

Margarina o mantega?

Durada de la unitat: 1-4 hores

Propòsits i objectius

Continguts

	<i>Pàgina</i>
Breu descripció	11
Propòsits i objectius	11
Pre-requisits	11
Material i planificació	11
Comentaris específics de cada secció	12
Secció A	12
Secció B	13
Secció C	14
Secció D	15
Secció E	16
Respostes	17
Prova	18
Respostes	20
Connexions amb altres unitats del Projecte	22
Fulls R a les pàgines	25

Breu descripció

En aquesta unitat els alumnes investiguen els efectes de l'atzar en diferents situacions, i analitzen el significat i la validesa dels missatges publicitaris.

Durada de la unitat: 3-4 hores.

Propòsits i objectius

Acabada la Secció C els alumnes haurien de ser capaços de saber relacionar tots els esdeveniments elementals associats a un experiment senzill, d'assignar probabilitats quan aquests esdeveniments són equiprobables, i d'obtenir les probabilitats d'esdeveniments compostos per simple addició de les probabilitats dels esdeveniments elementals. Hauran fet recomptes, completat taules i diagrames d'arbre i calculat proporcions. Els alumnes haurien d'haver entès alguns dels problemes relacionats amb el disseny d'experiments, els efectes de l'atzar, la relació entre freqüència relativa d'un esdeveniment i la seva probabilitat i que la probabilitat és un número comprès entre 0 i 1.

Els alumnes que treballin tota la unitat haurien de ser capaços d'assignar probabilitats per recompte d'esdeveniments elementals equiprobables, a partir d'un diagrama d'arbre. Hauran calculat la probabilitat de la reunió d'esdeveniments incompatibles, hauran calculat els coeficients de la distribució binomial i els hauran utilitzat per calcular les probabilitats d'obtenir 2 èxits sobre 4 i 8 èxits sobre 10 quan la probabilitat d'èxit és $1/2$. Aquests alumnes haurien d'haver entès les propietats de la distribució binomial i també la relació entre la probabilitat i missatges del tipus «8 de cada 10 gats prefereixen Whiskas».

Pre-requisits

Els alumnes han de saber: (i) convertir fraccions en decimals (Secció B) i (ii) reconèixer el triangle de Pascal (apartat E1, opcional).

Material i planificació

Aquesta unitat pot treballar-se de dues maneres:

- 1 Tota sencera. En aquest cas cada alumne necessita una còpia dels fulls R1 i R2.
- 2 En dues etapes:
 - (i) Seccions A, B, C. Cada alumne necessita una còpia del full R1.
 - (ii) Seccions A1, D, E. Cada alumne necessita una còpia del full R2.

Si els alumnes ja estan familiaritzats amb la probabilitat i els diagrames d'arbre, es poden ometre les Seccions A2, B i C. Si es disposa de temps i el nivell de la classe ho

permet, els alumnes poden construir totes les taules i diagrames d'arbre en comptes d'utilitzar els fulls R.

Per fer la simulació de l'apartat B1 s'ha de dividir la classe en grups de quatre. Si la classe és poc nombrosa, es pot treballar en grups de tres o també individualment.

Cada grup necessita tres peces de paper o cartolina idèntiques, marcades amb les lletres A, B, C. Les Seccions C i D es poden treballar individualment, encara que pot ser necessari discutir amb tota la classe els possibles esdeveniments elementals.

Els alumnes més avançats poden treballar l'apartat C6 passant de la qüestió a directament a les qüestions f i g.

L'apartat C7 és opcional i està pensat com a reforç. Els altres apartats o qüestions amb asterisc estan pensats per als alumnes més avançats. Tots aquests apartats es poden ometre sense canviar substancialment el sentit de la unitat.

Comentaris específics de cada secció

Secció A

A1

En aquest apartat es tracten possibles maneres d'interpretar missatges basats aparentment en proves estadístiques. Pot ser necessària una discussió conjunta amb tota la classe.

