{\rho v R}{\eta} = \frac{1.260\,\mathrm{kg/m^3}\cdot 0{,}3956\,\mathrm{m/s}\cdot 0{,}1\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}}{0{,}036\,\mathrm{Pa\cdot s}} = 13{,}85 > 1$$

c) A 20ºC i 40ºC $N_R < 1$, és correcte aplicar Stokes,
a 60ºC i 80ºC $N_R > 1$, no és correcte aplicar Stokes.

Forces d'arrossegament a alta velocitat

Quan $N_R > 1$, el règim no és laminar i no podem aplicar Stokes.
En aquest cas, la força de fregament viscosa és proporcional a la velocitat al quadrat del sòlid i no depèn de la viscositat:

$$F_F = C_A A \frac{\rho v^2}{2}$$

on A és la secció transversal (per a una esfera πR^2) i C_A és el coeficient d'arrossegament.

C_A depèn del N_R i es mesura experimentalment o es calcula numèricament. De tota manera, la dependència de C_A a N_R és molt suau, de manera que el podem considerar constant en un rang de valors relativament ample de N_R.

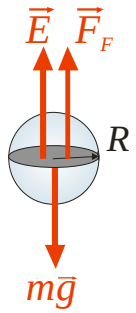
Valors aproximats C_A	
Disc circular	1,2
Esfera	0,4
Avió	0,06

Velocitat límit:
Igual com en el cas del règim laminar, quan un objecte sòlid és accelerat per una força, en augmentar la velocitat, també augmenta la força de frec viscosa (quan $v\uparrow$ llavors $F_F\uparrow$), de manera que s'arriba a un punt en el qual F_F compensa la força que accelera el sòlid; llavors, la suma de forces = 0, a = 0, i el sòlid es mou a velocitat constant.

$$C_A A\frac{\rho v_L^2}{2}+V\rho g=V\rho_s g$$

$$C_A A\frac{v_L^2}{2}=Vg\left(\frac{\rho_s-\rho}{\rho}\right)$$

$$v_L=\sqrt{2\frac{g}{C_A}\left(\frac{\rho_s-\rho}{\rho}\right)\frac{V}{A}}$$



Exemple 2: *a)* Esbrineu quan la velocitat límit en la caiguda lliure d'un home serà més petita: si estén els braços i les cames o si cau en posició encongida. Suposeu que un home de 80 kg de massa i densitat 0,96 kg/l salta des d'un avió. La densitat de l'aire a 20ºC és d'1,204 kg/m^3. *b)* Quina és la velocitat límit si cau amb cames i braços estesos? Suposeu que el coeficient d'arrossegament és 1, i que la secció transversal és 0,56 m^2. *c)* Quina és la velocitat límit si cau en posició encongida? Suposeu que la secció transversal és 0,30 m^2.

El moviment d'objectes macroscòpics a l'aire sempre es dóna en règim turbulent.

a) $v_L=\sqrt{2\frac{g}{C_A}\left(\frac{\rho_s-\rho}{\rho}\right)\frac{V}{A}}$,

si $A\uparrow \Rightarrow v\downarrow$, com que A estès > A encongit $\Rightarrow$ v estès < v encongit

b) $$v_L=\sqrt{2\frac{g}{C_A}\left(\frac{\rho_s-\rho}{\rho}\right)\frac{V}{A}}=\sqrt{2\frac{9{,}81\,\text{m/s}}{1}\left(\frac{960\,\text{kg/m}^3-1{,}204\,\text{kg/m}^3}{1{,}204\,\text{kg/m}^3}\right)\frac{0{,}0833\,\text{m}^3}{0{,}56\,\text{m}^2}}=$$
$$=48{,}19\,\text{m/s}$$

