

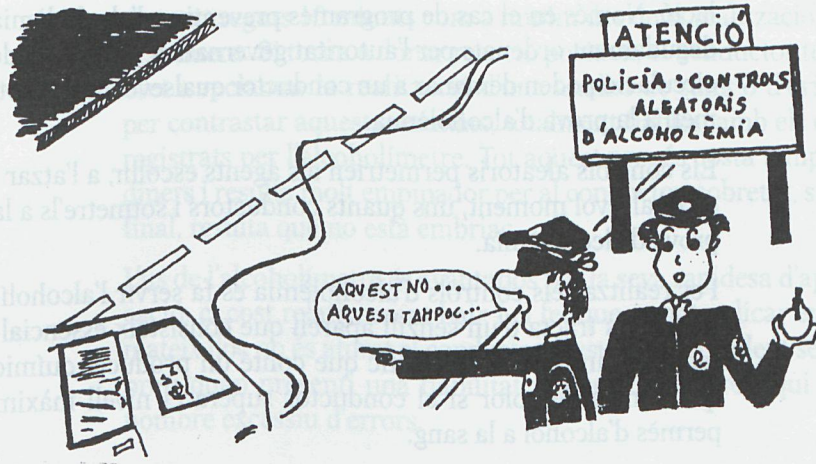
Mostres aleatòries

Continguts

	<i>Pàgina</i>
A Controls aleatoris	71
B Anàlisi dels tipus d'errors	73
B1 Control de l'alcoholímetre	73
B2 100 controls aleatoris	75
B3 Proporcions	77
B4 Diagrames d'arbre	78
B5 Estimació de probabilitats	80
B6 Probabilitats teòriques	81
C Més probabilitats	82
C1 Què significa una reacció positiva al test?	82
C2 Comparació de diagrames d'arbre	83
*C3 Probabilitats relacionades	85
*C4 Revisió dels supòsits inicials	85
C5 Es poden autoritzar els controls aleatoris i indiscriminats d'alcoholèmia?	85
D Un altre exemple	86
D1 Les radiografies	86

Algunes seccions estan marcades amb un asterisc (*). El vostre professor us indicarà si heu de fer o no aquestes seccions.

Fulls R El vostre professor us proporcionarà aquestes pàgines.



A Controls aleatoris

ELS AGENTS DE CIRCULACIÓ RECLAMEN PODER REALITZAR CONTROLS ALEATORIS D'ALCOHOLÈMIA ALS CONDUCTORS!

Aquest era el titular de molts diaris britànics quan, ja fa uns anys, es va encetar una gran polèmica al voltant dels controls d'alcoholèmia. Els agents de circulació britànics reclamaven poder realitzar controls aleatoris indiscriminats als conductors dels vehicles.

Quina seria la vostra reacció davant d'un titular com aquest? Creieu que és una bona idea realitzar controls d'alcoholèmia a l'atzar?

Abans de donar la vostra opinió tingueu en compte la següent informació.

Les lleis de la majoria dels països europeus només permeten que la policia efectui controls d'alcoholèmia als conductors que cometen alguna infracció del codi de circulació. Més concretament, el Reglament General de Circulació espanyol autoritza els agents de circulació a realitzar la prova d'alcoholèmia als conductors de vehicles que es vegin implicats en accidents de circulació, als que circulin amb símptomes evidents d'estar embriacs i als que cometin infraccions al Reglament de Circu-

lació. Només en el cas de programes preventius d'alcoholèmia degudament ordenats per l'autoritat governativa, els agents de circulació poden demanar a un conductor qualsevol que se sotmeti a la prova d'alcoholèmia.

Els controls aleatoris permetrien als agents escollir, a l'atzar i en qualsevol moment, uns quants conductors i sotmetre'ls a la prova d'alcoholèmia.

Per realitzar els controls d'alcoholèmia es fa servir l'alcoholímetre. Es tracta d'un senzill aparell que consisteix essencialment en una bossa de plàstic que conté un producte químic que canvia de color si el conductor supera el nivell màxim permès d'alcohol a la sang.

De quina manera podrien els agents de circulació escollir una mostra aleatòria de conductors?

