
Experiències: matemàtiques

Experiències matemàtiques

Material creat pel grup de treball “Elaboració de recursos didàctics en matemàtiques”

Grup ICE de la Universitat de Girona i amb el suport d’ADEMGI (Associació d’ensenyants de matemàtiques de les comarques gironines)

Curs 2009/2010

Rosa M. Altarriba Alberch
Esther Barrabés Vera
Josep M. Cors Iglesias
Margarida Joanmiquel i Peraferrer
Rafel Martí Serra
Mireia Pacreu Oliu
Quim Sinués Alberich
Quim Tarradas i Isern
Pilar Xifra Carbonell

Prefaci

El grup MMACA, Museu de Matemàtiques de Catalunya, constituït com a associació, neix amb l'objectiu de configurar un projecte de creació d'un Museu de Matemàtiques de Catalunya. Per tal de presentar el material elaborat pels membres del grup i que formarà part de l'esmentat Museu, s'ofereix un seguit d'Experiències Matemàtiques a través d'una exposició itinerant. Aquesta exposició, que ja va visitar Girona en el marc del congrés de les XIV Jaem al juliol del 2009, torna a la ciutat el mes de febrer de 2010. L'exposició, d'entrada lliure, pot ser també visitada per grups d'alumnes de totes les edats acompanyats dels seus professors. Aquestes visites en grup són guiades (o més aviat, acompanyades, es tracta d'una exposició molt manipulativa i s'ha de donar llibertat) per monitors, els quals han de ser prèviament formats.

Cada mòdul consisteix en una activitat que engloba diferents conceptes, mètodes de resolució (en el cas que es plantegi una pregunta o problema), i que mostra aspectes especialment intuïtius, manipulatius i visuals de les matemàtiques i que fan emergir la presència d'aquesta ciència en el món que ens envolta. L'objectiu principal d'aquest grup de treball consisteix en generar un material explicatiu i de treball que acompanyi alguns mòduls de l'exposició.

A inicis del curs 2009/2010 es crea el grup de treball "Elaboració de recursos didàctics de matemàtiques" sota l'aixopluc de l'Institut de Ciències de l'Educació de la Universitat de Girona, i amb el suport d'ADEMGI (Associació d'ensenyants de matemàtiques de les comarques gironines). El grup està format per professors de tots els nivells educatius des de primària fins a universitat. Els seus components són: Rosa M. Altarriba Alberch, Esther Barrabés Vera, Josep M. Cors Iglesias, Margarida Joanmiquel i Peraferrer, Rafel Martí Serra, Mireia Pacreu Oliu, Quim Sinués Alberich, Quim Tarradas i Isern y Pilar Xifra Carbonell. Són coordinadors del grup Quim Tarradas (per part del MMACA) i Esther Barrabés (per part d'ADEMGI).

L'objectiu principal del grup de treball és el desenvolupament del material explicatiu i de treball que ha de servir d'ajuda i guia als mòduls que es presenten a l'exposició. En concret, els objectius per a l'elaboració del material han estat els següents:

- Ser un complement dels mòduls en el seu objectiu de donar una visió de les matemàtiques diferent de la visió clàssica o acadèmica, donant pautes que ajudin a acostar-se als conceptes matemàtics que es presenten de maneres diferents i no habituals.
- Oferir suport a totes les persones que visiten l'exposició que els ajudi a descobrir, comprendre, i aprofundir en les matemàtiques implicades, donant-los un coneixement més complet del que cada mòdul ofereix a simple vista.
- Oferir una guia als professors que visiten l'exposició que serveixi, per a l'elaboració de material de treball a l'aula amb els alumnes.
- Ser un material de suport per a la formació dels monitors que fan de guía a les visites de grups d'alumnes, tot suggerint activitats complementaries o amb explicacions addicionals.
- Servir de documentació base al grup MMACA per a futures publicacions sobre el material de les seves exposicions.

En definitiva, aquest material hauria de ser una ajuda per a comprendre millor els mòduls exposats tant a les persones que visiten l'exposició amb interès i curiositat científica general (i matemàtica en particular), com per al professorat i els seus alumnes.

Índex

Descripció del material didàctic

S'ha elaborat una fitxa individual per a cada un dels mòduls treballats. La col·lecció de mòduls que actualment té l'exposició té ja unes dimensions considerables. En aquest treball es recull el material elaborat corresponent a 17 mòduls.

En el material desenvolupat s'ha intentat recollir no només l'essència del que el mòdul representa, si no que s'ha intentar anar més enllà, intentant mostrar altres possibilitats que no són evidents a simple vista: s'ha buscat la relació que hi ha amb altres mòduls, quins conceptes s'hi treballen, i es suggereixen activitats (en forma de qüestions o de plantejaments) que permetin treballar el mòdul des de diferents perspectives i nivells.

Les fitxes tenen l'estructura següent:

- Nom i descripció del mòdul, i el material del que està fet
- Edat mínima recomanada
- Descripció de l'activitat que es planteja
- Passes per a assolir el repte proposat: si el mòdul planteja una pregunta o un repte, es tracta de no donar la solució d'entrada, si no de donar algunes indicacions que permetin al visitant/alumne arribar-hi per ells mateixos.
- Continguts que es treballen: es vol mostrar que un mateix mòdul pot contenir i mostrar més d'un aspecte matemàtic, més enllà del concepte al voltant del qual es planteja l'activitat
- Competències que es treballen
- Mòduls relacionats: per temàtiques similars o inclosos en un mateix itinerari
- Relacions amb la historia
- Aplicacions: es vol posar de manifest la matemàtica de la vida diària i que molts dels mòduls mostren
- Activitats complementaries: en aquest apartat es vol oferir un material que permeti investigar més a fons la temàtica que es proposa. En particular, aquestes activitats poden servir al professorat per a l'elaboració de material de treball a classe.
- Par saber-ne més: s'ofereixen algunes explicacions de nivell més elevat per a visitants interessats en la temàtica, però que alhora també poden servir per a l'elaboració de treballs a l'aula a nivell de batxillerat o universitat.

Mòdul

L'atzar no és regular

Edat mínima recomanada

A partir dels 15 anys (Alumnes de Tercer d'ESO)

Descripció del material

Urna de metacrilat amb :

- 120 pilotes de ping pong: 114 són de color blanc i 6 de color taronja .
- La base de l'urna conté una palanca que ens permet remenar les boles.
- Un cercle de fusta per mirar l'urna.

Descripció de l'activitat que es planteja

Comprovar que l'atzar no és regular.

Passes per assolir el repte proposat

Remenar les boles amb la palanca que dóna cops a la base de l'urna i comprovar, amb l'ajuda del cercle de fusta, que hi ha zones on no apareix cap bola de color taronja i llocs on apareix més d'una bola.

Continguts que s'hi treballen

- Experiments aleatoris i deterministes.
- Atzar i probabilitat.
- Relacions mètriques: Pertinença, distància, cardinalitat, ...

Competències que es treballen

- **Competència en comunicació lingüística:** Han de ser capaços de descriure, explicar, interpretar, justificar, argumentar, ... tots els coneixements apresos en aquesta activitat.

- **Competència Matemàtica:** Interpretació i presentació de la informació obtinguda a partir de l'experimentació.

- **Competència d'Aprendre a aprendre:** Desenvolupament d'estratègies per buscar, comprendre i interpretar la informació.

- **Autonomia i Iniciativa Personal:** Capacitació d'estratègies de planificació i execució en els diferents activitats del mòdul.

- **Coneixement i interacció amb el món físic :** Coneixement de l'entorn i les seves propietats.

Mòduls relacionats

Relacions amb la història

Aplicacions

Aquest és un fet del qual no en som massa conscients. Esperem que l'atzar reparteixi els casos uniformement. Tendim a buscar explicacions a l'acumulació de fets, ja siguin casos de càncer a un barri o resultats esportius adversos, que es poden explicar simplement per la naturalesa no regular de l'atzar.

Activitats complementàries

Altres experiments semblants que ens permet entendre una mica més aquest experiment són:

Sabem que la probabilitat que surti vermell o negre en una tirada en la ruleta és aproximadament una meitat, és a dir, que de cada dos tirades una sortirà vermell o negre.
Però en la realitat, no succeeix que vagin alternant els dos colors. En algunes seqüències de tirades predomina més un color que un altre i això és pel fet que l'atzar no és regular.

Igualment, podem fer un experiment semblant amb un dau que tinguem a casa. La probabilitat que surti un cert nombre és un sisè, és a dir, que de cada sis tirades esperem que ens surti el nombre escollit un cop. Però la naturalesa no regular de l'atzar fa que això no passi i que puguem esperar un resultat durant més de sis tirades consecutives.

Per saber-ne més

Si el que estem dient en aquest mòdul és que no ens podem fiar de l'atzar, com és que ens fiem de la probabilitat? Què és el que ens permet parlar de la probabilitat que succeeixi un experiment?

Aquestes respostes en les dóna la Llei dels grans nombres.

La **Llei dels grans nombres** diu que quan el nombre d'observacions d'un fenomen aleatori és molt gran, la freqüència d'un esdeveniment associat amb aquest s'aproxima progressivament a un valor determinat. Aquest valor s'anomena probabilitat de l'esdeveniment.

Així doncs, el fet que ens permet calcular la probabilitat en un experiment aleatori no és l'ordre en que recollim les dades, sinó la quantitat de vegades que es repeteix un resultat, i per tant, el fet que l'atzar no és regular no contradiu la probabilitat.

En la xarxa hi ha una gran quantitat d'applets que ens permeten simular experiments aleatoris per a comprovar tots aquests raonaments:

http://www.xtec.cat/~jlagares/matematiques/probabilitat/daus/Daus.html

En aquest simulador, podem anar anotant les tirades una a una per a comprovar que l'atzar no és regular i fer totes les tirades de cop, per veure que les freqüències relatives de cada esdeveniment corresponen a un sisè.

Més informació

Mòdul

Les Balances Pitagòriques

Edat mínima recomanada

A partir de Segon d'ESO (han d'haver estudiat el Teorema de Pitàgores)

Descripció del material

Balances i figures de polígons regulars, on els costats de cada figura coincideixen amb els valors dels costats d'un triangle rectangle.

Descripció de l'activitat que es planteja

Utilitzar la balança per a comprovar la validesa del Teorema de Pitàgores.

Passes per assolir el repte proposat

Primer fer la construcció clàssica de la demostració del Teorema de Pitàgores (amb els quadrats) i posar els polígons sobre la balança i comprovar que el seu pes és el mateix (ja que tenen la mateixa àrea).
Després comprovar que si posem la resta de polígons sobre les balances i veure que els seus pesos coincideixen, podem deduïr que les seves àrees coincideixen, i per tant, comprovar que el Teorema de Pitàgores es compleix amb qualsevol polígon regular que es construeixi amb els costats d'un triangle rectangle.

Continguts que s'hi treballen

El Teorema de Pitàgores, càlcul d'àrees de polígons regulars i relacions entre pes i àrea.

Competències que es treballen

- **Competència en comunicació lingüística:** Han de ser capaços de d’escriure, explicar, interpretar, justificar, argumentar, ... tots els coneixements apresos en aquesta activitat.

- **Competència Matemàtica:** Ús de tècniques de representació geomètrica per projectar propietats dels objectes. Interpretació i presentació de la informació obtinguda a partir de l’experimentació.

- **Competència d’Aprendre a aprendre:** Desenvolupament d’estratègies per buscar, comprendre i interpretar la informació.

- **Coneixement i interacció amb el món físic:** Coneixement de l’entorn i les seves propietats.

Mòduls relacionats

Relacions amb la història

El Teorema de Pitàgores porta aquest nom perquè el seu descobriment recau sobre l’escola pitagòrica. Anteriorment, a Mesopotàmia i l’Antic Egipte es coneixien ternes de valors que es corresponien amb els costats d’un triangle rectangle, i es feien servir per resoldre problemes referents als esmentats triangles, tal com s’indica en algunes tauletes i papirs, però no ha perdurat cap document que exposi teòricament la seva relació. La piràmide de Kefren, datada al segle XXVI aC C., va ser la primera gran piràmide que es va construir basant-se en l’anomenat triangle sagrat egipci, de proporcions 3-4-5.

Aplicacions

- Càlcul de distàncies entre dos punts
- Aplicacions en problemes de trigonometria
- Resolució de problemes geomètrics

Activitats complementàries

Igual com hem fet la construcció amb polígons regulars, podríem aconseguir el mateix amb figures semblants i que no fossin polígons regulars?

La resposta d’aquest fet la podrem trobar a la pàgina web [1]

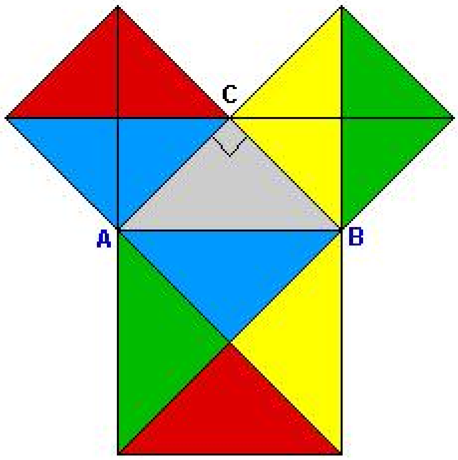
Per saber-ne més

Les demostracions del Teorema de Pitàgores han estat molt i molt diferents.
El Teorema de Pitàgores és dels que compten amb un major nombre de demostracions diferents, utilitzant mètodes molt diversos. Una de les causes d’això és que en l’Edat Mitjana s’exigia una nova demostració d'ell per assolir el

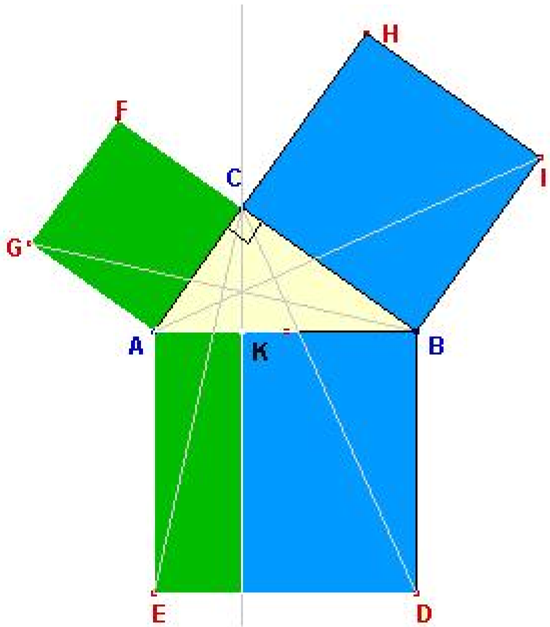
grau de Magíster Matheseos.

Entre els personatges més importants que han fet les seves demostracions destaquem:

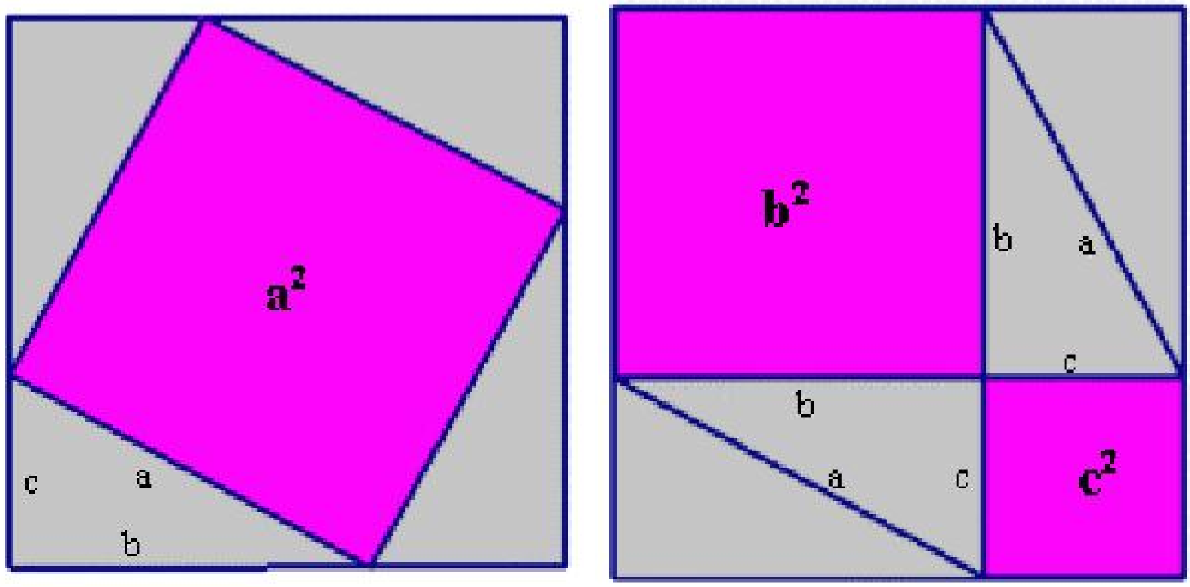
Plató: Va resoldre el problema del Teorema de Pitàgores per a un triangle rectangle i isòsceles. Com les àrees construïdes sobre els catets son iguals, l'àrea construïda sobre la hipotenusa és el doble de cadascun dels construïts sobre els altres costats.