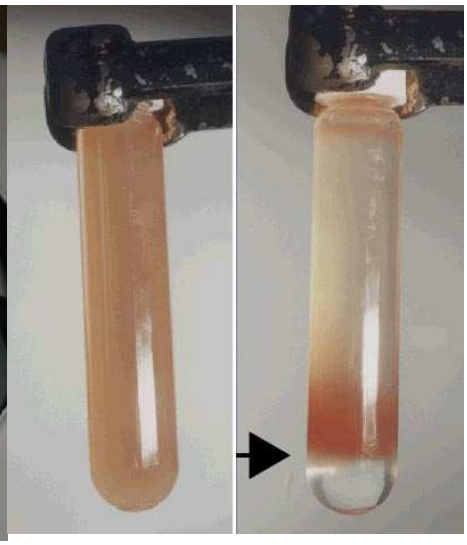
$$\rho=\frac{m}{V}\Rightarrow V=\frac{m}{\rho}=\frac{80\,\text{kg}}{960\,\text{kg/m}^3}=0{,}0833\,\text{m}^3$$

c) $$v_L=\sqrt{2\frac{g}{C_A}\left(\frac{\rho_s-\rho}{\rho}\right)\frac{V}{A}}=\sqrt{2\frac{9{,}81\,\text{m/s}}{1}\left(\frac{960\,\text{kg/m}^3-1{,}204\,\text{kg/m}^3}{1{,}204\,\text{kg/m}^3}\right)\frac{0{,}0833\,\text{m}^3}{0{,}30\,\text{m}^2}}=$$
$$=65{,}84\,\text{m/s}$$

Aplicacions: centrifugació i sedimentació

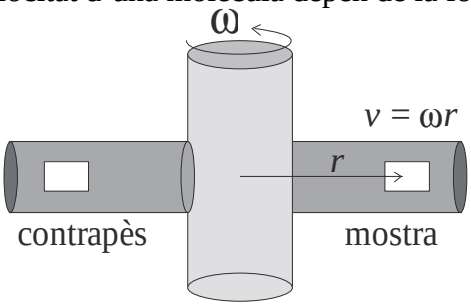
En biotecnologia, s'aprofiten les grans acceleracions obtingudes en girar de pressa per separar molècules de diferents grandàries als laboratoris. Per exemple, per separar els diferents components de la sang, per separar la caseïna de la llet, etc. També permeten determinar la massa de molècules i microorganismes i d'aquesta manera identificar molècules i microorganismes.

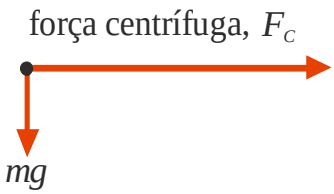
Centrifugadora



Abans i després de centrifugar

La velocitat d'una molècula depèn de la força d'arrossegament viscosa i la seva massa.





$$F_C = m\frac{v^2}{r} = mr\omega^2 = ma_{CF}$$

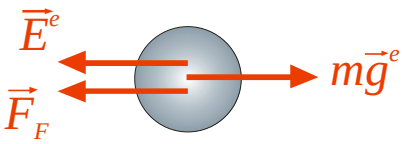
Les centrifugadores es dissenyen de manera que $a_{CF} >> g$ (típicament a_{CF} pot ser de prop de 500.000 g), de manera que podem negligir la força de gravetat. Així, la mostra es comporta com si estigués en un planeta on el seu pes fos:

$$Pes^e = ma_{CF} = mg^e$$

Aquest pes es coneix amb el nom de *pes efectiu* i l'acceleració gravitatòria efectiva és: $g^e = a_{CF} = r\omega^2$.

Les molècules en suspensió que són més denses que el fluid es mouran cap a l'extrem empeses pel Pes^e i finalment sedimentaran a l'extrem del tub.

$$Pes^e = mg^e$$
$$E^e = \rho V g^e$$
$$F_F = \phi R v \eta$$
$$V = \frac{m}{\rho_m}$$



on ϕ és el coeficient aerodinàmic (adimensional), v és la velocitat de la molècula, η és la viscositat del fluid, ρ és la densitat del fluid i ρ_m és la densitat de la molècula.

