

Plou o fa sol

Continguts

	Pàgina
A Simulacions senzilles	95
A1 Col·leccions de cromos	95
A2 Descripció de resultats	96
A3 Reserves de bitllets	97
B Números aleatoris	99
B1 Taules de números aleatoris	99
B2 Utilització de números aleatoris	100
B3 Pluja o sol	102
*B4 Números aleatoris de dues xifres	103
C Més simulacions	104
C1 El minubús	104
C2 Les claus	104
C3 Semàfors	106

Algunes seccions estan marcades amb un asterisc (*). El vostre professor us indicarà si heu de fer o no aquestes seccions.

Fulls R El vostre professor us proporcionarà aquests fulls.

(*) 4 croquis

1^{er} croquis: 1 tableta.

2nd croquis: $\frac{1}{2}$ tabletes = $\frac{4}{3}$

3^{er} croquis: $\frac{1}{4} = \frac{4}{2} = 2$

4th croquis: $\frac{1}{4} = 4$ croquis

$$1 + \frac{4}{3} + 2 + 4 = 7 + \frac{4}{3} = \boxed{8\frac{1}{3} \text{ croquis}}$$

Pàgina

95	A	Descripció de resultats
95	A1	Col·leccions de croquis
96	A2	Descripció de resultats
97	A3	Reserves de billetes
99	B	Números aleatoris
99	B1	Taules de números aleatoris
100	B2	Utilització de números aleatoris
102	B3	Pluja o sol
103	B4	Números aleatoris de dues xifres
104	C	Més simulacions
104	C1	El minubús
104	C2	Les claus
106	C3	Semàfors

Algunes seccions estan marcades amb un asterisc (*). El vostre professor us indicarà si heu de fer o no aquestes seccions.
Folle R. El vostre professor us proporcionarà aquest full.

A Simulacions senzilles

Per començar a treballar aquesta unitat discutiu amb el professor com podríeu simular, llançant una moneda, el naixement de nens i nenes en diferents famílies, i també com podríeu simular, llançant daus, el tipus de vehicle (camió o cotxe) que passa per un peatge d'autopista.

El que es fa no és observar naixements en diferents famílies ni comptar el nombre de cotxes i de camions que passen per un peatge, sinó reproduir a classe les principals característiques d'aquests fets reals. A això en diem simulacions.



A1 Col·leccions de cromos

Necessitareu un joc de cartes i el full R1.

Heu col·leccionat alguna vegada cromos o adhesius? Acostumen a sortir a les xocolatines, pastissos... Sovint en surten de repetits.

Suposeu que feu la col·lecció dels cromos que surten en unes xocolatines i que a cada xocolatina surt un cromo.

Quantes xocolatines hauríeu de comprar aproximadament per completar una col·lecció de:

a Un cromo?

(2)

Tres cromos: $1 + \frac{3}{2} + 3 = 5\frac{1}{2}$

b Dos cromos?

($1+2=3$)

cromos

c Quatre cromos?

($8\frac{1}{3}$)

Interrogat a l'auditori (*)

No es immediat des d'un punt de vista matemàtic

Per respondre aquestes preguntes, en comptes de comprar realment xocolatines feu la següent SIMULACIÓ.

Imagineu que feu una col·lecció de quatre cromos. Utilitzeu un joc de cartes. Totes les cartes d'un mateix pal representen un dels cromos de la col·lecció. Per tant, completareu la col·lecció quan hàgiu obtingut una carta de cada pal.

Seguiu les instruccions següents. Utilitzeu la taula 2 del full R1 per apuntar els resultats.

d Anoteu a la segona columna de la taula 2 el nombre de cartes que creieu que necessitareu per completar la col·lecció.

Barregeu les cartes i deixeu-les en un piló, tapades.

Aneu agafant cartes d'una en una i col·loqueu-les en quatre pilons, segons el pal.

PAREU quan ja en tingueu una de cada pal.

Compteu quantes cartes heu necessitat i anoteu-ho a la tercera columna de la taula 2.

Repetiu el mateix experiment 10 vegades.

El professor reunirà els resultats de tota la classe.