Euclides: Euclides, en la seva obra el Elements demostra el Teorema de Pitàgores a partir de la figura que es mostra, demostrant la igualtat de les àrees del mateix color.



Pitàgores: En el segle VI a.C., va fer demostració en una taula de fang procedent de Babilonia coneguda com PLIMPTON 322 i datada l'any 1900 a.C. apareixen col·locades en columnes, ternes de nombres que verifiquen el Teorema de Pitàgores, anomenades Ternes Pitagòriques.



Més informació

[1] http://roble.pntic.mec.es/jarran2/cabriweb/1triangulos/pitag14.htm

Mòdul

Camins hamiltonians

Edat mínima recomanada

A partir de 2n cicle d’ESO

Descripció del material

Dodecaedre i rombododecaedre amb un suport per mantenir-los verticals i fixats a una base circular plana sobre la que hi ha peces allargades i imantades de la longitud dels costats dels poliedres i que poden adherir-se a ells.
Els costats dels dos poliedres són diferents, per tant, les peces que s’hi enganxen no són intercanviables.

Descripció de l’activitat que es planteja

Es tracta de veure si es pot construir, sobre cada poliedre, un camí tancat (un cicle) sobre les arestes que passi per tots els vèrtexs només una vegada. No cal recobrir totes les arestes (si ho féssim passaríem pels vèrtexs més d’un cop).

Aquests camins s’anomenen hamiltonians. Si el camí és tancat (comença i acaba en el mateix vèrtex) s’anomena cicle hamiltonià.
L’activitat es planteja per fer individualment a priori, però també es pot fer en grup.

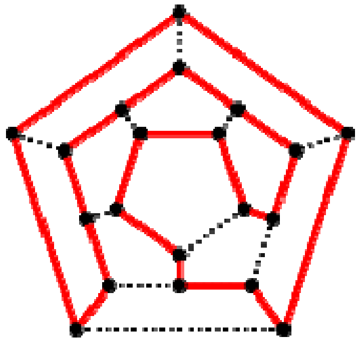
Passes per assolir el repte proposat

No hi ha una estratègia fàcil. Una possibilitat és:

- Comenceu marcant un camí que recorri només els vèrtexs d’una cara (fàcil).
- Afegiu i modifiqueu aquest camí per incorporar els vèrtexs de una cara adjacent.
- Repetiu el procés fins a completar tots els vèrtexs (vigileu de no repetir-ne cap)

Fer aquesta construcció en el dodecaedre o obtenir la solució senzillament provant, és fàcil.

Es poden representar els vèrtexs i arestes del poliedre en un pla, de manera que ens queda un graf on és molt fàcil visualitzar la solució. Per exemple:



En canvi, en el rombododecaedre el problema no té solució (no existeix cap cicle hamiltonià). Aquest fet, en canvi, no és fàcil de demostrar.

Continguts que s'hi treballen

Poliedre, camins, cicles, longituds, cares, arestes, vèrtexs, grafs,...

Competències que es treballen

Competència matemàtica. Pels conceptes i metodologies matemàtics que es treballen
Competència d'aprendre a aprendre. Pel procés constructiu de la solució.
Competència d'autonomia (en cas de treball individual)
Competències comunicativa lingüística i la Comunicativa i la Social (en cas de treball en grup)

Mòduls relacionats

Altres mòduls que treballen qüestions i propietats relacionades amb grafs:
- El diagrama de Voronoi

Mòduls que treballen poliedres:
- De l'octaedre al cub
- Dodecaedre estrellat
- Dodecaedre
- Dodecaedre ròmbic

Altres mòduls
- Tot pintant la pilota

Relacions amb la història

El nom de camí o cicle hamiltonià prové del matemàtic William Rowan Hamilton, qui va inventar el joc de trobar un cicle hamiltonià sobre el dodecaedre.

Pels voltants del 1800 es va convertir en un problema de gran interès gràcies al problema del viatjant (vegeu les aplicacions).

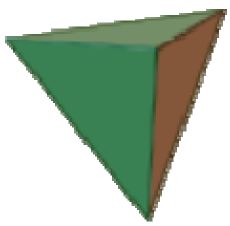
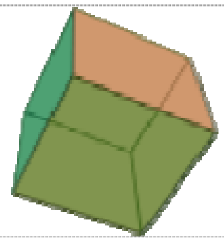
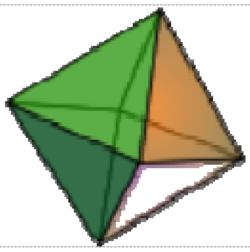
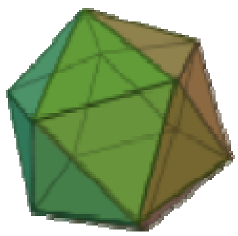
Aplicacions

- El problema del viatjant o del carter. Un viatjant ha de visitar diferents ciutats. Quina ruta ha de seguir per visitar cada ciutat només un cop i que el viatge sigui el més curt possible? La solució és un cicle hamiltonià, tot i que un cicle hamiltonià no té perquè ser el que minimitzi la longitud total del camí.
- Una generalització de l'anterior és suposar que tenim N viatjants, que entre tots visiten totes les ciutats i aquestes només són visitades una vegada per algun viatjant.
- Una altra generalització és el problema d'assignació de ruta a una flota de vehicles que han de visitar un conjunt de clients (ciutats/llocs) i cada un d'ells té alguna especificació: en quant a càrrega màxima, tipologia de transport, finestres de temps d'entregues, etc...En tots els casos, es busca que la ruta total (la suma de les rutes de tots els viatjants o vehicles) sigui mínim.

Els problemes anteriors es troben en multitud de situacions: rutes comercials, repartiment de mercaderies, transport escolar, ...

Activitats complementàries

- Preneu els sòlids platònics ([6]) i intenteu construir cicles hamiltonians:

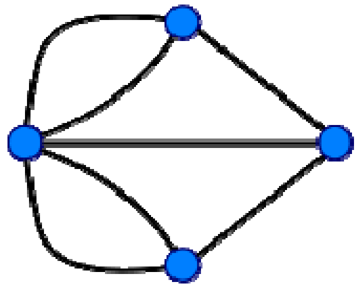
	
Tetraedre	Cub
	
Octaedre	Icosaedre

- A l'apartat de 'Per saber-ne més' s'expliquen dos resultats que donen condicions suficients per garantir que un graf sigui hamiltonià a partir dels 'graus' dels vèrtexs.
  Per a cada poliedre, compteu els vèrtexs que té (aquest nombre el denotem com a n) i:
    - mireu quin és el grau de cada vèrtex (el nombre d'arestes que hi

arriben o surten)
- comproveu que tots els vèrtexs tenen el mateix grau

- Comproveu
    - que en el tetraedre tots els vèrtex tenen grau més gran que $\frac{n}{2}$ (i es pot aplicar el Teorema de Dirac).
    - Que en l'octaedre, per a cada dos vèrtexs no veïns, la suma dels seus graus és més gran que n (i per tant aquí es pot aplicar el Teorema d'Ore).
    - Que ni el cub ni l'icosaedre satisfan les dues propietats anteriors.

- Problema dels ponts de Koninsberg: ara demanem recórrer totes les arestes del graf, sense repetir-ne cap. D'aquest tipus de camins se'n diuen eulerians. El problema més famós correspon al dels ponts de Koninsberg (actualment Kaliningrad), ciutat amb 7 ponts que connecten dues lleres del riu i una illa central. Els vianants s'entretenien a buscar un recorregut que passes pels 7 ponts una única vegada (es pot començar i acabar al mateix punt o no, els problemes són lleugerament diferents). El diagrama de punts i zones de la ciutat es pot representar en el graf



Per saber-ne més

Grafs

Un graf és una estructura matemàtica formada per un conjunt de vèrtexs i un conjunt d'arestes cada una de les quals connecta dos vèrtexs. Els grafs admeten una representació gràfica en la qual els vèrtexs són punts i les arestes són línies contínues unint els punts. Per exemple, els vèrtexs i les arestes dels poliedres es poden veure com un graf.
Un graf és hamiltonià si té algun cicle hamiltonià. Un graf és eulerià si existeix un cicle que recorri totes les arestes sense repetir-ne cap. Podem passar d'un graf hamiltonià a un d'eulerià (i al revés) canviant les arestes del primer per vèrtexs, i unint dos vèrtexs si les arestes inicials tenien un extrem en comú en el primer graf.
Existeixen resultats que donen condicions suficients per saber si un graf de n vèrtexs (amb n > 2) és hamiltonià:

- Dirac (1952): un graf simple és hamiltonià si cada vèrtex té grau igual o superior a $\frac{n}{2}$.

- Ore (1960): un graf simple és hamiltonià si per cada parell de vèrtexs no adjacents la suma dels seus graus és igual o superior a n.

Observeu que el graf pla que podem obtenir del dodecaedre no satisfà cap de les dues hipòtesis, i és hamiltonià. De fet, tots els sòlids platònics són grafs hamiltonians.
Tot graf complet (tots els vèrtexs estan connectats amb tots els altres) és clarament hamiltonià. Per tant, en el problema del viatjant, sabem segur que hi ha una solució que passa per tots els vèrtexs del graf. Però no es coneix un algoritme eficient per aquest problema que no sigui provar tots els camins hamiltonians possibles. El nombre de rutes creix ràpidament amb el nombre de vèrtexs a visitar. Per exemple, en un graf complet de n vèrtexs, el nombre de cicles hamiltonians és de $\frac{(n-1)!}{2}$.

Més informació

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Hamiltonian_path
[2] http://ca.wikipedia.org/wiki/Cam%C3%AD_hamiltoni%C3%A0
[3] http://www.sintef.no/static/am/opti/projects/top/vrp/
[4] http://web.telia.com/~u85905224/tsp/TSP.htm
[5] http://planetmath.org/?op=getobj&from=objects&name=HamiltonianGraph
[6]http://en.wikipedia.org/wiki/File:Icosahedron.svg

Mòdul

Cicloide

Edat mínima recomanada

Totes les edats

Descripció del material

Dues corbes fetes de fusta, una cicloide i una recta, col·locades una al costat de l'altre amb el punt més alt d'ambdues corbes coincident. Plafó explicatiu de l'activitat que s'ha de realitzar. I dues pilotes, una de color blau i l'altre de color vermell.

Descripció de l'activitat que es planteja

Donat un punt superior A i un punt inferior B, la rampa "més curta" ve donada per la recta que els uneix. Coincidirà aquesta amb la "més ràpida"? (considerant en la caiguda només l'efecte de la gravetat).
La corba solució al problema de la braquistòcrona (*braquisto*=curt i *cronos*=temps) és la cicloide invertida.
El mòdul pretén explorar aquesta i altres propietats de la cicloide com la tautòcrona (el temps que un objecte tarda en arribar al punt més baix de la corba no depèn del punt de partida).

Passes per assolir el repte proposat

La Braquistòcrona:

1. Col·locarem una pilota al punt més alt de la cicloide i l'altre al punt més alt de la recta, observant que l'alçada de les dues pilotes és la mateixa.
2. Alhora deixarem anar les dues pilotes i ens concentrarem en el punt on la recta i la cicloide tornen a coincidir. Quina pilota arriba abans?.

La Tautòcrona:

1. Col·locarem les dues pilotes als dos punts més alts de la cicloide (un oposat de l'altre).
2. Altre cop deixarem anar alhora les dues pilotes i observarem que arriben al punt més baix al mateix temps, tal i com era de suposar.
3. Fem ara que la posició inicial de les dues pilotes no sigui simètrica i les

deixem anar alhora. Quin és el resultat? Sorprenent.

Continguts que s'hi treballen

Corbes, distància, velocitat, temps.

Competències que es treballen

- **Competència matemàtica**. Pels conceptes que es treballen.
- **Competència d'aprendre a aprendre**. Pel procés deductiu de la solució.
- **Competència d'autonomia** (en el cas de treball individual).
- **Competència comunicativa, lingüística** (si el treball és en grup).
- **Competència social** (si el treball és en grup).

Mòduls relacionats

Relacions amb la història

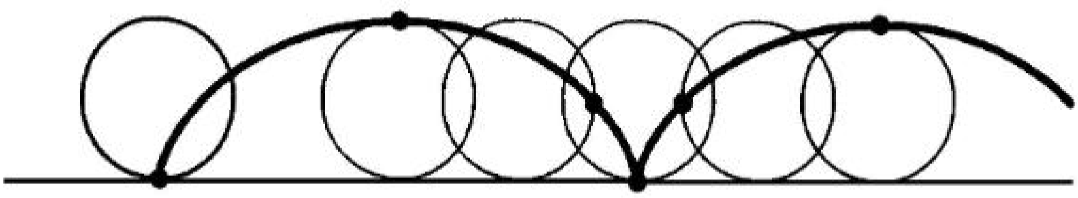
El problema de la Braquistròcrona o corba de descens més ràpid ja fou estudiat per Galileu, el qual donà com a solució l'arc de cercle. Durant el segle XVII fou font de controvèrsia entre els millors matemàtics de l'època. Per aquest fet se la coneix com "l'Helena del geòmetres".
El 1696 Johann Bernoulli, un dels german de la saga Bernoulli, va plantejar als matemàtics de la "Royal Society" el problema de la Braquistòcrona. Tant Leibniz com Newton, així com els germans Bernoulli, Johann i jacob, van resoldre el problema. La solució de Leibniz era molt laboriosa. La solució elegant de Johann Bernoulli la podeu veure a [1]. La millor, però, va ser la de Newton, breu, simple, elegant i general.

Aplicacions

Pèndol de Huygens (veure [2]). Tobogans inflables d'emergència del avions.

Activitats complementàries

La cicloide és una corba definida per un punt que gira sense lliscar sobre una línia recta.



A més a més de descriure les seves propietats geomètriques: longitud d'arc (igual a 4 vegades el diàmetre del cercle generador), àrea sota un arc (igual a 3 vegades l'àrea del cercle generador), podem introduir altres corbes relacionades com podem ser les trocoides, hipotrocoides, epitrocoides,...(veure [3]).

Per saber-ne més

El càlcul de variacions és un camp de les matemàtiques que treballa amb funcionals, enlloc de funcions tal i com ho fa el càlcul clàssic. Aquests funcionals poden ser, per exemple, integrals que tinguin per incògnites funcions i les seves derivades. L' interès rau a trobar funcions que facin que el funcional prengui un valor màxim o mínim.

Potser l'exemple més simple d'aquest tipus de problemes consisteix en trobar la corba de longitud mínima que connecta dos punts donats. És clar, que si no hi ha restriccions, la solució ve donada per la recta que uneix el dos punts. No obstant, si la corba buscada viu sobre una superfície a l'espai, llavors la solució no és tant òbvia, i possiblement no és única. Aquestes solucions s'anomenen geodèsiques.

En un article d'en Carles Perelló ens explica quin va ser el seu origen (veure [4]).