Si es permetés realitzar controls aleatoris d'alcoholèmia, qualsevol conductor podria ser aturat i sotmès a la prova. D'aquesta manera serien sancionats molts més conductors embriacs que no pas fins ara.

a Creieu que és una bona idea realitzar controls d'alcoholèmia? Escriviu què en penseu del tema i argumenteu les vostres respostes.

Compareu els vostres arguments amb els d'un company.

El vostre professor procedirà tot seguit a recollir les opinions de tots els alumnes de la classe. N'hi ha hagut algun que hagi posat en dubte la fiabilitat de l'alcoholímetre utilitzat per realitzar els controls?

La legislació espanyola castiga el conductor que tingui a la sang una quantitat superior als 0,8 g per 1.000 cm³. L'alcoholímetre mesura la quantitat d'alcohol present a l'aire expulsat pels pulmons, i no directament l'alcohol present a la sang. Per aquest i altres motius, no és del tot fiable, encara que l'agent i el conductor l'utilitzin.

Què pot passar?

Qualsevol conductor que doni reacció positiva en el control d'alcoholèmia, és sotmès a una segona prova, una vegada

transcorreguts 10 minuts com a mínim des de la realització de la primera. Si torna a donar reacció positiva, el conductor té el dret a reclamar la realització d'una anàlisi de sang o d'orina per contrastar aquests resultats, totalment fiables, amb els enregistrats per l'alcoholímetre. Tot aquest procés costa temps i diners i resulta molt empipador per al conductor, sobretot, si al final, resulta que no està embriac.

L'ús de l'alcoholímetre és avantatjós per la seva rapidesa d'aplicació, el cost relativament baix i el fet que es pot aplicar en el mateix lloc on és aturat el conductor. Resultarà procedent sempre i quan presenti una fiabilitat raonable i no provoqui un nombre excessiu d'errors.



B Anàlisi dels tipus d'errors

B1 Control de l'alcoholímetre

Abans que no es comencés a fer servir l'alcoholímetre com a mitjà de control de l'alcoholèmia dels conductors, es va mesurar la seva fiabilitat confrontant els seus resultats amb els de les anàlisis de sang, que són totalment fiables.

Imagineu-vos que es demana a un grup de 100 conductors que col·laborin en aquest control de la fiabilitat de l'alcoholímetre. Se'ls demana que se sotmetin a la vegada al test de l'alcoholímetre i al de l'anàlisi de sang.

Els resultats obtinguts podrien ser els de la taula 1.

Taula 1 Resultats de 100 controls amb l'alcoholímetre

	Positiva	Negativa	Total
Embriac	23	6	29
Sobri	8	63	71
Total	31	69	100

Utilitzeu aquesta taula per contestar les següents preguntes:

- a Quants conductors embriacs hi havia en total?**
- b Quants dels 100 conductors varen donar una reacció positiva al test d'alcoholèmia?**
- c Quants dels conductors embriacs varen donar una reacció positiva al test?**
- d Quants dels conductors sobris varen donar una reacció negativa?**

Si l'alcoholímetre fos totalment fiable aquestes dues últimes respostes haurien de sumar la totalitat dels conductors, és a dir, 100, mentre que les quantitats de les altres dues caselles de la taula haurien de valer 0.

Els alcoholímetres no són del tot fiables. Poden donar resultats erronis. Conductors embriacs poden donar reacció negativa a la prova de l'alcoholímetre.

- e Quantes persones embriagues varen donar reacció negativa?
Què els hauria passat a aquestes persones si haguessin estat realment controlades pels agents de circulació?**

També és possible que persones sòbries donin reacció positiva al test de l'alcoholímetre.

- f **Quantes persones sòbries varen donar una reacció positiva?**
Que els hauria passat a aquestes persones si haguessin estat efectivament controlades pels agents de circulació?

S'ha vist, doncs, que es poden cometre dos tipus d'error. L'un passa quan persones realment embriagues donen reacció negativa i que per tant són considerades sòbries.

- g **Escriviu en què consisteix l'altre tipus d'error.**

B2 100 controls aleatoris

Imagineu per un moment que els agents de circulació decideixen controlar efectivament la fiabilitat de l'alcoholímetre sobre una mostra aleatòria de conductors. Aturen 100 conductors, els demanen que bufin l'alcoholímetre i tot seguit, sense sotmetre'ls a una segona prova, confirmen o no el resultat obtingut amb una anàlisi de sang. És possible simular els resultats que es podrien obtenir.