- a S'anima els alumnes a pensar en possibles interpretacions del missatge. Els alumnes anotaran les seves interpretacions, i les utilitzaran en un apartat posterior.
- b Els alumnes haurien d'adonar-se de la possibilitat que el gat no distingeixi entre els menjars. Alguns comentaris podrien reflectir una desconfiança generalitzada en els missatges publicitaris. Podria ser interessant consultar la legislació específica.

A2

És improbable que les 100 persones siguin totes expertes en cafès. La discussió podria incloure els següents punts:

- (i) Possible biaix si el concurs es realitzés en un establiment especialitzat en cafès de qualitat, comparant els resultats amb els que s'obtidrien en un supermercat.
- (ii) Significat de resultats del tipus: 80 persones encerten, 20 persones encerten.
 - a Si els cafès tinguessin el mateix sabor, els concursants haurien de reconèixer que purament estan «provant sort». Encertar la resposta correcta seria només qüestió de sort.

- b** Si els cafès tinguessin diferent sabor, els concursants no haurien d'admetre necessàriament que estan «provant sort». No obstant això, és improbable que siguin capaços de classificar correctament els cafès si no són experts en la matèria.

Secció B

B1

Cada alumne necessita una còpia del full R1.

La simulació hauria de produir una raonable distribució dels possibles esdeveniments elementals. Cal insistir en la necessitat de barrejar les tires de paper, de doblegar-les sempre de la mateixa manera i d'escollir-les sense mirar.

Si el grup és prou avançat, pot ser interessant i motivador per als alumnes afegir a l'experiment un interès econòmic. Per exemple, es pot suggerir un guany de 200 ptes. si tots els informes s'han rebut correctament, un guany de 50 ptes. si només un informe s'ha rebut correctament i una multa de 100 ptes. si els tres informes s'han rebut incorrectament. Aquestes quantitats es poden aplicar als resultats obtinguts a la simulació per calcular el benefici obtingut i també es poden aplicar als esdeveniments elementals del diagrama d'arbre per calcular el benefici esperat. La taula T1 mostra el benefici corresponent a cadascun dels sis esdeveniments elementals.

Taula T1 Benefici obtingut en la tramesa d'informes

Esd. elem.	Nom. correct.	Benefici
ABC	3	200 ptes.
ACB	1	50 ptes.
BAC	1	50 ptes.
BCA	0	- 100 ptes.
CAB	0	- 100 ptes.
CBA	1	50 ptes.
Benefici total		150 ptes.

Així, sobre 6 esdeveniments elementals equiprobables s'espera un benefici de 150 ptes., és a dir, el benefici esperat és de 25 ptes. per experiment.

B2

Els alumnes poden necessitar ajuda per passar els resultats de la Taula 5 a la Taula 6.

- a-c** És aconsellable fer una taula de recomptes per realitzar aquest procés.

- d S'ha de fer notar que «si dos informes s'han rebut correctament, el tercer també».
- e Pot ser útil fer servir calculadores.
- f El professor pot escriure els resultats a la pissarra per obtenir els totals per a cadascun dels esdeveniments elementals. Després els alumnes els entraran a la Taula 6. S'hauria d'animar els alumnes a fer comentaris sobre les proporcions obtingudes, que serviran d'introducció de l'apartat C5. Es poden buscar tendències d'estabilització de les proporcions a mesura que el nombre de simulacions augmenta.

B3

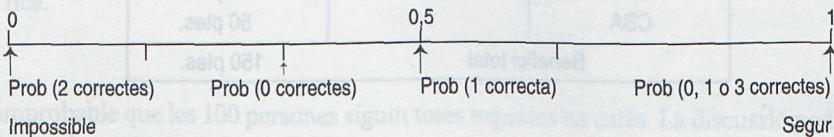
- a És possible que només en 15 simulacions alguna de les sis ordenacions no es presenti. Si es presentessin molt poques ordenacions s'hauria d'esbrinar de quina manera el grup ha fet la simulació per comprovar si hi ha alguna irregularitat. Això pot ser útil per remarcar la necessitat que totes les simulacions s'han de fer en les mateixes condicions.

Secció C

En aquesta secció s'analitza la situació des d'un punt de vista teòric, i s'hi observa la tendència de les proporcions a aproximar-se a les probabilitats teòriques, en augmentar el nombre de simulacions. La introducció es fa mitjançant diagrames d'arbre.