A2 Descripció dels resultats

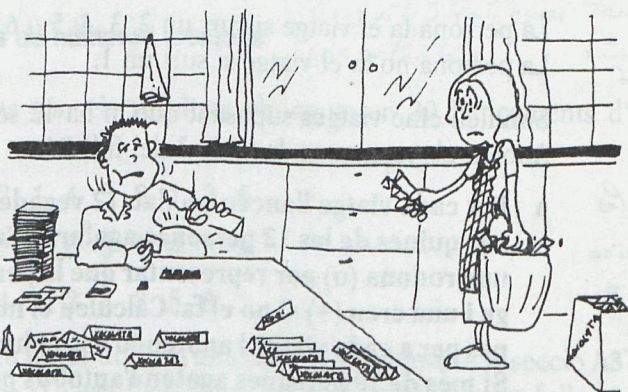
a Calculeu la MITJANA dels 10 resultats.

(Per calcular-la sumeu els números de l'última columna de la taula 2 i dividiu el resultat per 10.)

b Anoteu el mínim nombre de cartes que heu necessitat. Anoteu el màxim nombre de cartes que heu necessitat. Calculeu el RANG dels 10 resultats.

(Per calcular-lo resteu del nombre màxim el nombre mínim.)

- c En quantes de les 10 simulacions heu necessitat menys de sis cartes?
- d En quantes heu necessitat més de deu cartes?
- e En quantes heu necessitat exactament set cartes?
- f Calculeu la mitjana i el rang dels resultats de tota la classe.
- g Quants paquets creieu que hauríeu de comprar fins a obtenir la col·lecció completa?



A3 Reserves de bitllets

Necessitareu un dau i el full R1.

L'Estanis es dedica al transport públic de viatgers des del seu poble a la capital de la comarca. Té un minibus de 10 places. Els dies de mercat el servei està molt sol·licitat i més de deu persones volen reservar el bitllet.

No obstant això, sempre hi ha gent que reserva bitllet i després no agafa l'autobús. Els seients buits suposen menys benefici. L'Estanis ha observat que aproximadament una persona de cada sis que reserven bitllet després no fa el trajecte. Per això es decideix a donar més de 10 reserves ja que espera que algú no viatjarà.

Quantes reserves creieu que hauria de donar?

Amb quins problemes es podria trobar?

Alguns casos:

$$f(0) = 12; p = \frac{1}{6}$$

$X = \text{còrrats}$.

Hi ha autò problemes

$$X = 0 \text{ o } X = 1$$

$$P[X \leq 1] =$$

$$\binom{12}{0} \left(\frac{5}{6}\right)^{12} +$$

$$+ \binom{12}{1} \left(\frac{5}{6}\right)^{11} \cdot \frac{1}{6} =$$

$$= 0.38133 \approx$$

$\approx 38.1\%$ de les
vegades es produïra

"overbooking".

Abans de decidir el nombre de reserves a donar, l'Estanis fa una simulació amb 12 reserves per cada viatge. Sap que:

el minibús té 10 seients,

12 persones han reservat bitllet,

fins ara aproximadament una de cada sis persones que havien reservat bitllet no agafava l'autobús.

Si bé no és possible saber quina persona no vindrà, se suposa que cada persona que ha fet la reserva té una possibilitat d'entre sis de no venir. Es pot simular aquest fet llançant un dau:

La persona fa el viatge si surt un 2, 3, 4, 5 o 6.

La persona no fa el viatge si surt un 1.

Simuleu cinc viatges suposant que hi ha 12 seients reservats. Anoteu els resultats a la taula 3 del full R1.

- a Per cada viatge llanceu un dau 12 vegades, per determinar quines de les 12 persones agafaran l'autobús. Poseu una rodona (o) per representar que la persona fa el viatge i una creu (+) si no el fa. Calculeu el nombre de rodones per a cada viatge i anoteu-lo a la columna dels totals. Si més de 10 persones agafen l'autobús poseu una rodona a l'última columna.

El professor reunirà els resultats de tota la classe.

- b En quants dels vostres cinc viatges és produeix un excés d'una persona?

En quants es produeix un excés de dues persones?