La velocitat límit, v_L, és donada per:

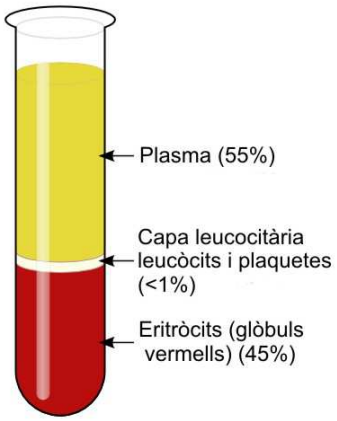
$$\phi R v_L \eta + \rho V g^e = mg^e \Rightarrow \phi R v_L \eta = mg^e - \rho V g^e = mg^e\left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right)$$

$$v_L = \frac{mg^e}{\phi R \eta}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right)$$

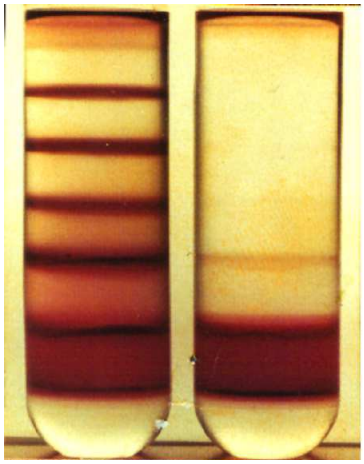
El terme ϕR s'anomena *factor geomètric* i té unitats de longitud.

Aplicacions:

- Si coneixem la massa de la molècula, la viscositat, la densitat del líquid i de la molècula, ϕ i g^e, podem determinar el temps que triga a sedimentar la mostra. Generalment, es determina experimentalment la constant $\frac{m}{\phi R \eta}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right)$, llavors a partir de la velocitat de gir, ω, podem controlar g^e ($g^e = r\omega^2$) i finalment calcular el temps necessari per sedimentar.
- La velocitat v_L es pot mesurar òpticament i $\phi R \eta$ també es pot determinar de manera que podem mesurar les masses moleculars.
- Si tenim una mostra amb diferents molècules (o microorganismes), les podem separar, atès que per a un temps donat es mouran a diferents velocitats i, per tant, la distància que recorreran serà diferent. D'altra banda, atès el temps i l'espai recorregut, podem determinar v_L i d'aquesta manera identificar les diferents molècules.



Separació dels components de la sang per centrifugació



Esquerra, sang infectada per la malària; dreta, sang normal

Exemple: El virus del mosaic del tabac té una densitat de 1.370 kg/m^3 i el factor geomètric en aigua és 1,16 10^{-6} m a 37ºC. Si l'acceleració centrífuga és igual a 2,0 10^5 g, el valor experimental de la velocitat de sedimentació a 37ºC és 3,7 10^{-5} m/s, quina és la massa molecular d'aquest virus?

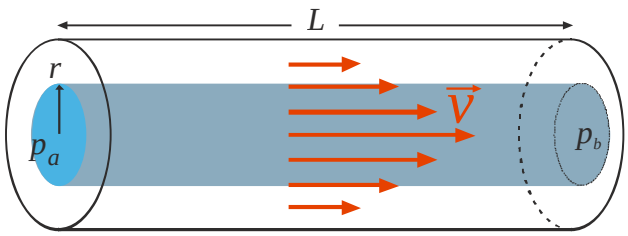
$$v_L = \frac{mg^e}{\phi R \eta}\left(1-\frac{\rho}{\rho_m}\right) \Rightarrow$$

$$m = \frac{\phi R \eta v_L}{g^e}\left(1-\frac{\rho}{\rho_m}\right)^{-1} = \frac{3{,}710^5\,\text{m/s}\cdot 1{,}16\,10^{-6}\,\text{m}\cdot 1{,}005\,10^{-3}\,\text{Pa}\cdot\text{s}}{210^5\cdot 9{,}8\,\text{m/s}^2}\left(1-\frac{1.000\,\text{kg/m}^3}{1.370\,\text{kg/m}^3}\right) =$$

$$= 8{,}15\,10^{-20}\,\text{kg}\,\frac{1\,\text{uma}}{1{,}66\,10^{-27}\,\text{kg}} = 4{,}91\,10^6\,\text{uma}$$

Demostració de la llei de Poiseuille

Suposem que el flux al llarg de la canonada de radi R i longitud L és laminar. Dividim el flux en cilindres de radi r. La velocitat del fluid depèn de la distància r. Al centre (r = 0) la velocitat és màxima, mentre que a la capa de fluid en contacte amb les parets (r = R) el fluid està aturat (v = 0).