C3

A la qüestió f, que es pot ometre, es demana als alumnes que copiïn unes frases que resumeixen les propietats fonamentals de la probabilitat que han treballat. Pot ser útil representar les probabilitats en una escala com la que es mostra a continuació.



C5

A la qüestió d s'han de sumar les proporcions. Es pot dibuixar una taula a la pissarra per tal que els alumnes la copiïn i la completin amb les proporcions que han obtingut, per exemple:

Resultat	Proporció grup	Proporció classe	Probabilitat
ABC	0,	0,	0,17
0 correctes	0,	0,	0,33
1 correcte	0,	0,	0,5
0 o 3 correctes	0,	0,	0,5

És d'esperar que les proporcions de la classe siguin més properes a les probabilitats que les proporcions del grup.

C6

Si els alumnes responen correctament la qüestió **a**, es pot passar directament a les qüestions **f** i **g**.

*C7

Aquest apartat és opcional i serveix de reforç.

- g** Alguns alumnes poden necessitar ajuda per respondre la qüestió. Alguns probablement respondran 5 per intuïció, però si el nivell de la classe ho permet és recomenable explicar que 5 és el resultat més probable quan la probabilitat d'èxit és $1/6$.

Secció D

En aquesta secció els alumnes amplien la utilització de diagrames d'arbre a 3 i 4 persones.

La probabilitat d'èxit utilitzada és $1/2$ per simplificar els càlculs. S'ha d'anar recordant durant tota la secció que els resultats s'obtenen provant sort, és a dir, *per atzar*.

D2

Si es creu convenient, els alumnes poden copiar i completar la Figura 4 i la Taula 7.

D3

- a** Les probabilitats no són les mateixes.
- g** Els alumnes han de comparar la seva resposta amb la que han donat intuïtivament a la qüestió **a**.

Probabilitat (1 d'entre 2 persones responguin correctament) = $1/2 = 0,5$

Probabilitat (2 d'entre 4 persones responguin correctament) = $\frac{6 \times 1}{16} = 3/8 = 0,375$

Secció E

En aquesta secció s'extén la distribució binomial fins arribar a la situació de 8 d'entre 10.

*E1

Aquest apartat és opcional i està pensat per als alumnes més avançats. La Taula 4 és una altra manera de veure el triangle de Pascal, i mostra el nombre de possibles maneres d'obtenir diferent nombre d'èxits en diferents casos. Els alumnes poden necessitar ajuda per completar la taula. Es pot copiar i completar a la pissarra si es creu convenient. Les qüestions **k** i **l** estan pensades per als alumnes que han treballat l'apartat *C4*.

E2

***b** Aquesta pregunta s'ha de resoldre només si es considera adequada. Es pot calcular conjuntament com un exercici per a tota la classe, amb l'ajuda de calculadores. Es manté la Probabilitat (èxit) = $1/2$. Si no s'obté el resultat, s'haurà de donar per poder fer l'apartat *E3*.

E3

Probabilitat (8 d'entre 10 persones encertin) = $45/2 = 0,044$ (o $56/2$ si és «com a mínim 8 d'entre 10»).

Per tant, si la prova referent al menjar per a gats s'ha realitzat com un experiment estadístic correctament dissenyat, la probabilitat d'obtenir 8 èxits d'entre 10 per atzar és bastant petita. La qüestió és saber si el disseny experimental és correcte.

c S'ha de valorar qualsevol interpretació que mostri que l'alumne ha entès l'efecte que pot produir l'atzar en aquest tipus de resultats i també el caràcter qüestionable d'algunes evidències estadístiques que sovint s'utilitzen com a suport en anuncis publicitaris.

*E4

Aquest apartat també és opcional. S'introdueix l'efecte que produeix un canvi en la probabilitat d'èxit. Es deixa a la consideració del professor ampliar si creu convenient aquest tema. Una referència interessant és el llibre *How to Lie with Statistics* de D. Huff (Penguin, 1973).