En quants hi ha exactament 10 persones?

En quants queden seients buits?

- c Penseu que el propietari del minibús quedaria satisfet amb els resultats obtinguts? Per què?

- d Utilitzeu els resultats de tota la classe i calculeu en quants viatges s'ha produït un excés de reserves.

Què creieu que hauria de fer l'Estanis?

- e Creieu que aquesta simulació s'ajusta al problema de l'Estanis?

En què es diferencia?

Com podríeu millorar la simulació?

B Números aleatoris

Heu fet SIMULACIONS per intentar resoldre problemes reals. En ambdues situacions hi intervenia l'atzar, per això heu utilitzat cartes i daus. Aquests mètodes són molt lents, ara veureu un mètode més ràpid.

Necessitareu el full R2.

B1 Taules de números aleatoris

*Intel·ligent per saber i saber o
ha utilitzat mai taules de
nos. aleatoris*

Aquests són els resultats obtinguts en 30 llançaments d'un dau.

2 3 2 1 4 5 6 1 3 5

6 1 2 5 6 3 1 4 3 4

1 6 4 1 3 4 3 5 6 1

RESERVES
BITLLETS

Podríeu haver utilitzat una taula com aquesta a la secció **A3** en comptes d'haver llençat un dau. Si disposéssiu d'un full sencer de resultats podríeu fer moltes simulacions d'una manera més ràpida.

Els ordinadors poden generar taules amb els dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Aquestes taules s'anomenen taules de NÚMEROS ALEATORIS, perquè cada xifra ha estat elegida donant a cadascun dels dígitos la mateixa probabilitat de ser escollit. La taula 1 n'és un exemple.

Taula 1 Números aleatoris de 0 a 9

9 1 9 3 8 8 5 6 3 5

7 6 9 7 3 5 1 9 3 7

1 4 6 6 0 7 4 6 5 0

5 8 0 8 7 3 4 2 9 7

2 0 4 2 6 4 6 8 0 0

Regular a l'autobús per un conversari a llegir una taula
de nombres aleatoris.

Regles per obtenir números aleatoris.

Regla 1

Per començar en un lloc qualsevol, assenyalau amb un llapis sense mirar la taula de números aleatoris i anoteu el número que quedi més a prop de la punta del llapis.

Regla 2

Escolliu una direcció qualsevol per llegir els resultats i manteniu-la durant tota la simulació.

Regla 3

Escriviu totes les xifres, sense deixar-vos-en cap.

Per exemple, si es comença a la segona línia s'obté:

7 6 9 7 3

- a **Escriviu els següents cinc números aleatoris de la taula.**
- b **Utilitzeu la taula 1 per escollir 10 números aleatoris.**



B2

Utilització de números aleatoris

Necessitareu el full R2.

L'Estanis pot fer servir els números aleatoris per resoldre el problema del minibús. Per terme mitjà, de cada sis bitllets reservats una persona no en fa ús. Això suposa una probabilitat d'un entre sis, és a dir $1/6$.

Necessita sis dígits: , 1, 3, 4, 5 i 6.

Si el número és un 1, la persona no viatja.

Si el número és un 2, 3, 4, 5, o 6, la persona viatja.

Si el número és un 7, 8, 9, o 0, s'ignora i es passa al número següent:

La taula 1 dona:

```

9 1 9 3 8 8 5 6 3 5
7 6 9 7 3 5 1 9 3 7
1 4 6 6 0 7 4 6 5 0
5 8 0 8 7 3 4 2 9 7
2 0 4 2 6 4 6 8 0 0
    
```

Per tant, una possible llista de números aleatoris és:

1, 3, 5, 6, 3, 5, 6, 3, 5, 1, 3, 1, 3, 1, 4, 6, 6, ...

La persona no viatja si el número està subratllat.

Si s'utilitza aquesta llista de números, els resultats de la secció A3 començarien d'aquesta manera:

Viatge	Reserves de bitllets												Total	Excés de viatgers
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
1	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	x	✓	x	9	
2	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	12	2
3	✓	✓	✓	✓										
4														
5														

Com podeu observar, caldrien molts més números aleatoris.