Per demostrar la llei de Poiseuille farem la suma de forces sobre el cilindre de radi r. Aquesta suma ha de ser nul·la per tal que la velocitat sigui constant (independent del temps). Tenim dues forces, la que fa la diferència de pressió $\Delta p = p_a - p_b$, que empeny el fluid cap endavant, i la força de fricció viscosa amb el fluid que envolta el cilindre $F_v(r)$, que s'oposa al moviment del fluid:

$$\Delta p A_T = F_v(r)$$

on $A_T = \pi r^2$

I de la definició de viscositat les forces de fricció són:

$$F(r) = -\eta A_L \frac{dv}{dr} = -\eta\, 2\pi r L \frac{dv}{dr}$$

El signe negatiu sorgeix del fet que el gradient $\frac{dv}{dr}$ és negatiu (la velocitat disminueix quan r augmenta) i estem calculant el mòdul de les forces, que ha de ser positiu.
Llavors si la velocitat de la capa és constant, la suma de forces és nul·la:

$$\Delta p \pi r^2 = -\eta\, 2\pi r L \frac{dv}{dr} \Rightarrow dv = -\frac{\Delta p r}{2\eta L} dr$$

Si integrem l'equació anterior tenim:

$$v(r) = -\frac{\Delta p}{2\eta L}\int r dr = -\frac{\Delta p}{4\eta L} r^2 + C$$

A més sabem que $v(R)=0$:

$$v(R)=0 \Rightarrow C=\frac{\Delta p}{4\eta L}r^2$$

I finalment, el perfil de velocitats és:

$$v(r)=\frac{\Delta p}{4\eta L}(R^2-r^2)$$

Per tal d'expressar aquesta relació en funció del cabal Q o de la velocitat mitjana $\bar{v}\equiv\frac{Q}{\pi R^2}$, cal integrar el perfil de velocitats:

$$\bar{v}\equiv\frac{1}{\pi R^2}\int_0^R v(r)2\pi r dr=\frac{2}{R^2}\int_0^R v(r)rdr=\frac{2}{R^2}\int_0^R\frac{\Delta p}{4\eta L}(R^2-r^2)rdr=$$

$$=\frac{\Delta p}{2\eta L R^2}\left[R^2\int_0^R rdr-\int_0^R r^3dr\right]=\frac{\Delta p}{2\eta L R^2}\left[\frac{R^4}{2}-\frac{R^4}{4}\right]=\frac{\Delta p R^2}{8\eta L}$$

I finalment, si a l'expressió anterior aïllem la diferència de pressions tenim:

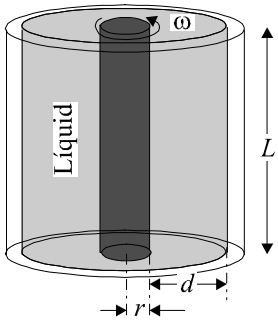
$$\Delta p=\frac{8\eta L}{R^2}\bar{v}$$ QED

Qüestions del tema 7

Viscositat

1. La relació entre la viscositat i la viscositat cinemàtica en funció de la temperatura és lineal? Justifiqueu la resposta.

Sol.: no, atès que la densitat d'un fluid també depèn de la temperatura.



2. Per mesurar la viscositat s'utilitza un aparell que consisteix en un cilindre buit al centre del qual es col·loca un cilindre massís de radi r i longitud L, tal com s'indica a la figura adjunta. El cilindre exterior està fix, mentre que el cilindre interior pot girar sota l'acció d'un parell de forces. *a)* Demostreu que el parell de forces M que cal aplicar perquè el cilindre giri a una velocitat angular ω és: $M = \frac{2\pi r^3 L}{d}\eta\omega$. *b)* La viscositat s'obté mesurant el parell de forces i la velocitat angular. Les dimensions del viscosímetre són L = 50 cm, d = 1 cm, r = 0,5 cm. Si a l'interior col·loquem un oli que està a 20ºC, la velocitat angular és de 3,5 rad/s i el parell de forces aplicat és igual a 1,36 10^{-4} Nm, quina és la viscositat d'aquest oli a 20ºC?