Més informació

[1] http://www.sociedadelainformacion.com/fisica/cicloide/plantear.htm
[2] http://darkmatter.blogalia.com/historias/44010
[3] http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/trocoides.htm
[4] http://publicacions.iec.cat/repository/pdf/00000034/00000086.pdf

Mòdul

Cubs i nombres senars

Edat mínima recomanada

A partir de 1er d'ESO, tot i que alguns conceptes relacionats amb el mòdul es poden introduir al cicle superior de primària.

Descripció del material

15 peces de fusta, totes diferents, formades sempre a partir d'un nombre senar de cubs unitaris. Cartolina impresa amb les fotografies de les 15 peces i un espai per construir els cubs d'aresta 1, 2, 3, 4 i 5.

Descripció de l'activitat que es planteja

Veure que tot nombre cub s'obté com a suma de senars consecutius.

Passes per assolir el repte proposat

- Primer, observeu que les peces de fusta estan formades per cubs unitaris i que el nombre de cubs sempre és senar. Per tant, cada peça representa un nombre senar.
- Segon, col·loqueu cada peça al damunt de la seva fotografia. Observeu que les peces queden agrupades en 5 conjunts i que cada conjunt hi ha una peça més que a l'anterior.
- Finalment agrupeu les peces de cada conjunt per formar un cub.

Ràpidament s'observa que s'han pogut construir cubs d'aresta 1, 2, 3, 4 i 5 i per tant de volum 1, 8, 27, 64 i 125 respectivament. Aquest volum coincideix amb el nombre de cubs unitat que conté cada cub i donem significat geomètric a les potencies cúbiques dels nombres naturals.

Continguts que s'hi treballen

Nombres naturals, senars, potències, volum, equivalència entre potències terceres i volum, seqüències, iteració.

Competències que es treballen

- **Competència matemàtica**. Pels conceptes que es treballen, així com per l'ús de les tècniques geomètriques per representar els nombres i les seves propietats.
- **Competència d'aprendre a aprendre**. Pel procés constructiu de la solució.
- **Competència d'autonomia** (en el cas de treball individual).
- **Competència Comunicativa, lingüística i competència social** (si el treball és en grup).

Mòduls relacionats

- Quadrats i nombres senars.
- Suma cubs: $3^3+4^3+5^3=6^3$.
- Quadrats i cubs.
- Pesa cubs: cubs i balança
- Del octaedre al cub.

Relacions amb la història

Els primers indicis d'inducció matemàtica els podem trobar en la prova que fa Euclides sobre la no finitud dels nombres primers. Pel que fa a seqüències aritmètiques el mètode de demostració per inducció va ser introduït per al-Karaji al voltant de l'any 1000, el qual l'utilitzà per demostrar la fórmula del binomi. Aquest i altres matemàtics de l'època, com va ser el cas de Francesco Maurolico, que el 1575 va demostrar que la suma dels n primers nombres senars és $n^{2,}$ no van aplicar el mètode rigorosament. El primer en fer-ho va ser Pascal en *Traité du triangle arithmétique* (1665). La formulació moderna del mètode és del segle 19, amb les aportacions de Boole, Peano i sobre tot Dedekind.

Aplicacions

Activitats complementàries

El mòdul mostra com els primers 5 cubs (1, 8, 27, 65 i 125) es poden formar com a suma de nombres senars consecutius.

1. Escriviu per a cada un d'aquests nombres cubs els nombres senars que s'han de sumar per obtenir-los.

1 = 1
8 = 3 + 5
27 = 7 + 9 + ...

2. Quants nombres calen usar en cada suma per obtenir el cub corresponent?

Per l'1, en fa falta 1. Pel 2^3 en fan falta 2, pel 3^3 en fan falta 3, etc...

3. Sense fer cap càlcul, quants nombres necessitarem per fer el 6^3? I el 7^3? I el n^3?

4. Fem una mica d'extrapolació: podeu dir quins nombres senars calen per construir el 216 i el 343?

D'altra banda ens podem preguntar quina estratègia cal seguir per saber si un nombre és cub o no.

5. Agafeu el 1728. Sabríeu dir si és un nombre cub o no?

6. Descomponeu-lo en factors primers. Què observeu?

Per tant, si descomponem un nombre en factors primers i cada factor apareix repetit tres cops vol dir que és cub, i en cas contrari no.

De la mateixa manera que el mòdul explora la relació entre els nombres cubs i els senars, podríem fer el mateix amb el nombres quadrats o bé els nombres triangulars.

7. De fet, potser el més natural seria començar per veure que la suma dels primers n nombres naturals és un nombre triangular, tot i representant el triangle que s'obté.
Amb quadrats d'àrea unitat, construïu els triangles que representen els nombres:

3 = 1 + 2
6 = 1 + 2 + 3
10 = 1 + 2 + 3 + 4

Com podeu construir els triangles? Fent columnes de tantes peces com surt a les sumes.

8. Amb les mateixes peces que hem utilitzat per representar el triangle podem formar quadrats de costat 2, 3, … i observar que per construir-los necessitem 1+3, 1+3+5, …quadrats unitat, respectivament. Per tant, que tot nombre quadrat, n^2, s'obté sumant els n primers senars. Si en lloc de quadrats utilitzem cubs arribem al mòdul present.

També podríem pensar si podem trobar nombres naturals que es poden escriure com a suma de cubs de dues maneres diferents. Resulta que el més petit és el 1729. Aquests nombres es coneixen com a nombres d'Ardí-Ramanujan. Sembla mentida, o no, però n'hi ha infinits.

9. Comproveu que el 1729 es pot escriure de les dos maneres següents:
1729=123+13=103+93

10. Us atreviu a buscar com es poden escriure els 4104 i el 13832?

Resposta: 4104 =23+163=93+153, 13832=183+203=23+243.

Per saber-ne més

La inducció matemàtica és un mètode de demostració matemàtica que permet provar de manera rigorosa que un propietat és certa per a tot nombre natural. Primer cal provar que es compleix la propietat quan *n=1* (o pel primer valor de *n* pel qual la propietat sigui certa). Llavors suposem certa la propietat per un cert valor d'*n* fixat i provem que la propietat també es compleix pel següent valor de *n*.
Suposem que volem demostrar la següent propietat per a tots els nombres naturals n (fórmula de la suma dels n primers nombres naturals) : 1+2+3+…+n= $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$

Comprovem si és veritat per a n = 1.

Clarament, $\frac{1\cdot(1+1)}{2}=\frac{1\cdot 2}{2}=\frac{2}{2}=1$

Ara cal provar si el fet que la fórmula es verifiqui quan n=m implica que també ho farà quan n=m+1.

1+2+3+…+m+(m+1)=

$$\frac{m\cdot(m+1)}{2}+(m+1)=\frac{m\cdot(m+1)+2(m+1)}{2}=\frac{(m+2)\cdot(m+1)}{2}$$

Que coincideix amb la propietat per a n=m+1, tal i com volíem provar.

Finalment deixem una pregunta a l'aire.
Sabem que

$(x+1)^2=x^2+2x+1$, o de manera equivalent que $(x+1)^2-x^2=2x+1$.

Si sumen el terme de l'esquerra d'1 fins a n el resultat és

$(n+1)^2-1$ *(d'aquest tipus de suma se'n diuen telescòpiques).*

Fent el mateix al terme de la dreta tenim

2(1+2+…+n)+n.

Per tant,

1+2+…+n= $\frac{(n+1)^2 - (1+n)}{2} = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$

Pregunta, podem generalitzar aquest mètode per trobar la suma de les potencies m dels n primers naturals?

Més informació

mmaca
Museu de Matemàtiques de Catalunya

Mòdul

Diagrama de Voronoi

Edat mínima recomanada

Cicle superior d'Educació Primària

Descripció del material

Tauló de 60x60x10 cm amb pius fixats i peces de colors que hi encaixen.

Descripció de l’activitat que es planteja

Donats uns punts del pla (marcats amb uns pius fixos en el tauló), es tracta de construir el Diagrama de Voronoi associat a aquests punts. Aquest diagrama és una divisió del pla formada per regions cada una de les quals conté tots els punts que estan més a prop d’un dels punts fixats inicialment.
L’activitat consisteix en col·locar les peces (que corresponen a les regions de mínima distància) en els llocs corresponents i completar el diagrama.
L’activitat es pot fer individualment o en grup.

Passes per assolir el repte proposat

- Primer observem que cada peça ha d’encaixar en un piu de manera que contingui tots els punts que estan més a prop de l’emplaçament triat que de qualsevol altre. Observem que les regions encaixen pel costat que el forat és més ample (si les posem del revés no encaixaran les peces).
- Triem dos dels punts fixos que siguin veïns. La línia que divideix els punts que estan més a prop de cada un dels pius conté els punts que estan a igual distància de dos o més punts fixos. Per tant les fronteres de les regions són una part de la mediatriu del segment que uneix els punts.
- Si anem traçant ‘mediatrius’ imaginàriament, podem anar deduint la forma de les regions associades a cada punt.

A partir d’aquestes reflexions, cal anar dissenyant un estratègia per completar el diagrama: es pot començar en una cantonada de la regió

inicial (dos costats de la frontera formaran un angle recte), o bé per agafar el pivot que sembli més separat que la resta (la regió que li correspongui serà la més gran) o al revés, etc
Observació: Les peces són de colors diferents per visualitzar millor el diagrama un cop completat. Això dóna una pista de com anar completant el diagrama si es pensa que dos peces de color igual no comparteixen cap costat.

Continguts que s'hi treballen

- Conceptes: Distància mínima, equidistància, proximitat, mediatriu, recta, frontera, conjunts, components, partició d'un pla, polígon …
- Metodologia: disseny d'estratègies, deduccions lògiques (descart o acceptació d'un encaix només per deducció), aprenentatge recursiu,...

Competències que es treballen

Competència matemàtica. Pels conceptes i metodologies matemàtics que es treballen.
Competència d'aprendre a aprendre. Per la necessitat de ser conscient del procés de resolució i estratègia usades, aprenent dels èxits i errors a cada pas.
Competència d'autonomia (en cas de treball individual).
Competències comunicativa lingüística i social (en cas de treball en grup).

Mòduls relacionats

- El diagrama de Voronoi dóna una tessel·lació del pla. Altres mòduls que treballen tessel·lacions són:
  - Tessel·lació de Penrose
  - Pentàgons
  - Tauler de Sam Loyd
- En el diagrama s'han usat 4 colors diferents per a les regions. Es pot enllaçar amb el Teorema dels quatre colors i el mòdul "Pintant la pilota".
- El diagrama permet una incursió a la Teoria de Grafs. Un altre mòdul que treballa amb grafs és el de "Camins hamiltonians".

Relacions amb la història

El diagrama porta el nom de Georgy Voronoi, i també s'anomena tessel·lació o descomposició de Voronoi o tessel·lació de Dirichlet (per Lejeune Dirichlet) [1].
Els primers diagrames d'aquesta tipologia que es coneixen foren usats per Descartes (1644) per mostrar la disposició de la matèria en el

sistema solar. També varen ser usats per Dirichlet (1850). Al 1854, John Snow va compondre un diagrama de Vornoi per mostrar que la majoria de les morts per còlera, en una epidèmia, s'havien produït al voltant d'un pou d'aigua concret. El 1908, Georgy Voronoi n'estudià el cas n-dimensional.
Els diagrames reben diferents noms depenent de la branca de la ciència o, més específicament, de la matemàtica, en què s'utilitzen. Així, en geofísica i meteorologia s'anomenen *polígons de Thiessen* (pel meteoròleg nord-americà Alfred Thiessen), en física de la matèria condensada s'anomenen *cel·les de Wigner-Seitz*, o en el cas de tractar-se d'un espai mètric en general s'anomenen *polígons fonamentals*.

Aplicacions

Els diagrames de Voronoi són fonamentals per als estudis de proximitat i per determinar àrees d'influència respecte uns punts fixats. Alguns exemples de problemes de proximitat:

- Trobar el parell de punts més propers d'entre tots els punts inicials fixats. Per detectar avions en perill de col·lisió.
- Trobar el centre del cercle de radi mínim que conté tots els punts fixats. Per ubicar serveis d'urgència, antenes de telefonia, repetidors de radio i televisió,...
- Trobar, en una regió determinada, el centre del cercle de radi màxim que al seu interior **no** conté cap punt dels fixats al principi. Per ubicar serveis no desitjats com abocadors.
- En meteorologia, per determinar àrees de precipitació, s'anomenen polígons de Thiessen.
- En geologia, per determinar àrees de presència d'un material (polígons d'àrea d'influència).
- En ecologia, per estudiar la supervivència d'espècies en competència per aliments o llum.
- En economia, per estudiar àrees de mercat de centres en competició.

En general, en qualsevol àrea amb un problema de proximitat o d'estudi d'àrees d'influència. I també es poden trobar aplicacions en cristal·lografia i en química, en l'estudi de propietats químiques d'alguns elements.

Activitats complementàries

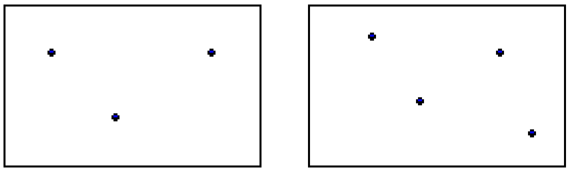
Tessel·lacions de Voronoi amb xarxes regulars

1) Comencem considerant 3 o 4 punts aleatoris dins una zona delimitada inicialment com a la figura. Podeu dibuixar el diagrama de Voronoi?

Resposta: dibuixeu les mediatrius per a cada dos punts veïns.

2) Els punts de les mediatrius estan a igual distància de ... punts fixats.

Els punts on es tallen les mediatrius (vèrtexs de les regions) estan a igual distància de ... punts fixats.

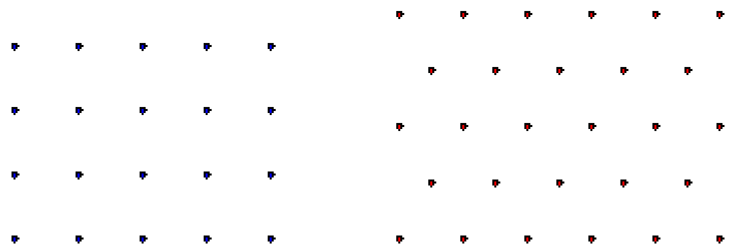


Resposta: dos en el primer cas, i tres o més en el segon.

3) Quants costats tenen les regions poligonals del diagrama?

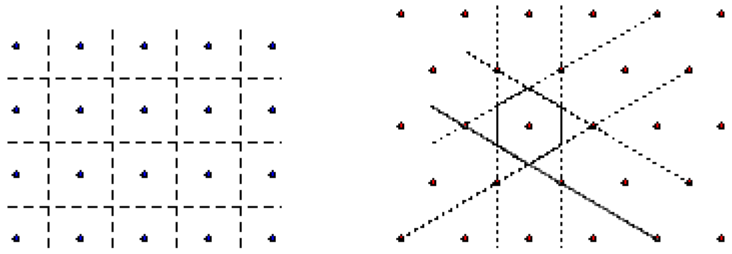
4) El conjunt de punts inicials (pius fixos) pot ser el conjunt de punts d'una xarxa regular de punts al pla o l'espai.

- Quines estructures s'obtindrien si agafem punts en una malla quadrada? I si els punts estan disposats de manera que formen triangles?



Malla quadrada Malla triangular

En aquest cas s'obtenen estructures regulars. En el cas de la malla quadrada, s'obtenen quadrats, i en el cas de la malla triangular....