Es fa el següent supòsit:

El 30% dels conductors que condueixen aquell dia estan embriacs.

El 80% dels conductors embriacs que són aturats donen reacció positiva al test.

El 10% dels conductors sobris que són aturats donen —incorrectament— una reacció positiva al test.

Necessiteu una taula de números aleatoris amb els dígit agrupats de dos en dos. El vostre professor us explicarà com utilitzar-la.

Si el primer dígit de la parella és 0, 1 o 2, suposareu que el conductor està embriac.

Si el conductor està embriac i el segon dígit és 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 o 7, voldrà dir que dóna reacció positiva al test.

Si el conductor està sobri i el segon dígit és 0, suposareu que dóna reacció positiva al control de l'alcoholímetre.

Aquestes regles queden resumides en la següent taula:

Taula 2 Utilització de la taula de números aleatoris

Embriacs i positius	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	Embriacs i negatius
	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	
Sobris i positius	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	Sobris i negatius
	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	
	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	
	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	
	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	
	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	
	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	

Si els resultats de la taula 1 haguessin estat obtinguts a partir d'una simulació, haurien quedat enregistrats tal com es mostra a la taula 3.

Taula 3 Resultats de la simulació

	Positius	Negatius
Embriacs	IIII IIII III	IIII I
Sobris	IIII III	IIII IIII IIII IIII IIII IIII IIII IIII

a **Prepareu una taula de recomptes com la taula 3. Llegiu 100 parelles de números aleatoris, i anoteu els resultats que obteniu.**

b **Prepareu una taula com la taula 1 i escriviu-hi els resultats numèrics finals.**

Utilitzeu els resultats obtinguts per contestar les següents preguntes:

c **Quants conductors embriacs heu obtingut en total?**

- d Quantes de les 100 persones controlades han reaccionat positivament al test d'alcoholèmia?
- e Quants conductors embriacs han donat una reacció negativa?
Què hauria passat a aquests conductors si haguessin estat sotmesos només al test de l'alcoholímetre?
- f Quants conductors sobris han reaccionat positivament al test?
Què hauria passat a aquests conductors si haguessin estat sotmesos només al test de l'alcoholímetre?
- g Compareu els vostres resultats amb els de la taula 1. Hi ha moltes diferències? Feu un breu comentari al respecte.

B3 Proporcions

Encara que sembli que l'alcoholímetre funciona correctament, s'ha de ser conscient de la possibilitat d'obtenir resultats incorrectes. Tant si es fan 10 proves com si se'n fan 1.000, la possibilitat d'error és sempre present. El que importa és conèixer la *proporció* d'errors que es poden cometre.

La taula 1 mostra com la proporció dels conductors que estaven embriacs i varen donar reacció positiva al test és de 23/100.

Utilitzeu la taula 1 per trobar:

- a **La proporció de conductors que estaven sobris i van donar reacció positiva.**
- b **La proporció de conductors que estaven embriacs i van donar reacció negativa.**

Suposeu ara que només es tenen en compte els 29 conductors embriacs.

23 d'aquests 29 van donar reacció positiva al test.

Per tant, la proporció de conductors embriacs que van donar una reacció positiva és de 23/29.

Utilitzeu la taula 1 per contestar les següents qüestions:

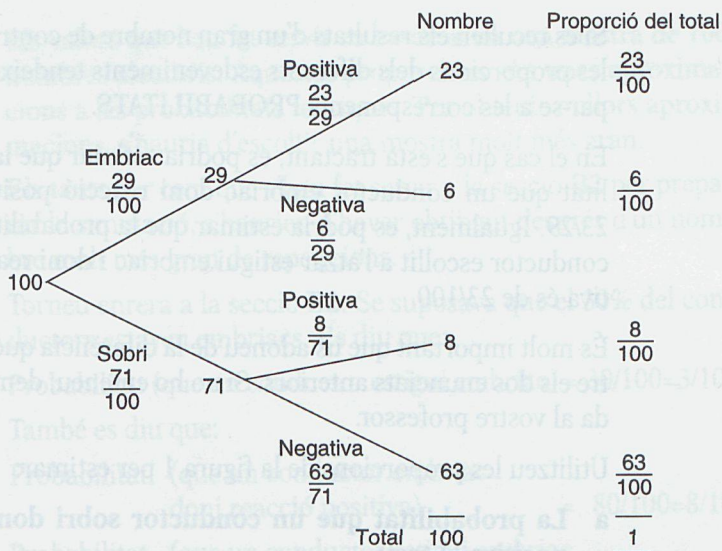
- c Dels 29 conductors embriacs, quants varen donar una reacció negativa al test? Quina proporció suposa respecte del total de conductors embriacs?
- d Quants conductors estaven sobris? D'aquests, quants varen donar reacció positiva? Quina proporció de conductors sobris varen donar reacció positiva?
- e Quina proporció de conductors sobris varen donar reacció negativa?
- f Contesteu novament totes les preguntes des de la a fins a la e fent servir els resultats obtinguts a la simulació que heu realitzat anteriorment a l'apartat B2.



B4 Diagrames d'arbre

La informació de la taula 1 i les proporcions que acaba de calcular poden resumir-se en el següent diagrama d'arbre.

Figura 1 Diagrama d'arbre de les proporcions obtingudes a partir de la taula 1



a Feu un diagrama semblant utilitzant les dades obtingudes en la vostra simulació.

Si us fixeu en la branca superior de la figura 1 hi trobareu les proporcions $29/100$ i $23/29$. Al final d'aquesta branca, sota el títol *Proporció del total* hi trobeu el valor $23/100$. Observeu com:

$$\frac{29}{100} \times \frac{23}{29} = \frac{23}{100}$$

b Observeu les quantitats que figuren a la branca superior del vostre diagrama.

¿Es compleix també que el producte d'ambdues quantitats és igual a la fracció que figura sota el títol *Proporció del total*? Si és així, escriviu simbòlicament aquest producte i el seu resultat.

c Observeu la resta de la figura 1. Es compleix la mateixa relació entre els valors de les branques i els valors corresponents de l'última columna?

d Es compleixen les mateixes relacions en el vostre diagrama?

B5 Estimació de probabilitats

Si es recullen els resultats d'un gran nombre de controls llavors les proporcions dels diferents esdeveniments tendeixen a aproximar-se a les corresponents **PROBABILITATS**.

En el cas que s'està tractant, es podria estimar que la probabilitat que un conductor embriac doni reacció positiva és de $23/29$. Igualment, es podria estimar que la probabilitat que un conductor escollit a l'atzar estigui embriac i doni reacció positiva és de $23/100$.

És molt important que us adoneu de la diferència que hi ha entre els dos enunciats anteriors. Si no ho enteneu, demaneu ajuda al vostre professor.

Utilitzeu les proporcions de la figura 1 per estimar:

- a** La probabilitat que un conductor sobri doni reacció positiva al test;
- b** la probabilitat que un conductor qualsevol estigui sobri i doni reacció positiva al test;
- c** la probabilitat que un conductor estigui sobri;
- d** la probabilitat que un conductor estigui embriac i doni reacció positiva al test;
- e** la probabilitat que un conductor embriac doni reacció positiva al test;
- f** la probabilitat que un conductor estigui embriac.

Fixeu-vos en les vostres respostes a les preguntes **a**, **b** i **c**. Hi ha un resultat que és justament el producte dels altres dos.

- g** Escriviu aquesta relació.
- h** Feu el mateix pel que fa a les preguntes **d**, **e** i **f**.
- i** Repetiu totes les preguntes anteriors, des de la **a** fins a la **h**, a partir dels resultats obtinguts a la vostra simulació.

B6 Probabilitats teòriques

Els valors que heu fet servir es basaven en una mostra de 100 nombres aleatoris. Aquestes proporcions són unes aproximacions a les probabilitats teòriques. Per obtenir millors aproximacions, s'hauria d'escollir una mostra molt més gran.

Els tants per cent que s'han fet servir a la secció **B2** per preparar la simulació, s'haurien d'haver obtingut després d'un nombre molt més gran de repeticions.