Suposeu ara que cada persona que ha fet la reserva té una possibilitat entre quatre de no venir. Es necessiten els números 1, 2, 3, 4. S'estableix que:

Si el número és un 1 la persona no viatja.

Si el número és un 2, 3 o 4 la persona viatja.

Si el número és un 5, 6, 7, 8, 9 o 0 s'ignora i es passa al número següent.

La taula de números aleatoris dóna:

9 1 9 3 8 8 5 6 3 5

7 6 9 7 3 5 1 9 3 7

1 4 6 6 0 7 4 6 5 0

Per tant, es podria utilitzar la llista:

1, 3, 3, 3, 1, 3, 1, 4, 4...

Utilitzeu el full R2 per explicar com farieu la simulació del minibús si la probabilitat fos:

a 1 entre 5 (és a dir $1/5$)

b 1 entre 8 (és a dir $1/8$)

c 1 entre 10 (és a dir $1/10$)

B3 Pluja o sol

En una població, el més de novembre passat va ploure 12 dies. S'estima la probabilitat que un dia del següent mes de novembre sigui plujós igual a $12/30 = 2/5$.

Per simular el temps del següent mes de novembre es necessiten els dígit 1, 2, 3, 4, 5. S'estableix que:

Si el número és un 1 o 2 plou.

Si el número és un 3, 4 o 5 no plou.

Si el número és un 0, 6, 7, 8 o 9 s'ignora i es passa al número següent.

Una possible llista de números aleatoris obtinguda de la taula 1 és:

1, 3, 5, 3, 5, 3, 5, 1, 3, 1, 4, 4, 5, 5, 3, 4, 2, 2, 4, 2, 4...

Els dies plujosos estan subratllats. Així la primera setmana hi ha un dia plujós.

Proposeu un mètode semblant si la probabilitat que un dia ploigui és:

- a 3 entre 5 (és a dir $3/5$)
- b 4 entre 7 (és a dir $4/7$)
- c 3 entre 8 (és a dir $3/8$)
- d 3 entre 10 (és a dir $3/10$)

*B4

Números aleatoris de dues xifres

Si es necessiten números aleatoris més grans, s'han de llegir els dígit de la taula de dos en dos. Si es comença a la segona línia de la taula 1 s'obté:

76, 97, 35, 19, 37, 14, 66, 07, 46, 50, ...

Si cal simular un esdeveniment amb una probabilitat de 7 entre 60, es podria establir que:

Si el número és un 01, 02, 03, 04, 05, 06 o 07 l'esdeveniment es realitza.

Si el número és un 08, 09, 10, ..., 59 o 60 l'esdeveniment no es realitza.

Si el número és un 61, 62, ..., 98, 99 o 00 s'ignora i es passa al número següent.

Per tant la llista començaria 35, 19, 37, 14, 07, 46, 50, ...

L'esdeveniment es realitza al cinquè intent.

- a **Escriviu 20 números aleatoris de dos dígit utilitzant la taula de full R4.**

Quins d'aquests números utilitzaríeu per simular un esdeveniment amb una probabilitat de

b 7 entre 30 ($7/30$) $\cong 21/90$

c 11 entre 70 ($11/70$)

d 1 entre 13 ($1/13$) $\cong 7/91$

- e **En cada llista subratlleu els números que fan que l'esdeveniment es realitzi.**

C Més simulacions

Per a les següents simulacions utilitzeu la taula de números aleatoris del full R4.

Els números estan escrits en parelles però els podeu llegir d'un en un.

Així 28 37 49 86 dona 2 8 3 7 4 9 8 6.

C1 El minibús

Necessitareu el full R1.

L'Estanis ha observat que els dissabtes aproximadament una persona de cada vuit que reserven bitllet després no fa el trajecte. Decideix repetir la mateixa simulació amb 12 reserves.

Ara es necessiten els díigits 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

Si el número és un 1, la persona no viatja.

Si el número és un 2, 3, 4, 5, 6, 7 o 8, la persona viatja.