Sol.: *b)* 0,989 Pa·s

Flux laminar i turbulent

3. S'ha comprovat experimentalment que el flux d'un fluid de densitat ρ i viscositat η a través d'una canonada de radi r és laminar si el nombre de Reynolds és més petit que 2.000 i és inestable (intermitent o turbulent) quan és superior a 2.000. Recordeu que el nombre de Reynolds es defineix com: $N_R = \frac{2\rho\bar{v}r}{\eta}$, on $\bar{v}$ és la velocitat mitjana del fluid dins la canonada. *a)* Calculeu el nombre de Reynolds per al flux de la sang a través de l'aorta i d'un capil·lar. *b)* Com és el flux de la sang en sistema circulatori, laminar o turbulent? Dades: a 37ºC la densitat de la sang és 1,0595 g/cm^3 i la viscositat és 2,084 cp, el radi típic d'un capil·lar és 2 μm i la velocitat del flux sanguini és 0,33 mm/s i a l'aorta el radi és d'1,3 cm i la velocitat mitjana del flux sanguini és 0,2 m/s.

Sol.: *a)* 2.643 i 6,71 10^{-4}; *b)* inestable a l'aorta i laminar al capil·lar

4. Demostreu que en un tub de radi r pel qual flueix un cabal Q d'un fluid de densitat ρ i viscositat η el nombre de Reynolds es pot expressar de la manera següent: $N_R = \frac{2Q\rho}{\pi r\eta}$.

5. Quan el flux és turbulent es produeix més dissipació d'energia en forma de soroll i calor. *a)* Quin és el màxim cabal d'aigua que pot circular per una canonada d'1 cm de radi mantenint un flux laminar? Suposeu que la temperatura de l'aigua és 20º. *b)* Si tenim en compte que la viscositat de l'aigua disminueix considerablement en augmentar la temperatura, quan és més fàcil que les canonades de la conducció d'aigua facin soroll, a l'estiu o a l'hivern? Dades: a 20ºC la viscositat de l'aigua és d'1,005 cp i la densitat, de 998,2 kg/m^3.

Sol.: *a)* 31,6 cm^3/s; *b)* a l'estiu

Flux viscós

6. Per regar un camp, un pagès necessita fer passar un cabal de 100 l/s per una canonada de 10 m de llargada i 5 cm de diàmetre. Per aconseguir-ho ha de connectar una bomba a la sèquia. Quina potència haurà de subministrar aquesta bomba? Dada: a 20ºC la viscositat de l'aigua és d'1,005 cp i suposeu que el flux és laminar.

Sol.: 655 W

7. *a)* Quina és la resistència al pas de l'aigua d'un capil·lar de vidre de 20 cm de longitud i 0,06 cm de radi? *b)* Quin és el cabal que passa a través del capil·lar quan la diferència de pressió entre els seus extrems és de 15 cm de H_2O? *c)* Quina és la diferència de pressió quan el flux és de 0,5 cm^3/s? Dades: la viscositat de l'aigua a 20ºC és d'1,005 cp i suposeu que el flux és laminar.

Sol.: *a)* 3,95 10^9 Ns/m^5; *b)* 0,372 cm^3/s; *c)* 1.975 Pa

8. Quina és la potència dissipada en un tub que transporta un fluid amb un cabal de 0,15 m^3/s si la resistència al flux és de 4 10^4 Pa·s/m^3?

Sol.: 900 W

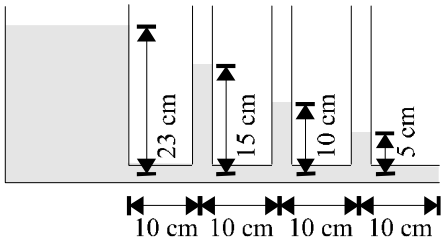
9. Es fa passar per un tub un cabal de 0,01 m^3/s d'un fluid determinat. La potència dissipada és 1,5 W per cada metre de longitud. Quina és la resistència al flux en un metre de tub?

Sol.: 15.000 Pa·s/m^3

10. Per un tub de 0,02 m de radi flueix aigua que està a una temperatura de 20ºC. A cada metre de longitud es produeix una caiguda de pressió de 100 Pa i una disminució de potència de 0,8 W. *a)* Quin és el cabal que circula pel tub? *b)* Quina és la velocitat mitjana de l'aigua? *c)* És laminar el flux?

Sol.: *a)* 8 10^{-3} m^3/s; *b)* 6,37 m/s; *c)* no

11. A partir de les dades de la figura i sabent la densitat del líquid (1 g/cm^3) i que la secció circular és de 10 cm^2. Calculeu: *a)* la velocitat mitjana del fluid a la canonada, *b)* la viscositat del fluid en cp.