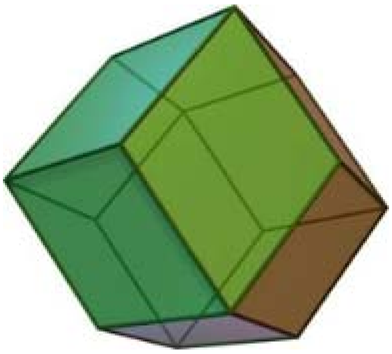


Malla quadrada Malla triangular

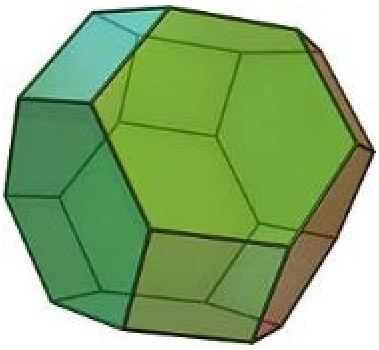
- Es poden obtenir també diagrames de Voronoi a l'espai. S'obtenen regions tridimensionals que emplenen tot l'espai.
- En aquest cas, com es poden obtenir les cares de cada una de les regions? Resposta: els plans mediatrius que contenen els punts que equidisten a dos de donats.
- Per tant si prenem punts equidistribuïts de manera que formin cubs, obtindrem també cubs com a regions del diagrama.
- Ara agafem com a punts fixos tots els vèrtexs dels cubs, afegim els punts que estan situats en els centres de les cares i busquem les regions del diagrama de Voronoi. Com seran aquestes

regions? Per començar a esbrinar la resposta hem de comptar, per a cada punt de la xarxa, quants punts 'veïns' té. Resposta: en té dotze. Per tant, tindrem 12 plans mediatrius delimitant cada una de les cel·les de Voronoi. A més les regions han de emplenar tot l'espai. Quins poliedres de 12 cares emplenen l'espai? Dodecaedres ròmbics.

- I si ara prenem els punts que estan en el centre del cub? Resposta: octaedres truncats.



Dodecadre ròmbic



Octaedre truncat

Teorema dels quatre colors

El teorema dels quatre colors estableix que tota partició del pla en regions contigües pot ser pintada amb només quatre colors de manera que dues regions adjacents no tinguin el mateix color.

- Observeu aquesta propietat en el diagrama de Voronoi.

Grafs

El diagrama de Voronoi crea un graf a partir de les fronteres entre les regions de la tessel·lació. Un graf és una estructura matemàtica formada per un conjunt de vèrtexs i un conjunt d'arestes ([1]), cada una de les quals connecta dos vèrtexs. Els grafs admeten una representació gràfica en la qual els vèrtexs són punts i les arestes són línies contínues unint els punts.

En un diagrama de Voronoi, les línies divisòries entre les regions són les arestes del graf.

- Quins punts són els vèrtexs del graf? Resposta: els punts que estan a igual distància de tres o més punts fixos.
- Ara considerarem el graf dual del de Voronoi. Cada regió es representa per un vèrtex i dos vèrtexs estan connectats si les dos regions són veïnes.
- Mireu el plafó. Quina forma tenen les regions que s'obtenen amb les arestes del graf dual? Són triangles i el que obtenim és una triangulació anomenada de Delaunay [2].
- Per a cada triangle, en el gràfic del plafó, s'ha dibuixat el seu circumcercle. Podeu observar alguna propietat? Cap vèrtex queda dins de cap triangle.
- Considerant el graf dual, es poden passar per totes les regions movent-se per les arestes, sense repetir cap regió?
- Altres treballs amb grafs: el problema dels ponts de

Königsberg.

Per saber-ne més

El graf dual: la triangulació de Delaunay

Com hem dit, donat un diagrama de Voronoi, es pot construir una triangulació de Delaunay considerant el graf dual. Aquesta triangulació és única sempre, excepte quan els punts estan alineats i/o quan 4 o més punts del diagrama de Voronoi estan sobre el mateix cercle. En aquest últim cas, en fer el graf dual s'obté una regió que no és triangular (té 4 costats). Si es vol una triangulació, s'ha de triar una (o més) diagonal per afegir al graf.

Complexitat

Fixats *n* punts inicials, el nombre màxim de vèrtexs i arestes del graf de Voronoi és *2n-5* i *3n-6* respectivament.
El problema de trobar els dos punts més propers del conjunt inicial fixat té un cost computacional de $O(n^2)$ si no s'utilitza cap propietat geomètrica (només per força bruta). Aquests dos punts corresponen als extrems de l'aresta més curta del graf de Delaunay.

Generalitzacions

Les regions poligonals que s'obtenen s'anomenen de forma genèrica cel·les de Voronoi. Es poden obtenir diagrames d'ordre superior modificant-ne la definició. Donat un conjunt de punts fixats inicialment *S*, les cel·les es defineixen com el lloc geomètric dels punts que tenen *n* punts del conjunt *S* com als *n* veïns més propers. Amb aquesta definició també s'obté una divisió de l'espai.
També es poden utilitzar mètriques diferents de l'euclidiana. En aquests casos, però, no s'assegura que existeixi realment una tessel·lació de l'espai.
Una altra generalització s'obté mesurant distàncies a objectes que no siguin punts. En aquest cas les cel·les s'anomenen eixos mitjans ('medial axis' en anglès) o esquelet topològic, i s'utilitza en el reconeixement òptic de caràcters.

Més informació

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Voronoi_diagram
[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Delaunay_triangulation
[3] http://www.dma.fi.upm.es/docencia/segundociclo/geomcomp/voronoi.html
[4] http://wwwdi.ujaen.es/asignaturas/gc/tema5.pdf
[5] http://www-ma2.upc.es/~geoc/voronoi.pdf
[6] http://www.pi6.fernuni-hagen.de/GeomLab/VoroGlide/

Mòdul

Dòmino de descomposició de nombres primers.

Edat mínima recomanada

A partir dels alumnes de tercer de primària.

Descripció del material

36 peces triangulars en les quals a cada costat hi ha nombres naturals o producte de nombres primers.

Descripció de l'activitat que es planteja

És el tradicional joc del dòmino però amb unes peces triangulars en comptes de rectangles, i per tant amb més opcions a l'hora de tirar, de manera que per aparellar les peces cal ajuntar un nombre i la seva descomposició en nombres primers.

Passes per assolir el repte proposat

És un joc per a més de dues persones i es tracta de ser el primer jugador en tirar totes les fitxes. Per a conseguir-ho a més de la sort, també cal ser àgil amb el càlcul.
Encara que el contingut és bastant elemental i hi ha una sola possibilitat de casar les peces, la forma final del puzle, així com el número de peces, fa que es necessiti força temps per acabar-lo, a menys que no s'apliqui una dinàmica col·laborativa entre els jugadors.

Continguts que s'hi treballen

Nombres primers i nombres compostos. Càlcul mental. Producte. Múltiples i divisors. Enters positius. Factorització.

Competències que es treballen

- **Competència comunicativa, lingüística i audiovisual**
- **Competència matemàtica**
- **Competència d'aprendre a aprendre**
- **Competència d'autonomia i iniciativa personal** . Cal decidir quina és la millor fitxa per tirar en cada moment, per tal de poder guanyar
- **Competència social i ciutadana** . És un joc per a més d'una persona

Mòduls relacionats

Nombres, representacions:

- Algoritme d'Euclides
- Puzzle de fraccions
- qui és qui, fraccions
- cub i nombres senars

Puzzles:

- els 7 hexàgons
- de quadrats

Relacions amb la història

La primera prova indiscutible del coneixement dels nombres primers es remunta al voltant de l'any 300 a.C. i es troba en els Elements d'Euclides (volums VII a IX). Euclides defineix els nombres primers, demostra que n'hi ha infinits, defineix el màxim comú divisor i el mínim comú múltiple i proporciona els algorísmes per determinar-los que avui es coneixen com algorisme d'Euclides.
El garbell d'Eratòstenes és un mètode senzill que permet trobar nombres primers.
Després de l'època de la Grècia antiga, no hi va haver gaires avenços en l'estudi dels nombres primers fins al segle XVII. El 1640 Pierre de Fermat va enunciar sense demostrar-lo el petit teorema de Fermat, (Si p és un nombre primer, aleshores, per cada nombre natural a , $a^p \equiv a \pmod{p}$); més endavant el van demostrar Leibniz i Euler. Pot ser que molt abans ja es conegera un cas especial d'aquest teorema a la Xina. ,
Fermat va enunciar la conjectura de què tots els nombres de la forma $2^{2^n}+1$ són primers i va verificar la hipòtesi fins a $n = 4$ (és a dir, $2^{16} + 1$). Però Euler va demostrar que el següent nombre de Fermat ($2^{32} + 1$) és compost (un dels seus factors primers és 641). De fet, fins avui no s'ha trobat cap altre nombre primer de Fermat a banda dels que ja coneixia Fermat.
El monjo francès Marin Mersenne va investigar els nombres primers de la forma $2^p - 1$, amb p primer. En honor seu, avui s'anomenen nombres de Mersenne.
Altres matemàtics han anat estudiant els nombres primers i n'han trobat moltes propietats. Actualment encara és un tema en el que s'està treballant. Per exemple hi ha la Conjectura de Goldbach, que és un dels

problemes oberts més antics i que es considera dels més difícils de resoldre. El seu enunciat, en canvi, és fàcil d'entendre: Tot nombre parell més gran que 2 es pot escriure com a suma de dos nombres primers.

Aplicacions

Disseny d'engranatges: els nombres de dents de les rodes dentades es procura triar-los de forma que siguin nombres primers o parelles de nombres primers entre ells. D'aquesta manera cada dent d'una de les rodes entra en contacte el mateix nombre de vegades amb cada una de les dents de l'altra roda i el desgast és uniforme.
Criptografia de clau pública: l'algorisme RSA es basa en l'obtenció de la clau pública mitjançant la multiplicació de dos nombres grans (majors de 10^{100}) que siguin primers. La seguretat d'aquest algorisme radica en el fet que no hi ha maneres ràpides de factoritzar un nombre gran en els seus factors primers utilitzant ordinadors tradicionals.

Activitats complementàries

Plantejar l'activitat no com un dòmino, sinó com un trencaclosques. Cal encaixar les 36 peces i observar quina figura surt. Es pot fer de manera individual o bé col·lectiva. En aquest cas convé verbalitzar els raonaments que es fan. Per exemple: "Aquí hi ha els factors 3 i 5. On és el 15?"

Primària: Trobar els nombres primers tal com ho va fer Eratòstenes. S'escriuen tots els nombres, per exemple fins el 100 o el 200, i després es van eliminant els múltiples de 2, els múltiples de 3, els de 4, ... i així van quedant els nombres que no són múltiples de cap, és a dir, els nombres primers.

Secundària: Quin és el nombre primer més gran que es coneix? Hi ha alguna manera de trobar-los tots?
Exemples de la Conjectura de Goldbach: 4 = 2 +2 ; 6 = 3 + 3 ; 8 = 3 + 5 ; 10 = 5 + 5; 12 = 5 + 7, ...

Per saber-ne més

Els nombres primers de Mersenne són aquells que es poden expressar de la forma $2^n - 1$, on n és qualsevol nombre. De moment només se n'han descobert 37, però com que són molt grans tenen molt d'interès sobretot per utilitzar-los en criptografia.

Més informació

mmaca
Museu de Matemàtiques de Catalunya

Mòdul

Els set hexàgons.

Edat mínima recomanada

Cicle Mitjà d'Ed. Primària.

Descripció del material

7 peces de fusta hexagonals. Cada hexàgon té pintats els 6 triangles equilàters que el formen de diferents colors de manera que no hi ha dues peces iguals

Descripció de l'activitat que es planteja

En aquest puzle de 7 hexàgons, es tracta de disposar-los de forma que els colors contigus coincideixin.

Passes per assolir el repte proposat

- Cal reconèixer les set peces i veure'n les semblances i diferències.
- Es va construint el mosaic per afinitat de colors.
- Cal posar-ne un al mig i intentar construir la figura. Quan això no resulti, canviar el del mig.
- Cal anar descartant hexàgons fins trobar l'únic que pot estar en aquesta posició. (està marcat discretament al revers per si el visitant necessita ajuda).

Continguts que s'hi treballen

- Geometria plana: recobriments del pla, paral·lelismes, polígons, àrees, Tales i semblança, relació amb les circumferències circumscrites, simetries.
- Fraccions (proporcions entre àrees).
- Efectes òptics i perspectiva.
- Iteració d'un procés.
- Tècniques de comptar i combinatòria.

Competències que es treballen

- **Competència artística i cultural**: en tots els mòduls però en particular els geomètrics es treballa la competència artística, l'apreciació de les matemàtiques en l'art i l'actitud davant el fet cultural i, en particular, l'artístic.
- **Competència matemàtica**: concretament en la dimensió dedicada a la geometria i també al raonament lògic.
- **Competència d'aprendre a aprendre**: en la resolució d'aquest mòdul s'ha d'anar iterant un procés i fer un raonament lògic descartant opcions no vàlides fins a arribar a la solució.
- **Competència d'autonomia i iniciativa personal:** el mòdul requereix presa de decisions i constància per a arribar a la solució.

Mòduls relacionats

"Els nou quadrats": Es tracta d'un puzle semblant on hi figuren nou quadrats dividits des del centre en quatre zones, cada una d'un color. Resulta molt més fàcil trobar una solució ja que, de permutacions circulars de 4 elements, només n'hi ha 6. Com que se'n utilitzen 9, se n'han de repetir 3. Això fa que hi hagi moltes solucions i que sigui molt fàcil de trobar-ne una.

Relacions amb la història

Aquest puzle fet amb peces hexagonals ens demana crear-lo amb afinitat de colors. Deixant de banda això, el recobriment del pla amb hexagons sí que és un recurs explotat a la vida quotidiana, potser copiat de la naturalesa (ruscs d'abelles) i aplicat en diversitat de construccions, sigui per la seva funcionalitat en l'emmagatzematge com per les qualitats artístiques, més concretament, ho veiem en arquitectura, enrajolat de parets, decoració mural, "pachwork" i molt més!

Per posar-ne un exemple proper, la reconstrucció del mercat de Santa Caterina de Barcelona, utilitza aquest recobriment no en un pla sinó a una superfície amb relleu. A més, cada hexagon està format per petites rajoles, és clar, també hexàgonals.

[3]

Però no és un recurs propi d'aquí sinó explotat en l'arquitectura mundial. Vegem el disseny d'un orquideorama de Colòmbia:

[2]

Aplicacions

Activitats complementàries

- Observar la geometria: els polígons que s'hi troben (hexàgon, triangle equilàter, rombes, trapezis i altres figures que s'obtenen unint triangles), regularitat, paral·lelisme, simetria...
- Perímetres i àrees.
- Fraccions: fracció d'una peça, fracció del conjunt, fraccions equivalents...
- Recobriments del pla: tessel·lacions triangulars, hexagonals,

ròmbiques, amb trapezis...

- Iteració: estimació del nombre d'hexàgons que caldrien per completar una segona volta, una tercera...
- Comptar hexàgons, comptar rombes, buscar altres figures que recobreixin...
- Efectes òptics: descobrir que els colors ens ajuden a veure-hi 3 cubs en perspectiva al centre de la imatge.
- Semblança entre els hexàgons que es van formant. Buscar-hi triangles equilàters de diferents mides. Proporcions.
- Amb els triangles equilàters trobats i en posició de Tales, treballar el teorema.
- Comparar proporcions lineals amb proporcions entre àrees de les figures semblants.
- Creació de la pròpia construcció artística inspirada en els set hexàgons (es pot fer amb pentàgons? I amb altres figures? Per què s'aconsegueix un dibuix similar amb circumferències? (perquè el radi és, aproximadament, el costat de l'hexàgon inscrit a una circumferència, així que fent una circumferència central i sis circumferències equidistants amb el centre sobre aquesta primera, obtenim un dibuix semblant).
- Descobrir que els colors ens ajuden a veure-hi 3 cubs en perspectiva, analitzar la perspectiva del cub i descobrir que la seva representació plana és hexagonal. Això ens pot portar a parlar de projeccions o també de seccions del cub.
- Successions: posant l'exemple dels nombres triangulars i estudiant aquesta successió, després es pot demanar comptar quants hexàgons necessitem per fer n voltes.
- Buscar una tècnica per comptar els hexàgons que hi trobem a la figura, no només les peces sinó els formats amb triangles de més d'una peça. Comptar-ho de forma sistemàtica.
- Combinatòria: Ja que partim de 7 hexàgons pintats amb els mateixos 6 colors però de maneres diferents, pensar quants més en podríem fer (estudi del grup circular de 6 elements, relació amb les ordenacions de 6 elements). Solució: hi ha 120 hexàgons possibles, dels quals només n'utilitzem 7.