Si el número és un 9 o 0, s'ignora i es passa al número següent.

a Feu la simulació per cinc viatges. Anoteu els resultats a la taula 4 del full R1.

b En quants viatges hi ha excés de persones?

c En quants viatges queda un seient buit?

d En quants viatges queden dos o més seients buits?

Discutiu els resultats amb algun company.

C2

Les claus

Necessitareu el full R3.

Un home té sis claus a la butxaca. Una nit quan torna a casa és molt fosc i no pot veure quina és la clau bona. Es treu una clau

de la butxaca i prova d'obrir la porta. Si la clau no obre, la torna a ficar a la butxaca, n'agafa una altra i ho torna a provar. (Podria ser la mateixa clau!) Va repetint el procés fins a obrir la porta.

$$P(\text{heigrao}^{\text{a}}/\text{Dica}) p = \frac{1}{6}$$

Quants intents haurà de fer fins a obrir la porta?

$$E(X) = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6 \text{ intents}$$

Prequibit com es Posa amb un dau

Podem fer una simulació amb números aleatoris. Es necessiten els dígits 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Si el número és un 1 la clau és la correcta i s'acaba la simulació.

Si el número és un 2, 3, 4, 5 o 6 la clau no obre la porta i s'ha de tornar a intentar-ho.

Ignoreu els números 7, 8, 9 i 0.



Per exemple si els resultats són 6, 4, 5 i 1, s'han necessitat quatre intents per obrir la porta.

- Feu la simulació cinc vegades. Anoteu els resultats a la taula 5 del full R3. Calculeu la mitjana del nombre d'intents fins a obrir la porta.

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \dots$$

$$= \frac{1}{6} (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = 3 \frac{1}{2} \text{ intents en mitjana}$$

Una altra nit, l'home s'hi pensa una mica més i actua de la manera següent. Si una clau no és l'adequada, en treu una altra de la butxaca abans de retornar-hi la primera.

En aquesta simulació cal que ignoreu un número si coincideix amb l'anterior ja que no es pot provar la mateixa clau dues vegades seguides.

b Feu la simulació cinc vegades. Anoteu els resultats a la taula 5 del full R3. Calculeu la mitjana del nombre d'intents fins a obrir la porta.

La tercera vegada que li passa el mateix, l'home ja s'hi pensa molt més. Si la clau no és l'adequada la guarda a una altra butxaca. Ara un número aleatori no es pot repetir, per tant, com a màxim caldran sis intents.

c Feu la simulació cinc vegades. Anoteu els resultats a la taula 5 del full R3. Calculeu la mitjana del nombre d'intents fins a obrir la porta.

d Quin és el mètode més ràpid? Quin és el mètode més lent?

És el que us esperàveu?

Matemàticament no es repeteix

***C3**

Semàfors

Necessitareu el full R3.

En Carles passa per dos semàfors cada matí. Ha comprovat que el primer semàfor està verd 30 de cada 50 segons.

a Quina és la probabilitat que en Carles no hagi d'aturar-se al primer semàfor?

b Dissenyeu un mètode per simular aquesta probabilitat amb números aleatoris, de manera semblant a com ho heu fet a l'apartat B3.

En Carles també ha comprovat que el segon semàfor està verd 30 de cada 90 segons.

c Quina és la probabilitat que en Carles no hagi d'aturar-se al segon semàfor?

d Dissenyu un mètode per simular aquesta probabilitat amb números aleatoris.

Per simular si en Carles es troba els semàfors verds o no, heu d'agafar números aleatoris de dues xifres.

Utilitzeu la primera xifra per decidir si en Carles s'atura al primer semàfor.

Utilitzeu la segona xifra per decidir si en Carles s'atura al segon semàfor.

e Feu aquesta simulació 20 vegades. Anoteu els resultats a la taula 8 del full R3.

f En quantes proves en Carles s'ha aturat als dos semàfors?

En quantes proves en Carles s'ha aturat només a un dels semàfors?

En quantes proves no s'ha aturat a cap semàfor?

g Utilitzeu els resultats obtinguts a l'apartat f per estimar la probabilitat que:

en Carles s'aturi als dos semàfors

en Carles s'aturi només a un semàfor

en Carles no s'hagi d'aturar.

Arbre de probabilitat