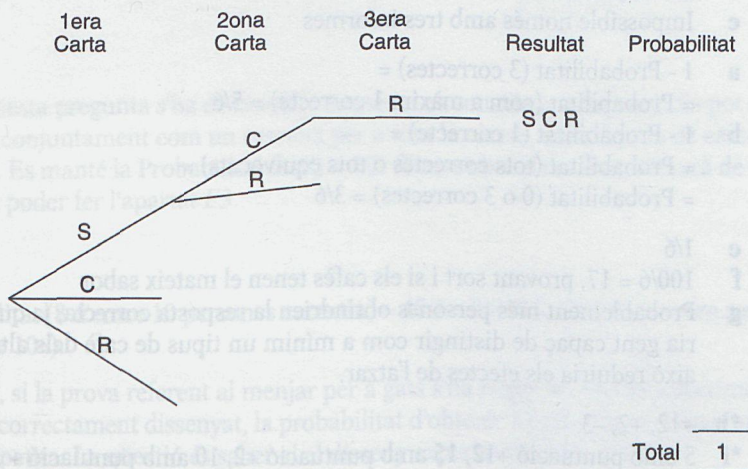
Respostes

- C2** a Esdeveniments elementals ACB, BAC, CBA ;
Probabilitat $1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6$
b Esdeveniment elemental ABC ; Probabilitat $1/6$
c Impossible; Probabilitat 0
- C3** a Esdeveniments elementals BCA, CAB, ABC ;
Probabilitat $1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6$
b Esdeveniments elementals ACB, BAC, BCA, CAB, CBA ;
Probabilitat $1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 5/6$
c Esdeveniments elementals ACB, BAC, CBA ;
Probabilitat $1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6$
d Tots els esdeveniments elementals;
Probabilitat $6/6 = 1$
e Impossible només amb tres informes
- *C4** a 1 - Probabilitat (3 correctes) =
= Probabilitat (com a màxim 1 correcte) = $5/6$
b 1 - Probabilitat (1 correcte) =
= Probabilitat (tots correctes o tots equivocats) =
= Probabilitat (0 o 3 correctes) = $3/6$
- C6** e $1/6$
f $100/6 = 17$, provant sort i si els cafès tenen el mateix sabor
g Probablement més persones obtindrien la resposta correcta, ja que hi hauria gent capaç de distingir com a mínim un tipus de cafè dels altres dos, i això reduiria els efectes de l'atzar.
- C7** *h +12, +2, -3
*i 5 amb puntuació +12, 15 amb puntuació +2, 10 amb puntuació +3.
- D2** d $1/8$ e $3/8$ f $3/8$ g $1/8$
- D3** c $1/16$ d $1/4$ e $6/16$ f 2 g No
*i $1 - 1/16 = 15/16$ *j $11/16$
- *E1** h $1/32$ i $5/32$ j 2 o 3 tenen la mateixa probabilitat igual a $10/32$
k $31/32$ *l $26/32$
- E2** b $45/2^{10} = 0,044$
- E4** a $1/6$
b Probabilitat (exactament 1 persona d'entre 2 encerti) = $2 \times 5/6 \times 1/6 = 0,28$
d Probabilitat (exactament 2 persones d'entre 4 encertin) =
= $6 \times (5/6)^2 \times (1/6)^2 = 0,12$

Prova

- 1 Es barregen tres cartes, sota, cavall i rei, i després es van girant d'una en una. Es demana:
 - a Copieu i completeu la Figura 1 per mostrar els possibles esdeveniments elementals.
 - b Completeu la columna que porta per títol «Probabilitat».
 Calculeu:
 - c Probabilitat (ordre SCR)
 - d Probabilitat (la segona carta sigui un rei)
 - e Si es realitza l'experiment 100 vegades, quantes vegades esperaríeu que la primera carta fos una sota?