Torneu enrera a la secció **B2**. Se suposava que el 30% del conductors estaven embriacs. Es diu que:

Probabilitat (que un conductor estigui embriac) = $30/100=3/10$.

També es diu que:

Probabilitat (que un conductor embriac doni reacció positiva) = $80/100=8/10$

Probabilitat (que un conductor estigui embriac i doni reacció positiva) = $24/100$

Es compleix que: $3/10 \times 8/10 = 24/100$.

Feu servir les següents probabilitats:

$3/10$ = Probabilitat (que un conductor estigui embriac)

$8/10$ = Probabilitat (que un conductor embriac doni reacció positiva)

$24/100$ = Probabilitat (que un conductor estigui embriac i doni reacció positiva)

a Per expressar en termes de probabilitat la relació $3/10 \times 8/10 = 24/100$.

Feu servir els percentatges indicats al començament de l'aparat **B2**, per calcular les següents probabilitats:

b Probabilitat (que un conductor estigui sobri).

c Probabilitat (que un conductor sobri doni reacció positiva).

Utilitzeu la taula 2 per calcular les següents probabilitats:

d Probabilitat (que un conductor estigui sobri i doni reacció positiva).

- e Comproveu que el producte de les fraccions dels apartats b i c és igual a la fracció de l'apartat d.
- f Expressau en termes de probabilitats la relació numèrica anterior.

c Més probabilitats

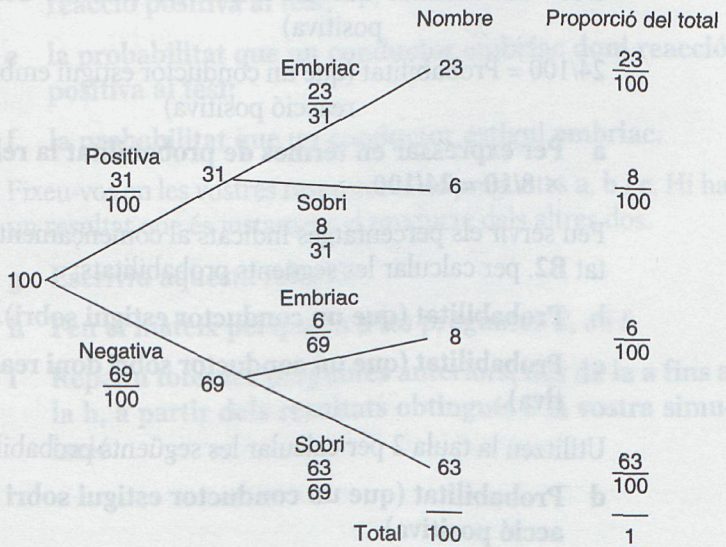
C1 Què significa una reacció positiva al test?

Doneu una nova ullada a la taula 1.

- a Quants conductors varen donar reacció positiva al test?
- b D'aquests, quants estaven embriacs?
- c Dels que varen donar una reacció negativa, quants estaven embriacs?

Es pot dibuixar un altre diagrama d'arbre a partir de la informació de la taula.

Figura 2 Diagrama d'arbre mostrant més informació de la taula 1



Feu servir aquest diagrama, per estimar les següents probabilitats:

- d Probabilitat (que un conductor que hagi donat reacció positiva estigui sobri).
- e Probabilitat (que un conductor que hagi donat reacció positiva estigui embriac).
- f Probabilitat (que un conductor que hagi donat una reacció negativa estigui embriac).
- g Probabilitat (que un conductor que hagi donat reacció negativa estigui sobri).
- h Probabilitat (que un conductor estigui embriac i doni reacció positiva).
- i Probabilitat (que un conductor estigui sobri i doni una reacció positiva).
- j Probabilitat (que un conductor doni reacció positiva).
- *k Investigueu quina relació algebraica hi ha entre algunes de les respostes dels apartats anteriors (del d al j). Si n'observeu alguna expresseu-la en termes de producte de fraccions numèriques i també en termes de probabilitats.
- l Feu una rèplica del diagrama anterior fent servir les dades procedents de les simulacions que heu realitzat amb anterioritat.
- n Torneu a contestar les preguntes de la d a la j fent servir ara els valors procedents de les vostres simulacions.