Per saber-ne més

Fractals creats a partir de la mateixa disposició dels 7 hexagons, explicació i exercicis explicats en la referència [1].

Més informació

[1] http://pseudopodo.wordpress.com/2008/12/01/una-paradoja-fractal/
Construccions arquitectòniques:
[2] http://simbiosisgroup.net/2008/03/22/orquideorama-plan-b-arquitectos-colombia/
[3] http://cavdesign.blogspot.com/2007/07/mercado-santa-caterina.html

mmaca
Museu de Matemàtiques de Catalunya

Mòdul

Empaquetar cilindres.

Edat mínima recomanada

Des dels més petits

Descripció del material

Capsa de DM (una mena de fusta artificial) amb tres compartiments de mides diferents.
Molts cilindres de PVC de 32 mm de diàmetre.

Descripció de l’activitat que es planteja

Cal intentar col·locar el màxim nombre possible de cilindres en cadascun dels tres compartiments de la capsa. Entre els tres compartiments es poden col·locar un total de 85 cilindres.
Quan es comença a fer proves de seguida es veu que hi ha dues disposicions que rivalitzen entre elles. Aquestes disposicions reben el nom de "triangular" i "quadrangular" i, amb una mica de manipulació, és molt fàcil adonar-se'n del perquè d'aquests noms (a la disposició triangular també se la pot anomenar hexagonal).

Passes per assolir el repte proposat

Per aconseguir col·locar un total de 85 cilindres en els tres compartiments cal fer el següent:

- Col·locar 21 cilindres en el compartiment més petit fent servir la disposició quadrangular. Surt 7x3 (7 files de 3)
- Col·locar 36 cilindres en el compartiment més gran fent servir la disposició triangular. Surt 5x4+4x4 (4 files de 5 i 4 files de 4)
- Col·locar 28 cilindres en el compartiment mitjà. En aquest cas podem fer servir qualsevol de les dues disposicions. Amb la quadrangular surt 7x4 (7 files de 4). Amb la triangular surt 4x4+3x4 (4 files de 4 i 4 files de 3).

Continguts que s’hi treballen

- Estudi de les diferents solucions d'un problema en funció de les condicions inicials.
- Enrajolament de superfícies amb mosaics.
- Extrapolació.
- Inscripció-circunscripció de figures geomètriques

Competències que es treballen

- **Competència matemática**: perquè dóna peu a plantejar i intentar resoldre problemes similars tot modificant les condicions inicials.
- **Competència en el coneixement i interacció amb el món físic**: ja que la disposició natural de cilindres amuntegats per efecte de la gravetat és la triangular. Això dóna peu a analitzar el perquè.
- **Competència en autonomia i iniciativa personal**: perquè el mòdul ens convida a anar provant diferents situacions.
- **Competència en expressió cultural i artística:** perquè ens fa pensar en els mosaics.

Mòduls relacionats

- Mosaics amb miralls.
- Perímetre, àrea i volum.

Relacions amb la història

Aplicacions

La disposició que trobem habitualment a la natura és la triangular (o hexagonal) [1] i un dels exemples més evidents ens el donen les abelles quan fan els seus ruscs. Però n'hi ha d'altres en camps totalment diversos, per exemple la geologia.

Si amunteguem molts cilindres un damunt de l'altre, per exemple tuberies d'aigua en una empresa de materials per a la costrucció, aquests es disposen de manera triangular enlloc de quadrangular, ja que aquesta darrera disposició no és estable.

Uns pocs exemples de diferents aplicacions són els següents:

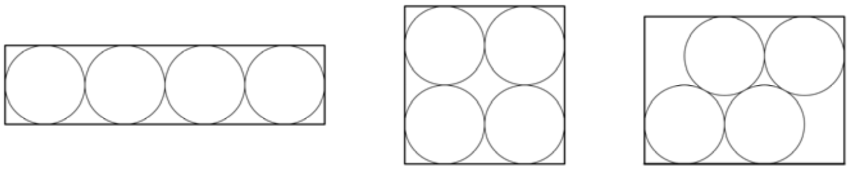
- Llapis de colors: si agafem un munt de llapis de colors amb una goma elàstica aquests es disposen seguin la configuració hexagonal i ho fan tant si són hexagonals com cilíndrics.
- El paquet de cigarretes en conté 20 i ho fa seguint la distribució triangular 7-6-7. Així s'aconsegueix empaquetar un número rodó de cigarretes (tècnica subliminal per tal que els fumadors fumin més) amb un disseny adequat a les butxaques.
- Capses d'ampolles: en caixes de coca-coles, cerveses i demés begudes, aquestes es disposen sempre de manera quadrangular. Ja hem vist que en el cas de compartiments petits és més efectiva la disposició quadrangular i una caixa de begudes massa gran pesaria massa.
- Emmagatzemar: amb la següent imatge no calen paraules:

Activitats complementàries

1) Podem modificar les concicions inicials del problema per donar lloc a solucions diferents: per exemple, modificant convenientment l'altura de la capsa podem aconseguir que la millor distribució dels cilindres sigui una combinació de les dues disposicions: quadrangular i triangular.

Resposta: en el compartiment petit n'hi ha prou amb augmentar l'altura de manera que hi poguem posar una renglera de dos en disposició triangular però no una renglera de tres en disposició quadrangular. En el cas del compartiment gran, si augmentem una mica l'altura podem disposar de manera quadrangular la filera de dalt de tot i augmentar en un cilindre la capacitat.

2) Fent dibuixos en un paper podem investigar quantes capses diferents podem construir per col·locar-hi 3 cilindres sense que "ballin" tot seguint les disposicions quadrangular, triangular i combinacions d'ambdues. Podem anar augemtant el nombre de cilindres: 4, 5, 6... i anar dissenyant capses diferents per tal de col·locar-los tots, sempre sense que ballin... ens trobarem més mides de les que ens esperem. Aquesta activitat es pot adaptar a nivells molt diferents si ens limitem a fer els dibuixos o bé si ens plantejem de calcular les mides de les capses. Un cop dissenyades les capses podem analitzar quina té el volum més petit, quina el té més gran, quina té més gran o més petita la superfície lateral, etc.
Resposta: Podem fer 2 capses diferents per a 3 cilindres. 3 capses diferents per a 4 cilindres. 4 capses diferents per a 5 cilindres. 5 capses diferents per a 6 cilindres... 11 capses diferents per a 14 cilindres.
En el cas de 4 cilindres les 3 solucions són les següents:



Algunes qüestions més curtes:

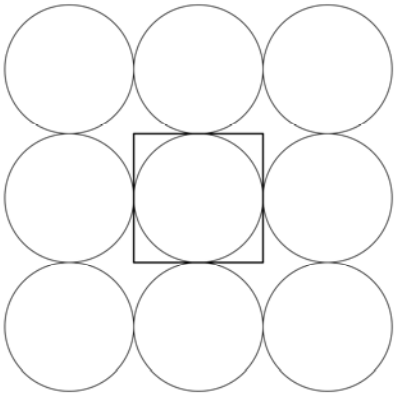
1) Quin empaquetament seria el millor si la capsa fos molt gran?
Resposta: L'empaquetament quadrangular aprofita millor l'espai a les vores de la capsa i l'empaquetament triangular aprofita millor l'espai inerior de la capsa. Si la capsa és molt gran (en comparació al tamany dels cilindres) hi ha molta més proporció de cilindres a la part interior i la configutació triangular resulta ser més eficaç.

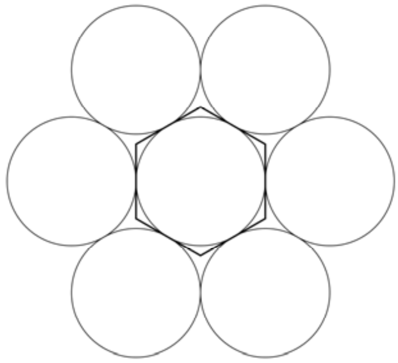
2) Si empaquetéssim esferes enlloc de cilindres quines disposicions tridimensionals obtindríem? quin nom els hi posaríem?

Resposta: disposició cúbica, disposició tetraèdrica i tenim una tercera disposició que donaria lloc a un prisma oblic de base quadrada.

Per saber-ne més

-Quina fracció ocupa un cercle inscrit en un quadrat? Quina fracció ocupa un cercle inscrit en un hexàgon?.





En la disposició quadrangular cada cilindre disposa d'una parcel·la quadrada tota per a ell. En el cas de la disposició triangular cada cilindre disposa d'una parcel·la hexagonal. A simple vista es veu que en el cas de la parcel·la hexagonal el cilindre disposa de menys espai i això vol dir que en podem col·locar els cilindres més "apretats".
Fent uns pocs càlculs es comprova que el cercle ocupa una fracció de $\frac{\pi}{4}$ del quadrat en el qual està inscrit, i això vol dir que aprofita aproximadament el 78'5% de la superfície.

En canvi si l'inscrivim en un hexàgon ocuparà una fracció de $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$, i això equival a aprofitar un 90'7% de la superfície.

-En una capsa de dimensions infinites en quin percentatge millora l'empaquetament triangular al quadrangular?
Si tenim en compte els resultats anteriors obtenim que l'empaquetament triangular millora aproximadament en un 15'5% l'empaquetament quadrangular en el cas en que les vores no comptin per a res (empaquetament infinit).

Més informació

[1] http://www.cienciateca.com/ctshexag.html

Mòdul

Habitació d’Ames

Edat mínima recomanada

Des dels més petits

Descripció del material

Es tracta de la maqueta d’una petita habitació que no té la forma rectangular habitual que tenen les habitacions, sinó que ha estat distorsionada de tal manera que [1], vista des d’un punt determinat (i només des d’aquest punt) ens sembla que sigui una habitació d’aparença normal però que té la sorprenent propietat que els objectes van canviant de mida a mesura que es desplacen pel seu interior [2].

Descripció de l’activitat que es planteja

Comprovar que certament es produeix un efecte visual molt curiós (els objectes canvien de mida misteriosament) i entendre que es tracta d’una il·lusió òptica. Intentar comprendre el perquè d’aquesta il·lusió òptica i els seus fonaments geomètrics.

Passes per assolir el repte proposat

- Cal observar l’habitació diverses vegades tant des del punt d’observació com des de la paret lateral que ens permet veure el seu interior.
- Cal posar especial atenció en certs detalls: enrajolat del terra, rellotge de paret, finestra i, sobretot, comprovar que els dos ninots tenen la mateixa mida, encara que des del punt d’observació no ho sembli.
- Si disposem de càmera de fotos és interessant fer una fotografia

des del punt d'observació.

Continguts que s'hi treballen

- Perspectiva (projecció)
- Anamorfisme
- Geometria en el pla i en l'espai

Competències que es treballen

- **Competència matemàtica**: perquè ens fa pensar en diferents conceptes matemàtics com per exemple el què vol dir parlar de dues o de tres dimensions.
- **Competència en el coneixement i interacció amb el món físic**: ja què es treballa el punt d'observació d'una situació real.
- **Competència en autonomia i iniciativa personal**: perquè l'efecte visual que ens mostra aquest mòdul cal que l'entengui cada persona a partir de la seva pròpia observació.
- **Competència per aprendre a aprendre**: perquè ens obliga a treure el nostre sentit crític i ens ensenya la importància de veure les coses des de diverses perspectives.
- **Competència en comunicació lingüística**: ja què cal fer ús d'un vocabulari específic de geometria per poder parlar del fenomen observat.
- **Competència en expressió cultural i artística**: perquè aquest mòdul convida a observar i analitzar la obra artística basada en anamorfismes desenvolupada per autors com Julian Beever [3], Kurt Wenner [4] i Eduardo Relero [5] entre d'altres.

Mòduls relacionats

- Il·lusions òptiques.
- Estereografies.
- Anamorfismes cilíndrics.
- Home vitrubià anamòrfic.

Relacions amb la història

L'habitació d'Ames va ser construïda per primera vegada l'any 1946 per l'oftalmòleg nord-americà Adelbert Ames, Jr. (1880-1955), basant-se en una idea del metge i físic alemany Hermann Helmholtz (1821-1894).

Aplicacions

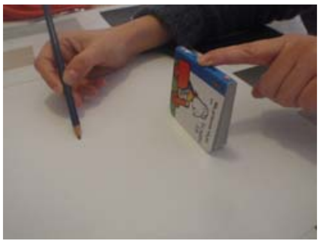
L'habitació d'Ames s'ha utilitzat en algunes pel·lícules per fer

efectes especials. Potser el cas que més ens crida l'atenció sigui la trilogia de "El senyor dels anells" durant el rodatge de la qual es van utilitzar diversos conjunts d'habitacions d'Ames per modificar la mida dels personatges a la pantalla, és clar que, en veure la pel·lícula aquestes habitacions són imperceptibles.
Hi ha una altra pel·lícula en la qual hi surt explícitament una habitació d'Ames; es tracta de "Charlie i la fàbrica de xocolata", però no la versió de l'any 2005, sinó la que es va rodar l'any 1971.

Activitats complementàries

1) Amb una simple càmera de fotos i una mica d'imaginació es pot jugar a canviar la mida aparent de les persones. Només cal que una es posi més lluny que l'altra i fer la foto de tal manera que sembli que estan al costat, per exemple donant-se la mà. Aquesta activitat ens permet reflexionar sobre la informació que perdem quan amb una imatge en dos dimensions volem representar una situació en tres dimensions, fet en el qual es basa la il·lusió òptica de l'habitació d'Ames.

2) Si es disposa de paper, llapis i goma és interessant intentar dibuixar un anamorfisme senzill, per exemple un quadrat: l'objectiu és dibuixar en un full un quadrilàter de tal manera que vist des d'un punt determinat (i mirant amb un sol ull) sembli un quadrat en posició vertical damunt del paper. Per aconseguir-ho podem ajudar-nos de qualsevol peça quadrada que puguem mantenir dreta damunt del paper; llavors, mirant amb un sol ull podem marcar al full les projeccions dels vèrtex vistes des del nostre ull. Per últim només caldrà unir els punts dibuixats al paper amb línies rectes. Cal recordar que l'efecte visual només s'aconsegueix mirant des del punt adequat i amb un sol ull. Si fem una fotografia des d'aquest punt és més fàcil percebre l'efecte ja que tindrem una imatge totalment parada (recordem que la càmera de fotos només té un ull!). Un cop dibuixat el quadrat podem afegir altres polígons al mateix full seguint el mateix procediment però prenent sempre el mateix punt d'observació. Amb diversos objectes dibuixats l'efecte serà més evident. [3], [5]



3) Si a la cambra d'Ames hi féssim dos forats a la paret davantera per poder observar amb els dos ulls alhora... què passaria amb l'efecte òptic i per què?
Resposta: Només pel fet de mirar amb els dos ulls alhora es

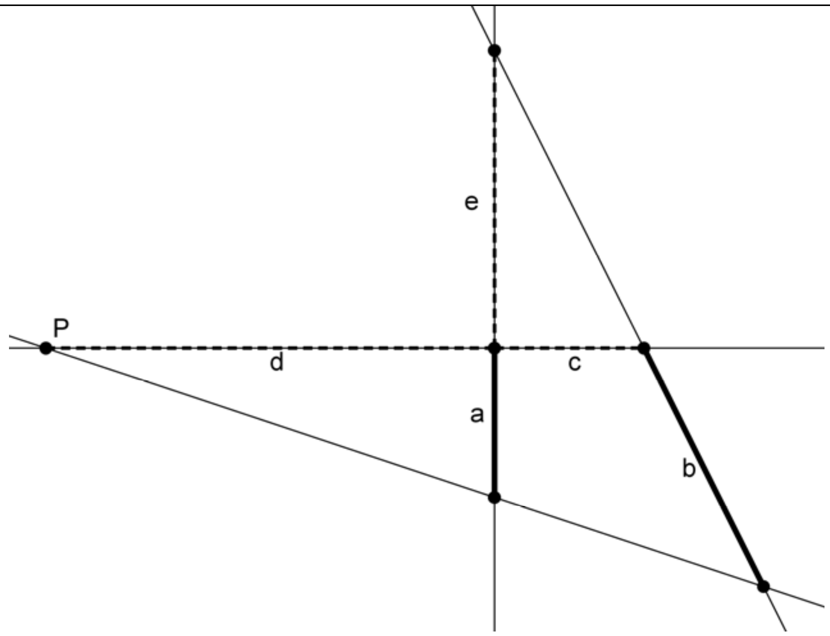
perdria l’efecte visual que s’aconsegueix amb la cambra d’Ames quan es mira des del punt d’observació. Amb els dos ulls veuríem en tres dimensions i percebríem la inclinació de la paret frontal. És interessant agafar dos bolígrafs amb els braços ben estirats i intentar fer que es toquin les seves puntes, primer amb un ull tancat i després mirant amb els dos ulls.