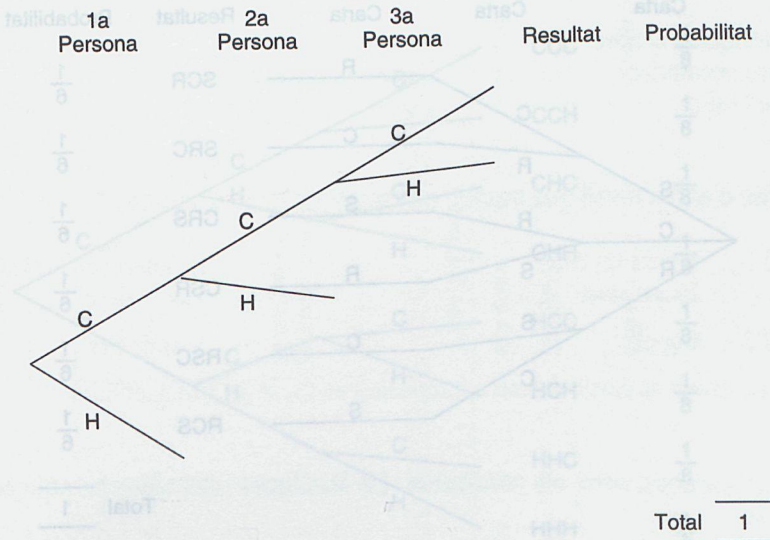
Figura 1 Diagrama d'arbre que mostra el resultat de les tres cartes



- 2 Indiqueu la probabilitat de:
 - a un esdeveniment impossible,
 - b un esdeveniment segur.
 En relació amb l'experiment de la pregunta 1, doneu un exemple de:
 - c un esdeveniment impossible,
 - d un esdeveniment segur.
- 3 A una persona se li fa tastar un tall de formatge de bola. Se li diu que és un formatge o bé català o bé holandès i se li demana que l'identifiqui.
 - a Si la persona només prova sort, quina és la probabilitat que encerti?
 Tres persones fan la mateixa prova del formatge. Supposeu que totes només proven sort. Els possibles esdeveniments elementals es poden mostrar en un diagrama d'arbre.

- b** Copieu i completeu la Figura 2 per mostrar els possibles esdeveniments elementals.

Figura 2 Diagrama d'arbre de la prova del formatge per a tres persones



- c** Completeu la columna que porta per títol «Probabilitat»
Suposeu que el formatge és català. Calculeu:
- d** Probabilitat (tots encertin)
- e** Probabilitat (exactament 1 encerti)
- f** Probabilitat (tots fallin)
- g** Probabilitat (exactament 2 encertin)
- h** Probabilitat (com a mínim 1 encerti)
- 4** Per respondre a les següents qüestions no cal que dibuixeu cap diagrama d'arbre ni que feu càlculs.
Suposeu que sis persones fan la prova del formatge i totes proven sort.
- a** Quin és el nombre de persones que és més probable que encerti la resposta correcta?
- b** ¿La probabilitat que 2 d'entre 6 persones responguin correctament és més gran, més petita o igual a la probabilitat que 1 d'entre 3 ho faci?

Respostes

1 a, b Figura 1

1a Carta	2a Carta	3a Carta	Resultat	Probabilitat
	C	R	SCR	$\frac{1}{6}$
S	R	C	SRC	$\frac{1}{6}$
C	R	S	CRS	$\frac{1}{6}$
R	S	R	CSR	$\frac{1}{6}$
	S	C	RSC	$\frac{1}{6}$
	C	S	RCS	$\frac{1}{6}$
Total				1

c Probabilitat (ordre SCR) = $\frac{1}{6}$

d Probabilitat (la segona carta sigui un rei) = $\frac{2}{6}$

e Probabilitat (primera carta sigui sota) = $\frac{2}{6}$

En 100 experiments, nombre esperat = $100 \times \frac{2}{6} = 33$

2 a Probabilitat (esdeveniment impossible) = 0

b Probabilitat (esdeveniment segur) = 1

c i d tenen moltes possibles respostes; se'n suggereixen algunes:

c Probabilitat (obtenir un as)

Probabilitat (obtenir una carta que no sigui figura)

Probabilitat (exactament 2 de les 3 cartes estan en l'ordre correcte SCR)