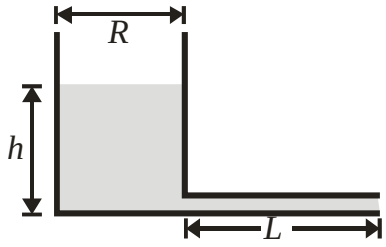


Sol.: *a)* v = 76,7 cm/s; *b)* η = 250 cp

12. La caiguda de pressió al llarg d'una canonada de coure és de 103 Pa i el cabal de líquid al llarg d'aquesta canonada és 0,01 m^3/s. *a)* Quina és la resistència al flux? *b)* Quina potència cal subministrar per mantenir el flux? *c)* Aquest càlcul és vàlid tant per a un flux laminar com per a un flux turbulent?

Sol.: *a)* 10,3 kPa·s/m^3; *b)* 103 W; *c)* sí

13. L'aigua del dipòsit de la figura es va escapant per un capil·lar horitzontal de radi r i longitud L.
a) Demostreu la relació següent entre l'altura del nivell de líquid al dipòsit h i el cabal de sortida: $Q = \frac{\pi \rho g r^4}{8 \eta L} h$. (Suposeu que la velocitat del fluid dins del capil·lar és molt petita.)
b) Calculeu el temps que triga a baixar el nivell d'aigua de 10 cm a 5 cm. Dades: la viscositat de l'aigua és 1,00 mPa·s, R = 2,5 cm, L = 20 cm i r = 0,25 mm.



Sol.: 5 h 1 min

Moviment de sòlids en fluids

14. Una esfera d'acer de 0,1 cm de radi es deixa caure en un tub ple de glicerina. *a)* Suposant que la força d'arrossegament segueix la llei de Stokes, quines seran les velocitats límit de l'esfera si la glicerina està a 20ºC, 40ºC, 60ºC i 80ºC? *b)* Calculeu el nombre de Reynolds per als quatre casos anteriors. *c)* És correcte suposar que la força d'arrossegament segueix la llei de Stokes? Dades: el coeficient de viscositat de la glicerina és 1,30 Pa·s a 20ºC, 0,34 Pa·s a 40ºC, 0,10 Pa·s a 60ºC i 0,036 Pa·s a 80ºC, la densitat de l'acer és 7,8 g/cm^3 i la densitat de la glicerina és 1,26 g/cm^3.

Sol.: *a)* 0,011 m/s; 0,042 m/s; 0,14 m/s; 0,396 m/s; *b)* 0,011; 0,16; 1,79; 13,8; *c)* per als dos primers casos, sí; per a la resta, no

15. Un glòbul vermell esfèric de 5 10^{-6} m de radi i densitat 1,3 10^3 kg/m^3 és en aigua a 37ºC. Quina serà la seva velocitat límit en caiguda? Dades: densitat de l'aigua a 37ºC, 992 kg/m^3, viscositat de l'aigua a 37ºC, 0,695 cp. Suposeu que es compleix la llei de Stokes.

Sol.: 2,41 10^{-5} m/s

16. *a)* Quin és el radi màxim d'una partícula de pols de densitat 3 10^3 kg/m^3 perquè la llei de Stokes sigui vàlida en el càlcul de la velocitat límit de caiguda d'aquesta partícula en aire a 20ºC? *b)* Repetiu l'apartat anterior però suposant que la partícula es mou en aigua a 20ºC? Dades: la densitat i viscositat de l'aire a 20ºC són 1,204 kg/m^3 i 1,81 10^{-5} Pa·s, respectivament; la densitat i viscositat de l'aigua a 20ºC són 998 kg/m^3 i 1,005 10^{-3} Pa·s.