C2 Comparació de diagrames d'arbre

Si un agent de circulació fa la prova de l'alcoholímetre a un conductor i el resultat del test dona negatiu, no li demanarà que se sotmeti a una segona prova ni, per descomptat, a una anàlisi de sang.



D'aquesta manera no se sabrà mai si el conductor estava realment embriac i l'alcoholímetre va fallar, o bé si el conductor estava sobri.

- a **Quin dels dos diagrames d'arbre, el de la figura 1 o el de la figura 2, s'ajusta millor a la situació que s'acaba de presentar?**
 - b **Quina part del diagrama d'arbre de la figura 2 serà impossible completar a la pràctica?**
 - c **Quin dels dos errors esmentats a B1 es podrà detectar?**
 - d **Quin dels dos errors us sembla més greu? Per què?**
- És clar que el que interessa és reduir al màxim el nombre d'errors en l'aplicació del test.
- e **Perquè creieu que se sotmet a una segona prova els conductors que donen reacció positiva en el primer control?**

*C3 Probabilitats relacionades

Torneu a repassar les respostes que heu donat a les preguntes **B5g** i **C1k**. Observeu que tenen molt en comú, tot i que no són exactament la mateixa pregunta. Sabríeu trobar quina relació hi ha entre ambdues?

*C4 Revisió dels supòsits inicials

Creieu que els supòsits adoptats al començament de la secció **B2** s'ajusten a la realitat? Discutiuh-lo entre vosaltres i formuleu uns supòsits més realistes.

- a **Utilitzeu aquests nous supòsits per dibuixar i completar un diagrama d'arbre com el de la figura 1. És possible que us sigui més convenient suposar que han estat 1.000 les persones controlades.**
- b **Feu servir aquest nou diagrama d'arbre per tornar a contestar novament les preguntes formulades a la secció B5.**

C5 Es poden autoritzar els controls aleatoris i indiscriminats d'alcoholèmia?

S'ha vist fins ara quines eren les possibles situacions que es podien presentar en el cas que s'autoritzés els agents de circulació a fer servir l'alcoholímetre com instrument de control aleatori. S'han tractat els dos tipus d'error que es poden cometre: el que un conductor sobri sigui considerat culpable de conduir embriac, i el de considerar sobri un conductor que està realment embriac. Aquests errors vénen motivats per l'ús de l'alcoholímetre, sigui o no emprat en forma aleatòria.

Com es pot decidir la conveniència o no de realitzar controls aleatoris?

Ja s'ha comentat a la secció **A** que la legislació espanyola actual permet als agents de circulació l'aplicació del test d'alcoholèmia només als conductors en els quals s'observi una situa-

ció anòmala ja sigui per estar implicats en un accident de circulació, ja sigui per haver comès una infracció al codi de circulació, per tenir malmès un llum de l'automòbil, etc. Aquest tipus de control es coneix amb el nom de **control selectiu**. D'aquesta manera molts conductors embriacs no són sotmesos a la prova de l'alcoholèmia ja que els agents no els observen cap tipus de conducta anòmala. Els **controls aleatoris programats** només es permeten quan l'autoritat governativa ordena la realització de programes preventius d'alcoholèmia.

El que interessa, però, realment és comparar el nombre de conductors embriacs que actualment no es detecten fent controls selectius, amb el nombre de conductors embriacs que no es detectarien si els controls aleatoris fossin indiscriminats. Per altra banda, també caldria estimar el nombre de conductors embriacs que serien realment castigats amb l'aplicació d'aquest tipus de controls.