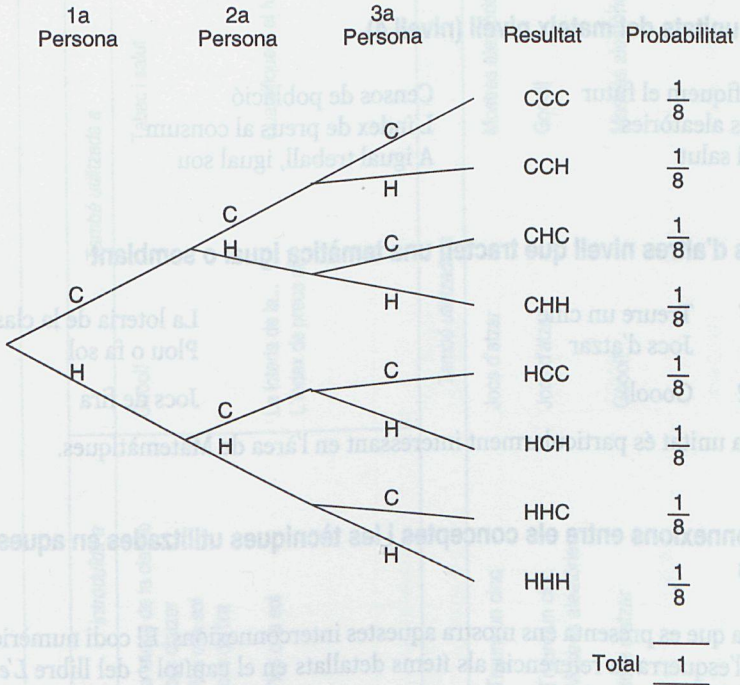
d Probabilitat (obtenir una sota, un cavall i un rei en qualsevol ordre)

Probabilitat (obtenir 3 cartes diferents)

Probabilitat (obtenir 3 figures)

3

Figura 2



- d Probabilitat (tots encertin) = $\frac{1}{8}$
- e Probabilitat (exactament 1 encerti) = $\frac{3}{8}$
- f Probabilitat (tots fallin) = $\frac{1}{8}$
- g Probabilitat (exactament 2 encertin) = $\frac{3}{8}$
- h Probabilitat (com a mínim 1 encerti) = $\frac{7}{8}$

4

- a 3
- b Probabilitat (exactament 2 d'entre 6 encertin) = $\frac{15}{64}$ és menor que Probabilitat (exactament 1 d'entre 3 encerti) = $\frac{3}{8}$, però no es demana que els alumnes facin els càlculs.

Connexions amb altres unitats del projecte

Altres unitats del mateix nivell (nivell 4)

Quantifiquem el futur	Censos de població
Mostres aleatòries	L'índex de preus al consum
Tabac i salut	A igual treball, igual sou

Unitats d'altres nivell que tracten una temàtica igual o semblant

<i>Nivell 1</i>	Treure un cinc Jocs d'atzar	La loteria de la classe Plou o fa sol
<i>Nivell 2</i>	Goool!	Jocs de fira

Aquesta unitat és particularment interessant en l'àrea de Matemàtiques.

Interconnexions entre els conceptes i les tècniques utilitzades en aquestes unitats

La taula que es presenta ens mostra aquestes interconnexions. El codi numèric que figura a l'esquerra fa referència als ítems detallats en el capítol 5 del llibre *L'ensenyament de l'Estadística 11-16*.

Tot ítem que figuri a la columna *Pre-requisits estadístics* ha d'haver estat tractat abans d'abordar aquesta unitat. A la dreta, i a la mateixa alçada, s'indiquen les unitats que introdueixen aquesta idea o tècnica.

Els ítems que figuren a la columna *Idea o tècnica utilitzada* no s'introdueixen específicament ni tenen una atenció especial en la unitat. Poden figurar en un o més exemples i es tracten dins d'un context més general. No és necessari tenir un coneixement previ d'aquests ítems a l'hora de tractar la unitat. A les dues columnes de la dreta s'informa de la resta d'unitats que introdueixen o utilitzen aquests ítems i que poden ser presentades abans o després d'aquesta unitat.