4) Igual que qualsevol habitació ortoèdrica (tal com són la majoria) l’habitació d’Ames té sis cares: el terra, el sostre i quatre parets. En el cas d’una habitació normal totes aquestes cares són rectangles, però en el cas de l’habitació d’Ames del museu tenim diferents quadrilàters dels quals la paret que està completament oberta resulta ser un rectangle. Quin tipus de quadrilàter són les altres cinc cares?
Resposta: Un rectangle, dos trapezis isòsceles i dos trapezis rectangles.

5) Creus que es poden construir diferents habitacions d’Ames de manera que l’efecte aconseguit sigui més o menys potent? En el cas de l’habitació del museu els objectes "augmenten" gairebé el doble en desplaçar-se d’extrem a extrem de la paret frontal, tal com es pot observar mirant el ninot rosa des del punt de mira. Creus que es pot construir una habitació de manera que els objectes augmentin el triple? què creus que s’hauria de modificar?
Resposta: Sí és possible. Les proporcions de l’habitació d’Ames no són fixes, de manera que es poden fer les parets més o menys inclinades. Quan més inclinada sigui la paret que veiem de front més gran serà l’efecte aconseguit.

Per saber-ne més

Quan mirem l’habitació des del punt d’observació veiem una finestra perfectament rectangular formada per 10 quadrats i també veiem un rellotge de paret perfectament circular. En canvi, quan mirem per la paret lateral oberta veiem el rellotge i la finestra distorsionats. Ha calgut dibuixar-los distorsionats per tal d’aconseguir l’efecte òptic desitjat. I aquesta distorsió (que podríem aconseguir per mitjans físics tot projectant ombres) es pot expressar matemàticament. Plantejarem una situació senzilla però que està directament relacionada amb l’habitació.
Si observem el següent esquema



Podem suposar que P és el punt d'observació. La recta que conté els segments e i a és la paret virtual que volem que percebi l'observador. La recta que conté el segment b és la paret real, que està inclinada i conté les imatges distorsionades. La recta que conté els segments d i c és la visual de l'observador quan mira directament al front. I la última recta que apareix és la visual de l'observador quan mira amb una certa inclinació. Quan vulguem que l'observador percebi que un objecte es troba a una distància a del centre de la paret caldrà que dibuixem aquest objecte a una distància b del centre de la paret inclinada. La funció que relaciona les variables a i b és la següent:

$$b(a) = \frac{a(c+d)}{ed+ac}\sqrt{e^2+c^2}$$

En el nostre cas hem suposat que els valors de a i b són negatius si estan per sota de la recta que conté els segments c i d i, en cas contrari, són positius.
Pot ser un bon exercici per a alumnes de batxillerat intentar demostrar o deduir l'expressió anterior.

Més informació

[1] http://ca.wikipedia.org/wiki/L%27habitaci%C3%B3_d%27Ames
[2] http://www.youtube.com/watch?v=6aJlX0AEWys&feature=related
[3] http://users.skynet.be/J.Beever/pave.htm
[4] http://www.kurtwenner.com/streetportfolio.htm
[5] http://anamorfosiseduardo.blogspot.com/

mmaca
Museu de Matemàtiques de Catalunya

Mòdul

Perímetre, Àrea i Volum

Edat mínima recomanada

Alumnes de Segon d’ESO.

Descripció del material

1r Mòdul:

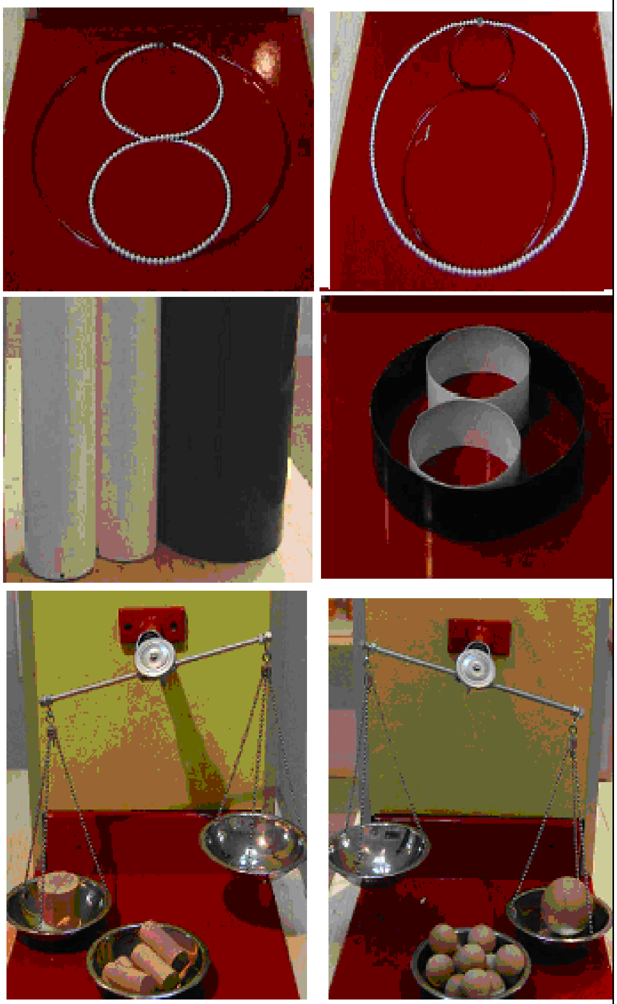
- Una petita corda de boletes que es posa sobre una base on hi ha una regata de diferents circumferències.

2n Mòdul:

- Joc de tres tubs cilíndrics on la suma dels diàmetres dels dos petits coincideix amb el diàmetre del gran.
- Secció dels cilindres anteriors per simular la vista aerea dels tubs.

3r Mòdul:

- Una balança
- Un joc de cilindres de diferents diàmetres
- Un joc d’esferes de diferents radis.



Descripció de l’activitat que es planteja

Estudiar com varien el perímetre, l'àrea i el volum de figures semblants i quina relació hi ha amb la raó de semblança.

Passes per assolir el repte proposat

L'itinerari esta format per tres mòduls seqüencials, amb dues activitats cadascun.

El primer mòdul proposa comparar el perímetre d'un cercle gran amb la suma dels perímetres de dos cercles més petits, iguals o diferents (en tots dos els casos, la suma dels diàmetres dels cercles petits és igual al diàmetre del gran).

El segon mòdul demana escollir si passarà més quantitat de fluid d'un tub de 20 cm. de diàmetre o de dos de 10 cm. de diàmetre (en un primer moment, es mostren els tubs grans de peu i successivament es poden mirar des de dalt i comparar les àrees).

En tercer mòdul es demana igualar el pes d'un cilindre amb cilindres que tenen la mateixa altura, però meitat de diàmetre de base. Es demana després que es faci el mateix amb esferes.

Continguts que s'hi treballen

- La proporcionalitat entre magnituds lineals, superficials i volumètriques.
- Relació entre figures semblants.

Competències que es treballen

- **Competència en comunicació lingüística:**Han de ser capaços de descriure, explicar, interpretar, justificar, argumentar, ... tots els coneixements apresos en aquesta activitat.

- **Competència Matemàtica:** Ús de tècniques de representació geomètrica per projectar propietats dels objectes.
- Interpretació i presentació de la informació obtinguda a partir de l'experimentació.

- **Competència d'Aprendre a aprendre:**Desenvolupament d'estratègies per buscar, comprendre i interpretar la informació.

- **Autonomia i Iniciativa Personal:**Capacitació d'estratègies de planificació i execució en els diferents activitats del mòdul.

- **Coneixement i interacció amb el món físic :**Coneixement de l'entorn i les seves propietats.

Mòduls relacionats

Relacions amb la història

En Geometria, la proporcionalitat juga un paper essencial, en ella es fonamenta tot allò que es refereix a la semblança de figures. Dues figures són semblants si una d'elles és una ampliació o reducció de l'altra. En el cas de polígons, això vol dir exactament que tenen els costats homòlegs directament proporcionals.
En aquest aspecte cal destacar el Teorema de Thales, que ens diu que si dues rectes concurrents són tallades per un sistema de rectes, aleshores aquestes són paral·leles, si i només si els segments que determinats a les rectes concurrents són proporcionals.
Això ens serveix per a trobar quina relació hi ha entre figures semblants i els seus perímetres, àrees i volums.

Aplicacions

- Ús de les escales en els plànols
- Càlcul de distàncies inaccessibles.

Activitats complementàries

Per saber-ne més

Més informació

Web amb molts applets de GeoGebra per comprendre una mica més la proporcionalitat Geomètrica.

http://phobos.xtec.cat/cperales/pagines_html/proporcionalitat.html

Web amb un seguit d'activitats que ens ajuden a comprendre les relacions entre figures semblants i les seves magnituds: perímetre, àrea i volum.

http://descartes.isftic.mepsyd.es/edad/4esomatematicasB_val/semejanza/quincena6_contenidos_3a.htm

Mòdul

Pont de Leonardo

Edat mínima recomanada

Totes les edats

Descripció del material

Plafó i 24 peces de fusta de pi que s'adapten entre si per muntar el pont. Muntatge sobre una taula.
16 peces tenen encaixos, i 8 peces no en tenen.
Mida: 150 x 45 x 48 cm

Descripció de l'activitat que es planteja

S'ha de construir el pont seguint les indicacions que hi ha en el plafó. Per construir-lo completament cal repetir les passes fins que s'acaben les fustes. Es pot treballar individualment o en grup.

Passes per assolir el repte proposat

Estan indicades clarament en el plafó.

Continguts que s'hi treballen

Geometria espacial, recurrència, polígons, polígons estrellats, angles.

Competències que es treballen

- **Competència comunicativa, lingüística i audiovisual**: És una bona activitat per treballar en grup.
- **Competència artística i cultural**: Aquest mòdul ens permet endinsar-nos en la història de Leonardo i en tota la seva obra.
- **Competència matemàtica**: Pels conceptes matemàtics i les metodologies que s'hi treballen.
- **Competència d'aprendre a aprendre**: En el procés de

construcció del pont cal treballar de forma iterativa

- **Competència d’autonomia i iniciativa personal**: En cas de treballar individualment.
- **Competència social i ciutadana**: És una bona activitat per treballar en grup.
- **Competència en el coneixement i la interacció amb el món físic**

Mòduls relacionats

Engranatges

Relacions amb la història

Leonardo da Vinci (Vinci, Toscana, 15 d'abril de 1452 - Amboise, 2 de maig de 1519) fou un artista florentí i un home d'un esperit universal, a la vegada, científic, enginyer, inventor, anatomista, pintor, escultor, arquitecte, urbanista, naturalista, músic, poeta, filòsof i escriptor.
Leonardo fou alumne del cèlebre pintor florentí Andrea del Verrocchio. Els seus primers treballs importants foren realitzats al servei del duc Lluís Maria Sforza a Milà. Posteriorment treballà a Roma, Bolonya i Venècia, i passà els últims anys de la seva vida a França, tot acceptant la invitació del rei Francesc I de França.
Leonardo de Vinci sovint ha estat descrit com l'arquetip i el símbol de l'home del Renaixement, un geni universal, un filòsof humanista amb una curiositat il·limitada, i una gran força creativa. Ha estat considerat com un dels pintors més destacats de tots els temps i potser la persona més polifacètica i talentosa en un major nombre d'àmbits diferents.
Leonardo és més conegut com a pintor; dues de les seves obres, *La Gioconda* i *El Sant Sopar*, són pintures molt cèlebres, sovint copiades i parodiades; el seu dibuix de l'*Home de Vitruvi* ha estat igualment reproduït en nombrosos treballs. Només han sobreviscut fins a l'actualitat una quinzena d'obres; aquest petit nombre és una conseqüència del temps que dedicava a les seves constants experimentacions tècniques, i a la seva procrastinació crònica. Malgrat tot, aquestes poques obres, i tot el que apareix als seus quaderns plens de dibuixos, diagrames científics i reflexions sobre la naturalesa de la pintura, han estat un important llegat per a les següents generacions d'artistes, equiparable, salvant les distàncies, al llegat de Miquel Àngel.
Com a enginyer i inventor, Leonardo desenvolupà idees molt avançades per l'època que vivia, des de l'helicòpter, al carro de combat, el submarí o, fins i tot, l'automòbil. Molt pocs dels seus projectes arribaren a ser construïts; ni tan sols eren realitzables a la llum dels coneixements del seu temps, però algunes de les seves petites invencions, com una màquina per a mesurar el límit elàstic d'un cable, entren en el món de la manufactura. En tant que científic, les aportacions de Leonardo van contribuir a desenvolupar el coneixement en els àmbits tan diversos com l'anatomia, l'enginyeria civil i l'òptica. [1]
Històricament Leonardo va dissenyar aquest pont de salvament com un

estri militar. Millorava la mobilitat i la rapidesa de desplaçament.
Aquest pont és molt senzill i ràpid de construir, i és prou resistent per utilitzar-lo d'ajuda per creuar obstacles.
A més es pot desmuntar amb molt poc temps, un cop ja s'ha utilitzat. L'absència d'accessoris, com ara cordes o ferro, afavoreix el ràpid desmuntatge, que perd totalment la seva estabilitat si s'elimina qualsevol de les fustes que el componen. [2]

Aplicacions

Permet creuar obstacles de forma relativament ràpida i segura.

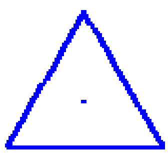
Activitats complementàries

Un cop està el pont construït, cal mirar-lo per davant. Sembla que es veu part d'una línia poligonal . Aquí sorgeixen unes quantes preguntes:

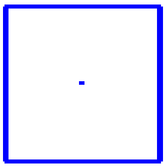
1. Influeix el gruix de la fusta amb l'obertura del pont? Influeix la llargada de les fustes amb l'obertura?
2. Realment és un polígon estrellat, o en són dos?
3. Quin és l'angle entre els costats de la línia poligonal?
4. Aquesta línia poligonal acaba tancant-se? Si és el cas, quantes voltes fa abans de tancar?

Per saber-ne més

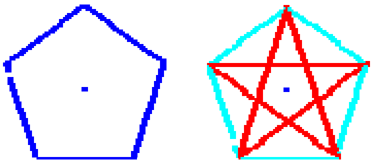
Còpia de l'enllaç a la pàgina web de les referències: [3]
Un polígon regular estrellat pot construir-se a partir del regular convex unint vèrtexs no consecutius de forma continua.
Es denoten por N/M essent N el número de vèrtexs = N del polígon regular convex i M el salt entre vèrtexs.
N/M ha de ser fracció irreductible, en cas contrari no es genera el polígon estrellat que indica la fracció.
És fàcil veure que N/M és el mateix polígon que N/(N-M), ja que el polígon que s'obté unint vèrtexs en un sentit i en el contrari és el mateix. És un comportament similar al dels nombres combinatoris.
Per trobar tots els polígons regulars estrellats que es generen d'un polígon regular de N costats, només cal considerar M enter entre 2 i (N/2), amb la condició de que la fracció que el denota sigui irreductible.
A continuació es presenten els polígons estrellats que es generen dels primers polígons regulares.