Sol.: *a)* 3,47 10^{-5} m; *b)* 6,14 10^{-5} m

17. *a)* Demostreu que, quan la força d'arrossegament és proporcional a la velocitat al quadrat del cos, la velocitat límit que assoleix un cos en caiguda al si d'un fluid es pot expressar de la manera següent: $v = \sqrt{\frac{2g}{C_A}\frac{(\rho_s - \rho)}{\rho}\frac{V}{A}}$, on C_A és el coeficient d'arrossegament, ρ_s i ρ són les densitats del cos i del fluid respectivament, V el volum del cos i A la secció transversal del cos perpendicular a la direcció del moviment. *b)* A partir de la relació anterior, esbrineu quan la velocitat límit en la caiguda lliure d'un home serà més petita: si estén els braços i les cames o si cau en posició encongida. Suposeu que un home de 80 kg de massa i densitat 0,96 kg/l salta des d'un avió. La densitat de l'aire a 20ºC és d'1,204 kg/m^3. *c)* Quina és la velocitat límit si cau amb cames i braços estesos? Suposeu que el coeficient d'arrossegament és 1 i que la secció transversal és 0,56 m^2. *d)* Quina és la velocitat límit si cau en posició encongida? Suposeu que la secció transversal és 0,30 m^2.

Sol.: *b)* braços i cames estesos; *c)* 48,2 m/s; *d)* 65,8 m/s

18. En un dia de tempesta, la pedra, que té una forma aproximadament circular, pot assolir fàcilment dimensions de prop d'1 cm de radi. *a)* Quina velocitat límit assoleix la pedra si suposem que la força de frec deguda a l'aire és determinada per la llei de Stokes? *b)* Quina velocitat límit assoleix la pedra si suposem que el moviment de l'aire al voltant de la pedra és turbulent? *c)* Calculeu el nombre de Reynolds per al primer cas i indiqueu quin dels dos resultats és més realista. Dades: densitat del gel, 0,917 g/cm^3, densitat de l'aire a 20ºC, 1,204 kg/m^3, viscositat de l'aire a 20ºC, 1,81 10^{-5} Pa·s, i suposeu que el coeficient d'arrossegament és igual a 1.

Sol.: *a)* 11.000 m/s; *b)* 14,1 m/s; *c)* 7,33 10^6, el segon resultat és molt més realista.

19. Els músculs encarregats d'impulsar un peix dins l'aigua generen una potència de 0,4 kW, el 60% de la qual s'aprofita per a la natació. Si el peix pot arribar a moure's fins a una velocitat de 5 m/s i l'àrea màxima de la seva secció transversal en la direcció del moviment és de 100 cm^2, quin és el valor del coeficient d'arrossegament?

Sol.: 0,384

20. Una pilota de beisbol té una massa de 0,149 kg i un radi de 0,037 m. Una pilota de tennis de taula té una massa de 3 10^{-3} kg i un radi de 0,018 m. Es llancen ambdues a l'aire a una velocitat horitzontal de 15 m/s. *a)* Quina és inicialment la raó entre les forces d'arrossegament que actuen sobre cadascuna de les pilotes? *b)* Quina és inicialment l'acceleració deguda a la força d'arrossegament que actua sobre cadascuna de les pilotes? Nota: suposeu que C_A = 1,0.

Sol.: *a)* 4,22; *b)* 3,91 m/s^2; 45,9 m/s^2

Centrifugació i sedimentació

21. La molècula d'una proteïna té una massa de 10^5 uma (1 uma = 1,66 10^{-27} kg) i una densitat d'1,35 10^3 kg/m^3. Dins d'una centrifugadora se sotmet a una acceleració de 2 10^5 *g*. *a)* Si es troba en aigua, quin és el seu pes efectiu? *b)* Quina és la força d'empenta?

Sol.: *a)* 3,25 10^{-16} N; *b)* 2,41 10^{-16} N

22. Un virus té una massa molecular d'1,06 10^7 uma i una densitat d'1,35 10^3 kg/m^3. El factor geomètric en aigua val 3,58 10^{-7} m a 20ºC. Quant temps cal perquè sedimenti 10^{-2} m si l'acceleració centrífuga és igual a 10^5 *g*?

Sol.: 805 s

23. El virus del mosaic del tabac té una densitat de 1.370 kg/m^3 i el factor geomètric en aigua és 1,16 10^{-6} m a 37ºC. Si l'acceleració centrífuga és igual a 2,0 10^5 *g*, el valor experimental de la velocitat de sedimentació a 37ºC és 3,7 10^{-5} m/s, quina és la massa molecular d'aquest virus?