Els ítems que figuren a la columna *Idea o tècnica introduïda* es tracten específicament en la unitat i, si es tracta d'una tècnica, es mostra el seu desenvolupament amb tot detall. A la columna de la dreta hi figuren les unitats que tracten aquests mateixos ítems.

Codi Núm.	<i>Pre-requisits estadístics</i>	<i>Introduïts a</i>	
	Cap		
	<i>Idea o tècnica utilitzada</i>	<i>Introduïda a</i>	<i>També utilitzada a</i>
1.3e	Variabilitat entre mostres procedents de la mateixa població	La loteria de la classe Jocs d'atzar Plou o fa sol Jocs de fira	Goool! Tabac i salut
2.1a	Construcció per recompte directe de taules de freqüències	Plou o fa sol	La loteria de la... L'índex de preus al... Quantifiquem el futur
4.2b	Suma de probabilitats: esdeveniments incompatibles		
4.3d	Model binomial: $p=1/2$, n petita		
	<i>Idea o tècnica introduïda</i>	<i>També utilitzada a</i>	
4.1a	Freqüència relativa d'un esdeveniment	Treure un cinc	Jocs d'atzar Mostres aleatòries
4.1c	Probabilitat com a límit de freqüències relatives en casos equiprobables	Treure un cinc Mostres aleatòries	Goool! Mostres aleatòries
4.1e	Probabilitat d'una mostra procedent d'una població coneguda	Jocs d'atzar	Goool! Mostres aleatòries
4.1i	Esdeveniments elementals		
4.1j	Probabilitat d'esdeveniments	Mostres aleatòries	

Codi Núm.	Idea o tècnica introduïda	També utilitzada a		
4.1m	Aleatorietat i equiprobabilitat	Jocs d'atzar	Plou o fa sol	Jocs de fira
4.1o	Recompte sistemàtic de resultats	Jocs d'atzar	Jocs de fira	Mostres aleatòries
4.3o	Simulació com a model	Mostres aleatòries		
4.3p	Realització de simulacions	Plou o fa sol	Gooool!	Mostres aleatòries
4.3q	Interpretació dels resultats d'una simulació	Plou o fa sol	Gooool!	Mostres aleatòries
5l	Elements del disseny d'experiments			
5x	Comparació de valors obtinguts amb valors esperats	La loteria de la classe Gooool!	Jocs d'atzar Jocs de fira	Plou o fa sol Quantifiquem el futur
5y		Mostres aleatòries		
5z				
6a				
6b				
6c				
6d				
6e				
6f				
6g				
6h				
6i				
6j				

R1

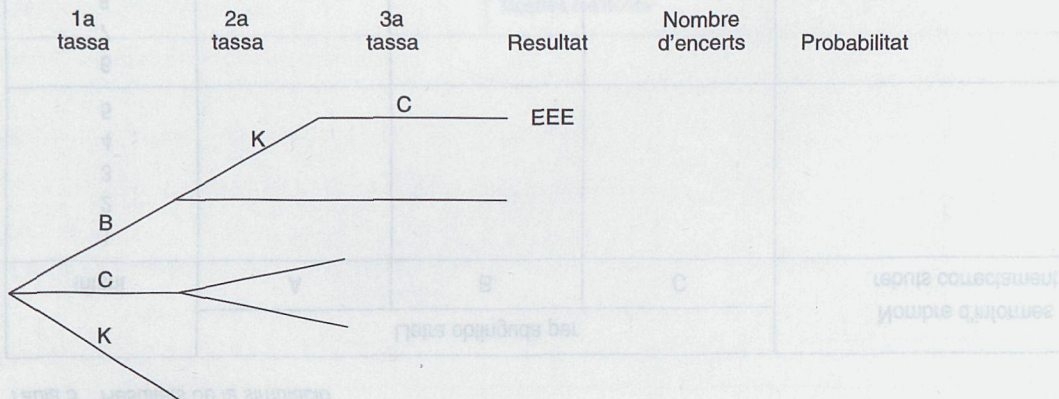
Taula 5 Resultats de la simulació

Intent	Lletra obtinguda per			Nombre d'informes rebuts correctament
	A	B	C	
1			1	18
2			3	
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				