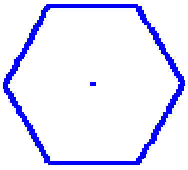
És fàcil veure que no es genera cap polígon estrellat a partir del triangle equilàter.
3/1 = 3 nombre enter ...No polígon estrellat. 3/2=3/1



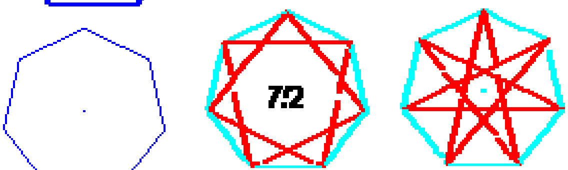
Tampoc el quadrat genera polígons estrellats regulars. 4/1 enter. 4/2 enter.



Polígon regular 5/2. És clar que no n'hi pot haver més.

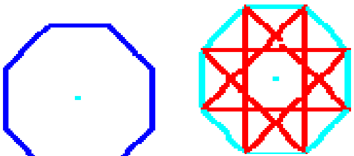


L'hexàgon regular no genera polígons estrellats. 6/1 polígon convex. 6/2 =enter . 6/3 enter.



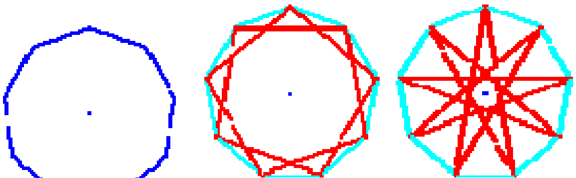
7/2 7/3

L' heptàgon regular genera dos estrellats, 7/2 i 7/3



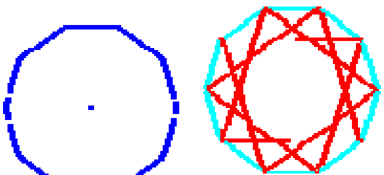
8/3

8/3 és l'únic estrellat que es genera partint de l'octògon regular.



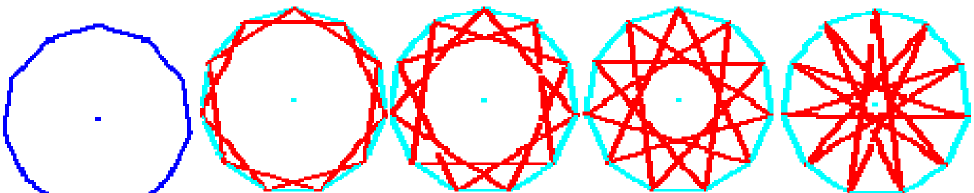
9/2 9/4

L'enneàgon genera dos estrellats, 9/2 i 9/4



10/3

No n'hi ha més, ja que 10/4 = 5/2 .



11/2 11/3 11/4 11/5

ANGLES EN POLÍGONS REGULARS

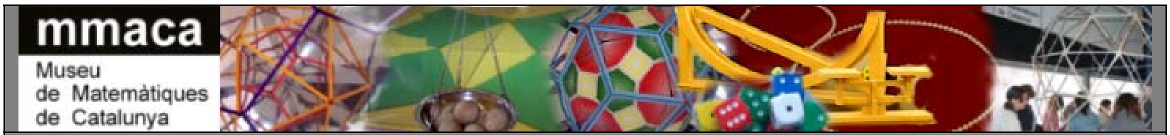
	Polígon regular estrellat N/M	**Polígon regular convex (fer M = 1 en l'estrellat) N**

Angle central	**360 · M/N**	**360/N**
Angle interior = 180 - central	**180 - 360·(M/N)**	**180 - 360/N**
Suma angles interiors = interior · N	(180 - 360 · M/N)·N= **180 (N-2M)**	**180 (N-2)**
Un polígon regular convex és un cas particular del polígon regular estrellat. M=1		

Més informació

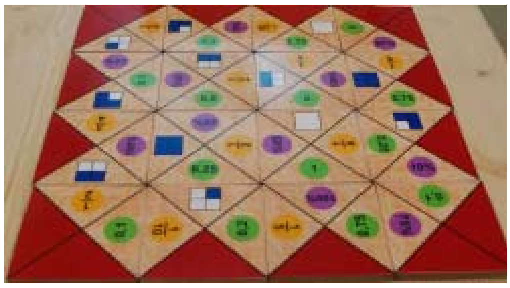
L'any 2005 a Freiburg (Alemanya) es va construir un "pont de Leonardo" gegant. Veure [4]

[1] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Leonardo.htm.
[2] http://www.macchinedileonardo.com/index.php?le-macchine-guerra#16
[3] http://roble.pntic.mec.es/jarran2/cabriweb/polirestrellado.htm
[4] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f6/Da_vinci_bridge.jpg



Mòdul

Trencaclosques de fraccions



Edat mínima recomanada

Persones a partir de 5é de primària.

Descripció del material

Hi ha dos trencaclosques: el petit (16 peces de 10x10 cm, per a jugar damunt d'una taula) i el gran (16 peces de 30x30 cm, per jugar a terra), en les quals hi ha dibuixades fraccions, números decimals, percentatges i gràfics.

Descripció de l'activitat que es planteja

L'activitat consisteix en casar valors equivalents i muntar un trencaclosques quadrat, 4x4 peces, amb la vora vermella exterior. No és tan fàcil com sembla.

Passes per assolir el repte proposat

- Podem començar a muntar el trencaclosques i veurem que hi ha diverses maneres d'encaixar les mateixes fitxes
- Fixem-nos que no és trivial començar per les vores perquè no existeix una única manera d'encaixar les vores.
- El punt clau és trobar dues parelles de fitxes que han d'anar per força juntes, no es poden aparellar amb cap altra fitxa. Es tracta de dues cantonades amb les seves respectives parelles.
- A partir d'aquí cal anar construint el trencaclosques posant a continuació d'aquestes les fitxes que només poden anar al costat d'aquestes dues parelles. Cal tenir en compte quines fitxes van al mig i quines van al contorn.

- Una estratègia alternativa és començar encaixant les 4 peces centrals (les que no tenen vores vermelles)

Continguts que s'hi treballen

Equivalència entre fraccions, números decimals, percentatges i gràfics.
Capacitat per a resoldre problemes.

Competències que es treballen

- **Competència comunicativa, lingüística i audiovisual** (si es treballa en grup es treballarà la competència comunicativa i lingüística, sinó només la audiovisual, concretament visual),
- **Competència matemàtica**
- **Competència d'aprendre a aprendre**
- **Competència d'autonomia i iniciativa personal** (aquesta competència es treballa sobretot quan s'intenta que els alumnes amb alguna indicació prèvia dedueixin que cal començar agrupant les peces que únicament es poden agrupar així)
- **Competència social i ciutadana** (en el cas de treballar en grup).

Mòduls relacionats

Trencaclosques:
- Tauler trencat de Sam Loyd.
- Cubs de colors.
- Els 7 hexàgons.

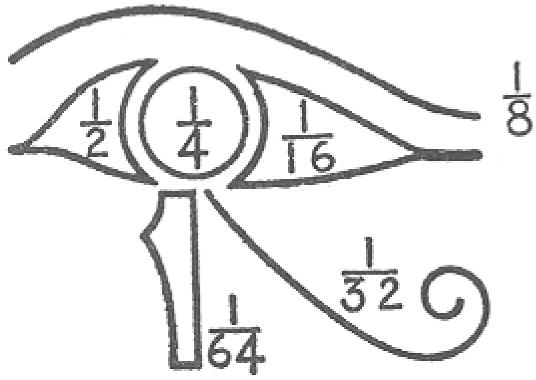
Fraccions:
- Qui és qui de fraccions.

Relacions amb la història

Les fraccions i els egipcis: L'ULL D'HORUS [2] .

Nut és la deesa del cel. **Tot** la desitjava, però aquesta tenia relacions secretes amb **Geb** (deu de la terra). En saber-ho, **Ra** (el sol) la castiga a no poder dormir cap mes ni cap any. Tot juga amb la lluna i aconsegueix guanyar-li cinc dies que li regala a **Nut**. Nut, agraida, li dona a **Tot** conc fills: **Osiris, Haroeris, Bet, Isis i Neftis**.
Osiris es casa amb la seva germana **Isis**, deixant sense companya a **Set** (la seva antiga muller). **Isis**, desesperada d'haver perdut el seu espòs, fa enemistar el seu fill **Horus** amb **Set** (el seu pare).
En un dels combats **Set** triomfa trencant l'ull d'**Horus** en sis trocets.
Al final, **Tot** es declara a **Horus** i li recomposa l'ull.
La part dreta de la còrnia valia 1/2, l'iris 1/4, la parpella 1/8, la part esquerra de la còrnia 1/16, la marca vermellosa de forma oblíqua, 1/32 i

la marca vermellosa vertical 1/64.



Les fraccions apareixen de les diferents combinacions de les parts de l'ull.

Aplicacions

En moltes activitats de la vida quotidiana necessitem convertir fraccions en percentatges o número decimals, per exemple per a comparar preus al supermercat, per entendre gràfics i estadístiques dels diaris.

Activitats complementàries

Més preguntes per fer pensar: (proposem una sèrie de preguntes per tal de que descobreixin com començar)

- Provant de fer el trencaclosques has trobat algun impediment? O bé sempre has trobat una sola peça a col·locar en cada lloc? (haurien de veure que en alguns casos només es pot fer un agrupament i en altres hi ha vàries solucions.
- Fent el trencaclosques has mirat si en algun punt el trencaclosques ja no es pot continuar? (haurien de veure que depenent de quina peça posin ja no es podrà continuar perquè ja no coincideix.
- Hi ha alguna peça que tan sols pugui portar-ne una al costat? Quina? (Sí, la de la cantonada del 20%, 0 amb la part del 0 i la cantonada 3/4 i gràfic d'1/4 per la part del 25%)
- Un cop vist aquestes dues parelles, com podem continuar? (unint les peces que van continuació d'aquestes amb una única possible solució)

Altres preguntes:

- Quants números hi ha en forma de fracció?
- I en forma de decimal?
- I en forma de percentatge?
- I en forma de gràfics?
- Les 4 peces interiors es poden ajuntar d'una sola manera?
- Les diverses maneres d'unir les 4 peces interiors que completen

el trencaclosques?

Per saber-ne més

La representació dels nombres reals en forma decimal: diferència entre la forma decimal d’un racional i d’un nombre real.
També la numeració dels nombres racionals a partir de la seva representació en fraccions.

Més informació

Les fraccions de l'ull d'Horus:

[1] http://www.xtec.cat/~jcanadil/activitats/fraccions_ull_Horus.htm
[2] http://www.xtec.cat/~smargeli/nombres/sistemes/egipte/fraccio.htm

Mòdul

Qui és qui de fraccions.

Edat mínima recomanada

Persones a partir de 5è de primària.

Descripció del material

6 aparells tipus faristol amb 20 fitxes en les quals hi ha representades diverses fraccions.
Tots 6 aparells presenten les mateixes fraccions, però posades en un ordre diferent, de manera que es pugui fer una comprovació sumaria, mirant que tothom tingui aixecades el mateix número de fitxes, sense que es pugui copiar els moviments del jugador del costat.

Descripció de l'activitat que es planteja

Es juga en grup. Es comença amb totes les fitxes amunt i un jugador que n'escull una: l'assassí. Els altres, per torns, li fan preguntes per tal d'endevinar l'assassí. A les preguntes només es pot contestar sí o no.

Passes per assolir el repte proposat

Volem trobar l'assassí amb el mínim número de preguntes

- Buscar les preguntes que eliminen el màxim números de fitxes.
  - La meitat de les fitxes tenen denominador parell:
    - De les de denominador parell la meitat representen una part més gran que la unitat
    - De les de denominador senar 4 representen una part més gran que 1, 5 més petita que 1 i una és equivalent a 1.
- Amb dues preguntes hem eliminat moltes fitxes, ara podem fer

preguntes respecte al numerador, a la seva equivalència o no a un número enter...

Continguts que s'hi treballen

Múltiples i divisors, fraccions equivalents, comparació de fraccions, fraccions pròpies i impròpies, fraccions irreductibles., nombres enters, nombres racionals.

Competències que es treballen

- **Competència comunicativa, lingüística i audiovisual:** Quan treballen en grup i es comuniquen per parelles per veure quina estratègia seguir.
- **Competència matemàtica:** Treball dels diversos continguts
- **Competència d'aprendre a aprendre:** Aprendre a trobar la millor estratègia
- **Competència d'autonomia i iniciativa personal:** Intentar trobar la peça triada amb el mínim nombre de preguntes
- **Competència social i ciutadana** : Treballar conjuntament

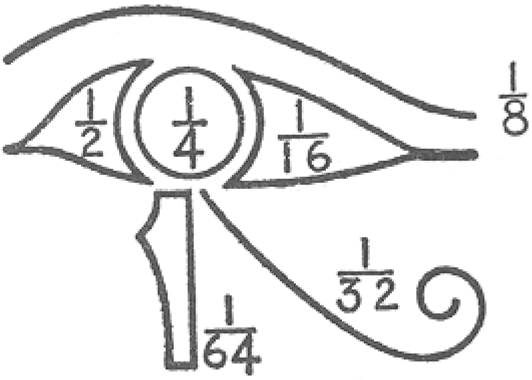
Mòduls relacionats

Trencaclosques de fraccions

Relacions amb la història

Les fraccions i els egipcis: L'ULL D'HORUS [2] .

Nut és la deesa del cel. **Tot** la desitjava, però aquesta tenia relacions secretes amb **Geb** (deu de la terra). En saber-ho, **Ra** (el sol) la castiga a no poder dormir cap mes ni cap any. **Tot** juga amb la lluna i aconsegueix guanyar-li cinc dies que li regala a **Nut**. Nut, agraida, li dóna a **Tot** cinc fills: **Osiris, Haroeris, Bet, Isis i Neftis**.
Osiris es casa amb la seva germana **Isis**, deixant sense companya a **Set** (la seva antiga muller). **Isis**, desesperada d'haver perdut el seu espòs, fa enemistar el seu fill **Horus** amb **Set** (el seu pare).
En un dels combats **Set** triomfa trencant l'ull d'**Horus** en sis trocets.
Al final, **Tot** es declara a **Horus** i li recomposa l'ull.
La part dreta de la còrnia valia 1/2, l'iris 1/4, la parpella 1/8, la part esquerra de la còrnia 1/16, la marca vermellosa de forma oblíqua, 1/32 i la marca vermellosa vertical 1/64.



Les fraccions apareixen de les diferents combinacions de les parts de l'ull.

Aplicacions

Compra en un supermercat, mercat, botigueta...

Activitats complementàries

- Quin assassí es pot descobrir amb una sola pregunta?
- Si tries l'assassí quin triaràs perquè sigui difícil que et descobreixin?
- Quina pregunta faries primer per descobrir l'assassí?
- Quines preguntes eliminen més fitxes? Per què?

Per saber-ne més

Més informació

Les fraccions de l'ull d'Horus:

[1] http://www.xtec.cat/~jcanadil/activitats/fraccions_ull_Horus.htm
[2] http://www.xtec.cat/~smargeli/nombres/sistemes/egipte/fraccio.htm

Mòdul

Tauler trencat de Sam Loyd.

Edat mínima recomanada

Públic de totes les edats.

Descripció del material

El material consisteix en 8 peces en les que hi ha representats quadrats negres i quadrats blancs que són trossos d'un tauler d'escacs.

Descripció de l'activitat que es planteja

El que es demana és que amb les 8 peces es construeixi un tauler d'escacs.