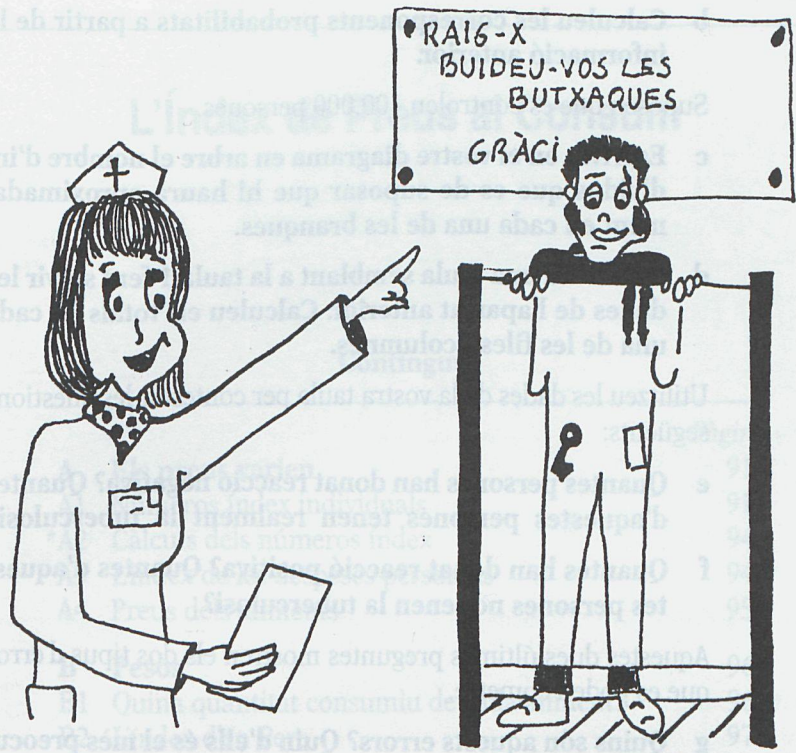
Què és millor, el control selectiu o el control aleatori indiscriminat? Necessiteu tenir en compte més supòsits i discutir-ho amb el vostre professor abans de donar una resposta definitiva.

- a **Quines altres dades creieu que necessitaríeu conèixer abans de prendre una decisió?**
- b **Compareu la vostra resposta amb la d'altres companys i mireu si podeu decidir quin dels dos tipus de control creieu que és el millor.**
- c **Escriviu la vostra opinió i argumenteu-la.**

D Un altre exemple

D1 Les radiografies

Els raigs X s'utilitzen de forma molt efectiva per detectar la tuberculosi (TB). És un mètode ràpid i barat. Resulta relativament fàcil instal·lar un aparell de raigs X en una unitat mòbil i realitzar controls preventius en zones allunyades de centres hospitalaris. El pacient es controla en molt pocs minuts i sense



gairebé necessitat que es despulli. Però no és del tot fiable. Les imatges del pacient que es poden veure amb l'aparell de raigs X poden mostrar una taca (reacció positiva) o no (reacció negativa). Si una persona està afectada realment de tuberculosi, hi ha un 99% de possibilitats que presenti reacció positiva. Si una persona no està afectada per aquesta malaltia, hi ha un 10% de possibilitats que les imatges obtingudes no siguin del tot clares i es consideri que ha donat reacció positiva a la prova dels raigs X. Les persones que en aquest primer control donen una reacció positiva, són sotmeses a altres tipus de proves que són molt més fiables encara que també més cares.

Actualment, es calcula que 1 persona de cada 1.000 està malalta de tuberculosi.

a Dibuixeu un diagrama d'arbre com el de la figura 1, canviant «Embriac» per «Té TB» i «Sobri» per «No té TB».

- b** Calculeu les corresponents probabilitats a partir de la informació anterior.

Suposeu que es controlen 100.000 persones.

- c** Escriviu en el vostre diagrama en arbre el nombre d'individus que es de suposar que hi haurà aproximadament en cada una de les branques.
- d** Construïu una taula semblant a la taula 1 fent servir les dades de l'apartat anterior. Calculeu els totals de cada una de les files i columnes.

Utilitzeu les dades de la vostra taula per contestar les qüestions següents:

- e** Quantes persones han donat reacció negativa? Quantes d'aquestes persones tenen realment la tuberculosi?
- f** Quantes han donat reacció positiva? Quantes d'aquestes persones no tenen la tuberculosi?

Aquestes dues últimes preguntes mostren els dos tipus d'error que es poden cometre.

- g** Quins són aquests errors? Quin d'ells és el més preocupant?

- h** Si fóssiu una d'aquestes 100.000 persones i resultés que reaccioneu positivament a la prova dels raigs X, quina seria la probabilitat que tinguéssiu realment la tuberculosi?