Taula 6 Resum dels resultats

Nombre resul. correctes	Resultats del grup		Resultats de la classe	
	Freqüència	Proporció	Freqüència	Proporció
0				
1				
3				
Total	15			

Figura 3 Diagrama d'arbre per a la prova del cafè



R2

Taula 7 Resum dels resultats per a tres persones

Nombre d'encerts	Esdeveniments elementals	Nombre d'esdev. el.	Probabilitat
0	FFF	1	1/8
1	FFE, FEF, EFF	3	
2	EEF		
3			
Total		8	1

Figura 4 Diagrama d'arbre per mostrar els esdeveniments elementals per a tres persones

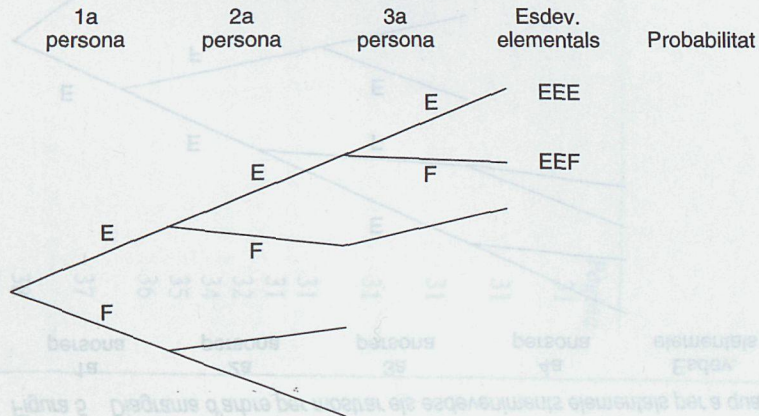
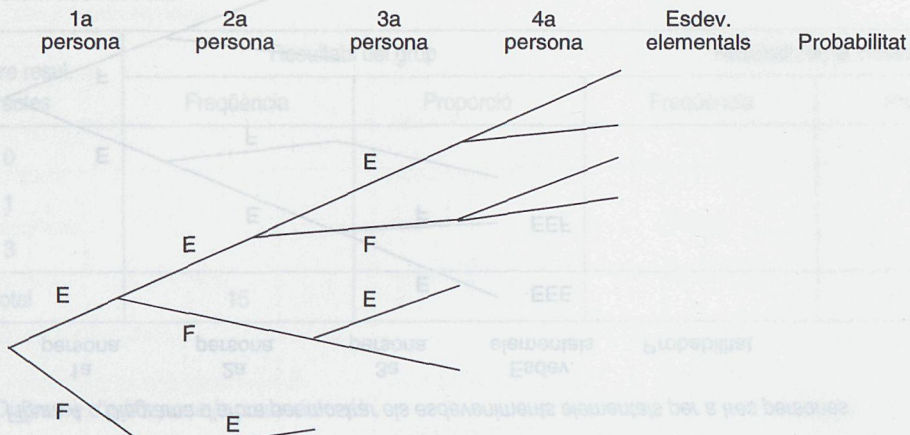


Figura 5 Diagrama d'arbre per mostrar els esdeveniments elementals per a quatre persones



1a persona	2a persona	3a persona	4a persona	Esdev. elementals	Probabilitat
0	E	E	E	EEEE	
1	E	E	F	EEEF	
2	E	F	E	EFEF	
3	E	F	F	EFFF	
4	F	E	E	FEFE	
5	F	E	F	FEFF	
6	F	F	E	FFFE	
7	F	F	F	FFFF	
Totals	16	16	16	16	

Figura 3 Què és un arbre de probabilitats per a quatre persones?

1a persona	2a persona	3a persona	4a persona	Esdev. elementals	Probabilitat
0	E	E	E	EEEE	
1	E	E	F	EEEF	
2	E	F	E	EFEF	
3	E	F	F	EFFF	
4	F	E	E	FEFE	
5	F	E	F	FEFF	
6	F	F	E	FFFE	
7	F	F	F	FFFF	
Totals	16	16	16	16	