Passes per assolir el repte proposat

Si s'intenta construir el puzle sense pensar res prèviament la seva resolució serà molt costosa. Si primer s'intenta trobar alguna manera per classificar les peces, no ho serà tant.
Passos per a la resolució senzilla:

- Classificar les peces en dos grups. Per una banda tenim les peces que tenen forma de L i per l'altra la resta.
- El següent pas es pot fer de dues maneres:
  - Posar les peces d'un mateix grup en forma d'escaleta i llavors agrupar la de sota de tot de l'escaleta amb la de sobre de tot de l'escaleta de l'altre grup. Així obtenim 4 peces iguals.
  - Ajuntar les peces de 2 en 2 prenent-ne una de cada grup i aconseguir 4 peces iguals tot i que irregulars.
- Les 4 peces són rectangles amb un quadradet que sobresurt, que s'han de col·locar de manera que aquests quadradets formin el centre del tauler.

Continguts que s'hi treballen

Resolució de problemes, tesselacions.

Competències que es treballen

- **Competència comunicativa,** (si es treballa en grup).
- **Competència matemàtica:** Treballant els diversos continguts.
- **Competència d'aprendre a aprendre.**
- **Competència lingüística** (si es treballa en grup).
- **Competència d'autonomia i iniciativa personal:** Buscant una estratègia per a completar el trencaclosques.

Mòduls relacionats

Tesselacions:

- Tesselació de Penrose.
- Diagrama de Voronoi.

Trencaclosques:

- Trencaclosques de fraccions.
- Cubs de colors.
- Els 7 hexàgons.

Relacions amb la història

Un trencaclosques de fa més de 100 anys, homenatge al mític especialista de matemàtiques recreatives Sam Loyd.
Samuel Loyd, va néixer el 30 de gener de 1841 a Filadelfia i va morir el 10 d'abril de 1911 a casa seva, a Brooklyn. Degut a la feina del seu pare la família va anar a viure a Nova York i Samuel va estudiar allà fins als 17 anys.
Al 1855 es va publicar el seu primer problema relacionat amb els escacs al New York Satuday Courier. AI als setze anys ja escrivia problemes sobre escacs en una revista mensual.
Va crear diversos trencaclosques de matemàtica recreativa i al 1902 com a cap del departament de trencaclosques de Brooklyn Daily Eagle, Loyd comença la seva pàgina mensual de trencaclosques a Woman's Home Companion. És molt conegut per tots els problemes de matemàtica recreativa.
Com a jugador d'escacs va ser un del millors jugadors nord-americans i va ocupar el 15è lloc del món, tot i això el seu estil de joc no era òptim ja que volia formar combinacions fantàstiques en lloc de simplificar i buscar la victòria.

Aplicacions

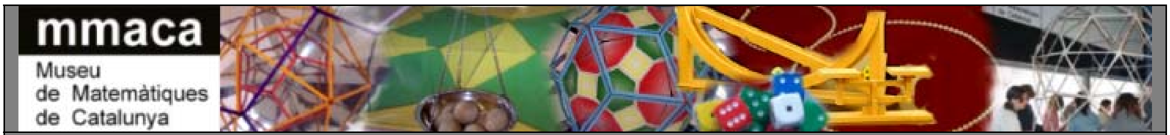
Activitats complementàries

- Calcular l’àrea de cada peça en unitats quadrades.
- Calcular l’àrea de les peces unides de 2 en 2 i mirar si coincideix.
- Àrea total de les 8 peces. Coincideix l’àrea teòrica de cada grup de 2 peces amb la que té en realitat?

Per saber-ne més

Més informació

[1] http://www.samloyd.com/bbs/zboard.php?id=puzzle
[2] http://www.samuelloyd.com/



Mòdul

Tesselació de Penrose

Edat mínima recomanada

Cicle superior d'Educació Primària

Descripció del material

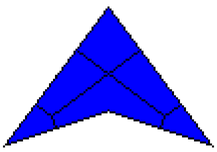
Col·lecció de peces planes de fusta de dos tipus diferents: hi ha la forma 'd'estel' (tots els estels són iguals) i la forma de 'llança' (totes les llances iguals).

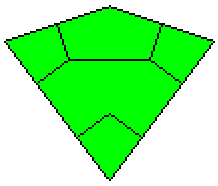
Descripció de l'activitat que es planteja

Usant les peces es pot enrajolar tot el pla.
Es tracta d'anar col·locant les peces de manera que vagin encaixant i, sense deixar cap forat, enrajolar tot el pla.

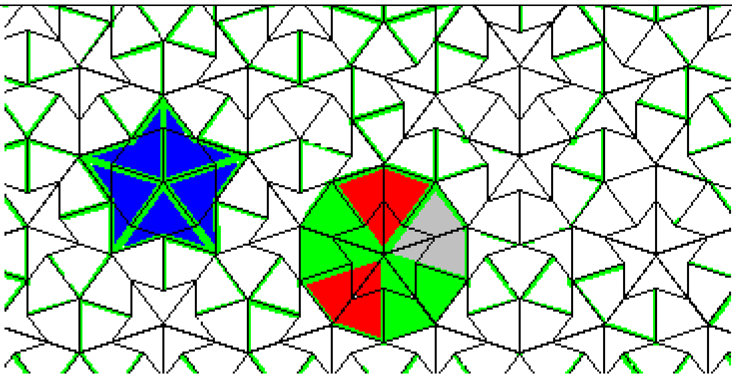
Passes per assolir el repte proposat

Primer cal tenir clar que només hi ha dos tipus de peces: llances i estels.





Es comença al voltant d'una peça central, que es pot formar amb un dels dos tipus de peces. Mireu les dues peces marcades a la figura (una de color blau, i una altra marcada en verd-vermell-gris):



Atenció, cal que els colors i les formes dibuixades encaixin (aquí no s'han representat).
A continuació és convenient organitzar-se col·lectivament i per grups anar completant diferents zones al voltant de la part central.

Continguts que s'hi treballen

Polígons, tesselacions, costats, formes, regions, periodicitat, àrea, proporcionalitat, simetria, …

Competències que es treballen

Competència matemàtica. Pels conceptes i metodologies matemàtics que es treballen.
Competència d'aprendre a aprendre. Per la necessitat de ser conscient del procés de resolució i estratègia usades, aprenent dels èxits i errors a cada pas.
Competències comunicativa, lingüística i audiovisual. És una bona activitat per a treball en grup.

Mòduls relacionats

Altres mòduls que treballen tesselacions:
- Diagrama de Voronoi
- Pentàgons

Relacions amb la història

La història de les tesselacions és molt antiga. Hi ha moltes formes diferents d'enrajolar un pla usant unes poques formes diferents. Els mosaics àrabs en són un exemple ben conegut. El que tenen en comú la majoria de les tesselacions és que són periòdiques: hi ha un patró (una porció del pla) que es va repetint sempre.
L'any 1974, Roger Penrose va descobrir una tesselació no periòdica utilitzant exclusivament dos tipus de peces: les llances (en anglès *darts*) i els estels (*kites*). Per tal d'obtenir un mosaic que no fos periòdic, va

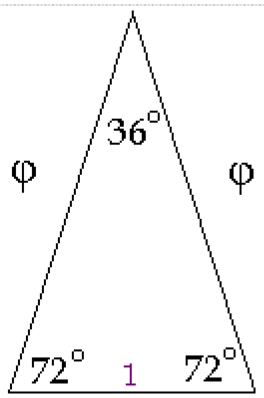
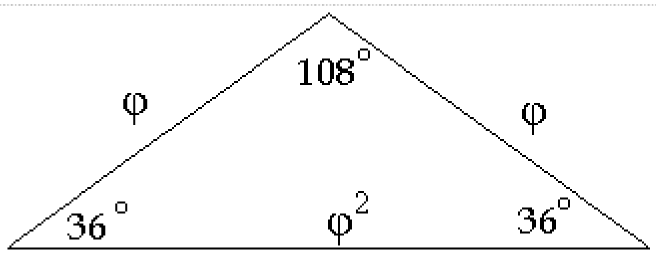
incloure marques i etiquetes de colors de manera que podien anar encaixant, però sense que es repetís cap part de l'enrajolat de manera periòdica.

Aplicacions

Activitats complementàries

- Preneu una peça de cada tipus. Encaixen bé? Quina figura formen dues peces juntes?
- Poseu les figures amb la part 'pintada' boca avall. Usant els rombes, podeu anar tesselant tot el pla? De fet, podeu anar construint pentàgons. D'aquesta forma s'obté una tesselació 'periòdica': el pentàgon es va repetint.
- Calculeu l'àrea de cada una de les peces. Com podeu fer-ho?
  - Podeu dividir cada peça en dos triangles iguals.
  - Com són cada un dels triangles en que podeu dividir cada peça?
- De cada un dels triangles anteriors, calculeu el quocient entre el costat llarg i el costat curt. Quin número surt?

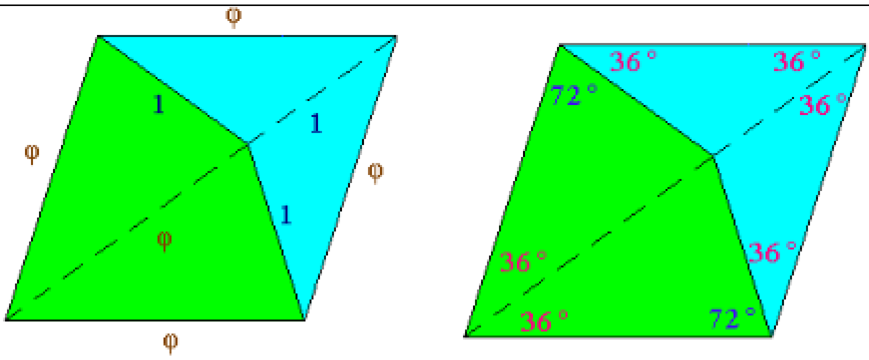
Els dos triangles que s'obtenen de cada peça són isòsceles. En un cas s'obtenen dos triangles d'or, i en l'altre cas dos gnòmons d'or (s'anomenen així). I les proporcions dels costats sempre és el nombre d'or. Els teniu a les figures següents:

	
Triangle d'or	Gnòmon d'or

- Ara calculeu el quocient entre les àrees de les dues peces (la gran dividida per la petita). Quin número surt?

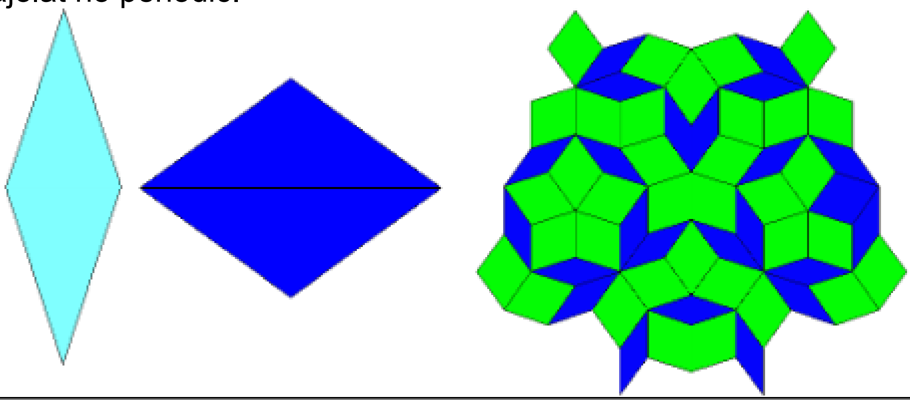
De nou hauríeu d'obtenir aproximadament el número: 1.618033..... que és el nombre d'or i acostuma a identificar-se amb la lletra grega φ. El seu valor és $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

- Ajunteu els triangles i observeu les propietats que hem dit.



(Les figures i propietats són extretes de [7])

- Si ajuntem els triangles de forma diferent, obtenim dos tipus de rombes diferents. En aquest cas, podrem tesselar el pla? Si, i també s'obté un enrajolat no periòdic.



Per saber-ne més

- La Tesselació de Penrose és aperiòdica. Si es prenen només les peces, surten pentàgons i la tesselació és periòdica. Si es vol evitar la periodicitat cal introduir dibuixos que encaixin en les peces.
- Les tesselacions periòdiques es basen en la repetició de patrons de manera recursiva. En el cas de la de Penrose, això no es pot fer.
- Es poden fer tesselacions d'aquest tipus amb col·leccions de peces de dues formes diferents, amb altres formes. Per exemple, usant dos tipus de rombes de mides diferents. (Però n'hi ha una infinitat d'opcions diferents, vegeu [4], [6],...)
- Johannes Kepler també va realitzar alguns treballs en tesselacions. Va ser un dels primers matemàtics a treballar els polígons estrellats, i va trobar una gran quantitat de maneres diferents de tesselar el pla usant polígons de tot tipus.

Més informació

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Tessellation
[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Penrose_tiling
[3] http://www.quadibloc.com/math/pen01.htm
[4] http://www.quadibloc.com/math/penint.htm
[5] http://www.uwgb.edu/dutchs/symmetry/aperiod.htm
[6] http://www.uwgb.edu/dutchs/symmetry/RAD-SPIR.HTM
[7] http://www2.spsu.edu/math/tile/aperiodic/penrose/penrose2.htm

Mòdul

Tot pintant la pilota.

Edat mínima recomanada

A totes les edats.

Descripció del material

Una pilota de futbol, hexàgons i pentàgons de diferents colors imantats.

Descripció de l'activitat que es planteja

És un mòdul que vol comprovar la teoria que es pot recobrir un mapa amb només quatre colors. En comptes de fer-ho en un mapa pla es fa amb una pilota de futbol.
Cal recobrir una pilota de futbol amb pentàgons i hexàgons de manera que no hi hagi dos colors iguals compartint el mateix vèrtex.

Passes per assolir el repte proposat

Es tracta d'anar-los posant ordenats. Començant per un polígon que seria com la base i els que poses al voltant de dos colors diferents al primer. S'han de col·locar donant voltes, no de manera desordenada, i sempre vigilant de no repetir color.
Per exemple, si comencem posant un pentàgon vermell a dalt, llavors quatre dels hexàgons del costat podem posar-los verds i blaus i el cinquè groc. Després posem els pentàgons d'una tercera fila, si pot ser també vermells. I així anem omplint els polígons donant voltes i sempre fent servir el mínim de colors.
Si tots els pentàgons són del mateix color el problema es resol més fàcilment.

Continguts que s'hi treballen

Topologia, geomètria, polígons.

Competències que es treballen

- **Competència comunicativa, lingüística i audiovisual** (sobretot si ho fan en grup)
- **Competència matemàtica**
- **Competència d'aprendre a aprendre**
- **Competència d'autonomia i iniciativa personal** .
- **Competència social i ciutadana** . (depèn si ho vol resoldre una sola persona o ho fa en grup)

Mòduls relacionats

- Camins Hamiltonians
- Diagrama de Voronoi

Relacions amb la història

El teorema dels quatre colors és un problema de topologia, plantejat originalment a principis de la segona meitat del segle XIX i no resolt fins el 1976, que demana pel mínim nombre de colors diferents que es necessiten per pintar un mapa de manera que dues regions adjacents (és a dir amb un segment de frontera en comú) no siguin mai del mateix color. Tres colors no són suficients, ja que es pot dibuixar un mapa amb quatre regions amb cada regió en contacte amb tres altres regions. Alfred Bray Kempe el 1879 va demostrar matemàticament que cinc colors són sempre suficients; i no s'ha trobar cap mapa real en què quatre colors no siguin suficients.

Com sovint passa en matemàtiques, el fet de considerar aquest problema va donar impuls per al descobriment de resultats relacionats en topologia i combinatòria. Un problema similar va ser demostrat en una situació aparentment més complicada: un mapa dibuixat en un torus (superfície en forma de doughnut), on se sap que el mínim són set colors.

El teorema dels quatre colors va ser demostrat el 1977 per un grup de matemàtics de la University of Illinois, dirigit per Kenneth Appel i Wolfgang Haken, després de quatre any de síntesis de recerca computacional i raonaments teòrics.

Aplicacions

Activitats complementàries

Dibuixar diferents zones en un rectangle per tal que puguis recobrir-lo amb tres colors. Fer el mateix però perquè es pugui pintar només amb dos colors.

Per saber-ne més

[1] http://ca.wikipedia.org/wiki/Teorema_dels_quatre_colors
[2] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Kempe.html

Més informació