Sol.: 4,91 10^7 uma

8. Bibliografia

- Tipler, P. *Física: para la ciencia y la tecnología*. Barcelona: Reverté, 2005.
- Kane, Joseph W. *Física*. Barcelona: Reverté, 1992. 2a ed.
- Jou i Mirabent, David. *Física para ciencias de la vida*. Madrid: McGraw-Hill, 1994.
- Serway, Raymond A. *Física para ciencias e ingenierías*. México: International Thomson, 2005. 6a ed.
- Hecht, Eugene. *Física: álgebra y trigonometría*. México: Thomson, 2000.
- Cromer, Alan H. *Física para las ciencias de la vida*. Barcelona: Reverté, 1981. 2a ed.
- Cromer, Alan H. *Física en la ciencia y en la industria*. Barcelona: Reverté, 1986.
- Gettys, W. Edgard. *Física para ingeniería y ciencias*. México, DF: McGraw-Hill, 2005. 2a ed.

9. Índex alfabètic

A

Acció capil·lar, 87
Anàlisi dimensional, 5
Angle de contacte, 87

B

Baròmetre, 76
Bomba, 106

C

Cabal, 99
Cabal màssic, 99
Centre de gravetat, 37
Centre de masses, 37
Centre de pressió, 78
Coeficient d'arrossegament, 124
Coeficient de compressibilitat, 60
coeficient de fricció, 10
Coeficient de Poisson, 58
Cos deformable, 54

D

Deformació plàstica, 56
Deformació unitària, 54
Deformació unitària de cisallament, 59
Deformació unitària transversal, 58
Densitat, 38, 71
Densitat relativa, 71
Ductilitat, 56

E

Efecte Venturi, 103
Elongació, 54
Energia cinètica, 12
energia mecànica, 13
Equació de Bernoulli, 101
Equació de continuïtat, 99
Equació fonamental de la estàtica de fluids, 73
Equilibri mecànic, 31
Esforç, 55
Esforç de cisallement, 59
Estructura, 42

F

Factor geomètric, 127
factors de conversió, 4
Flotació, 76
Fluid, 70
Fluid ideal, 98
Flux estacionari, 98
força a distància, 6
força de contacte, 6
Forces conservatives, 13
Forces d'adhesió, 85
Forces de cohesió, 85
Forces de fricció, 9
Fràgil, 56
Fricció viscosa, 123

G

Gasos, 70

I

inèrcia, 8

L

Límit elàstic, 56
Línies de corrent, 98
Líquid, 70

LI

Llei de Hooke, 56
Llei de Jurin, 88
Llei de Laplace, 90
lleis de la física, 3
lleis de Newton, 7

M

Manòmetre, 77
massa inercial, 8
Menisc, 87
mètode dels nusos, 42
Mòdul d'un vector, 29
Mòdul de cisallament, 59
Mòdul de compressibilitat, 60
Mòdul de rigidesa, 56
Mòdul de Young, 56
Mòdul elàstic, 56
Moment de força, 33
Moment de segon ordre, 40
Moment flector, 61

P

Parell de forces, 34
Pes específic, 71
Poiseuille, equació de, 119
Potència, 12
Prandtl, sonda de, 105
Pressió, 72
Pressió atmosfèrica, 76
Pressió dinàmica, 102
Pressió estàtica, 102
Pressions negatives, 94
Principi de Pascal, 74
Producte d'inèrcia, 40

Producte escalar de vectors, 29
Producte vectorial, 30

Q

quantitat de moviment, 8

R

Radi de gir, 40
Resistència, 56
Resistència a flexió, 61
Reynolds, numero de, 117, 123
Rotació, 32

S

sistema cegesimal CGS, 3
sistema internacional S.I, 3
sistema tècnic MKS, 4
sistemes d'unitats, 3
Stokes,, 123

T

Tensió, 55
Tensió superficial, 86
Teorema de Steiner, 41
Teorema de Torricelli, 102
Torricelli, 76
Translació, 32
Treball, 11
Turbulència, 117

V

Vector, 28
Vector unitari, 29
vectors lliscants, 33
Velocitat límit, 123, 125
Venturímetre, 104
Vinclament, 62
Viscositat, 114
Viscositat cinemàtica, 115

X

Xilemes, 92