

Jocs d'atzar

Continguts

	<i>Pàgina</i>
Breu descripció	77
Propòsits i objectius	77
Pre-requisits	77
Material i planificació	77
Comentaris específics de cada secció	78
Secció A	78
Secció B	81
Secció C	82
Respostes	83
Prova	84
Respostes	85
Connexions amb altres unitats del Projecte	86
Fulls R a les pàgines	90-93

Breu descripció

Les idees bàsiques de la probabilitat s'introdueixen jugant amb daus i monedes. Alguns jocs requereixen estratègies simples. La part principal de la unitat acaba encoarantant els alumnes a comparar probabilitats relativament complicades, sense fer càlculs detallats. Al final es proposa una secció opcional on es pinten diferents dibuixos per introduir algunes idees bàsiques de combinatòria.

Durada de la unitat: 4 hores (les A7, A9, B2, B3 i C són opcionals).

Propòsits i objectius

En completar aquesta unitat els alumnes haurien de ser capaços d'entendre la probabilitat com una assignació de números compresos entre 0 i 1 (per casos simples i equiprobables i relacionant sempre les probabilitats amb el límit de les freqüències relatives), i també com un desenvolupament d'una escala ordinal que va des de l'esdeveniment impossible al segur, passant pel probable.

Els alumnes hauran recollit, enregistrat i tabulat dades. Hauran fet representacions gràfiques i anàlisis dels resultats, i també hauran practicat la lectura i interpretació de dades presentades en taules o gràfics.

Els alumnes haurien d'haver entès la diferència entre la freqüència relativa i la probabilitat, especialment en experiments amb monedes i daus. Haurien de començar a reconèixer fenòmens que tenen una variació aleatòria.

Pre-requisits

Els alumnes haurien de saber fer recomptes i representar diagrames de barres per dades discretes, ordenar números decimals entre 0 i 1 i conèixer les fraccions.

Material i planificació

Es necessitaran una vintena de daus i unes 400 fitxes. Per la secció A7, que és opcional, es necessiten ruletes i daus que no siguin cúbics. Els fulls R1 i R2 serveixen per enregistrar els resultats de la secció A. Els alumnes treballaran en parelles o individualment segons s'indiqui. Podria ser profitós que algun punt fos discutit conjuntament amb tota la classe.

Secció A. Es comença amb l'anàlisi d'un joc on es tira un dau. Es discuteix l'equitativitat i el possible biaix d'un dau. Això serveix d'introducció a la probabilitat. En les seccions A5 i A6 s'amplia la idea de probabilitat. La secció A7 és opcional i dóna oportunitat als alumnes més ràpids d'investigar daus no estàndards i ruletes. A la secció A8 s'introdueix un joc amb dos daus, i a la secció A9, que és opcional, es proposa un joc semblant.

Secció B. S'introdueix un joc on s'avaluen probabilitats més complexes. En aquesta avaluació s'utilitzen mètodes experimentals. Les seccions B2 i B3 que tracten altres jocs amb daus i monedes, són opcionals.

Secció C. Està pensada com a complement. Introdueix algunes idees de combinatòria. Aquestes idees no es tracten amb gran profunditat al llibret de l'alumne, però poden ser ampliades.

Comentaris específics de cada secció

Secció A

A1

Un bon començament podria ser fer una demostració del joc a classe.

Encara que tant l'Anna com en Bernat tenen tres resultats que els afavoreixen, el joc no és equitatiu –qualsevol tirada afavoreix en Bernat en una proporció de 12:9. Els alumnes, aparellats, haurien de descobrir-ho jugant-hi cinc vegades i agrupant els resultats de les cinc partides. El full R1 serveix per enregistrar els resultats.

Si es recullen els resultats de tota la classe dels apartats (f) i (g), s'obtindrà una visió més clara del biaix del joc. Seria interessant discutir-ho amb tota la classe.

Una manera de modificar el joc per tal de fer-lo equitatiu és que es prengui només un punt cada vegada. Una alternativa és que l'Anna guanyi quan surt 2, 3, i 5 i en Bernat quan surt 4 i 6. No és fàcil buscar la probabilitat que B guanyi. De fet és 0,663. La mitjana de tirades necessàries per completar el joc és una mica més de 7 (el mode és 3 i la mediana 5).

Una manera d'organitzar la classe podria ser que per a cada parella d'alumnes els qui escullin *senars* s'asseguin a l'esquerra i els qui escullin *parells* a la dreta. En completar les partides, demaneu que s'aixequi qui hagi guanyat de cada parella. Podreu llavors distingir ràpidament entre els qui han escollit *senars* i els qui han escollit *parells*.

A2

Per reforçar el concepte suggerit a c, és important recollir els resultats de la classe i utilitzar-los per construir una versió més gran de la figura 1. Les barres haurien de ser aproximadament iguals, fins i tot més iguals que en el diagrama de cada parella. Si el dau estigués trucat, una columna seria més alta que les altres.

A3

Aquesta secció reforça el treball que ja s'ha fet i relaciona el concepte de dau *equitatiu* amb probabilitat.

A4

Aquesta secció està pensada per posar de manifest la presència de petites diferències entre les freqüències. Aquest és un aspecte molt important de la variació aleatòria. El resultat que té més probabilitat d'haver-se produït és el de la columna (ii). No hi ha variabilitat (i); (iii) té un nombre molt gran de *dosos*; mentre que a (iv) hi ha massa variació.

A5

Aquesta secció podria provocar discussió i algun desacord. S'introdueixen expressions utilitzades correntment per descriure probabilitats d'esdeveniments futurs. Hi ha una combinació de probabilitat objectiva i subjectiva –basada en una major o menor evidència estadística.

L'experiència ajudarà a valorar la probabilitat dels esdeveniments.

L'ordre de les expressions és: impossible, altament improbable, improbable, igualment probables, probable, molt probable i segur.

A6

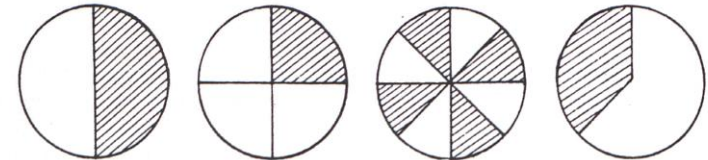
Els alumnes calcularan probabilitats senzilles; poden necessitar ajuda per part del professor. Cal que coneguin els números decimals per poder fer l'apartat (1). Es podria dibuixar l'escala numèrica de 0 a 1 a la pissarra i marcar la posició de cadascuna de les frases de **A5 c**.

***A7**

Per fer ruletes, es pot dibuixar un cercle en una peça de cartolina i just pel centre del cercle es fa sortir la punta d'una xinxeta on es clava un indicador. Aquest indicador ha de poder girar lliurement mentre s'immobilitza la cartolina. El cercle pot pintar-se amb les proporcions que es vulgui. Una altra possibilitat és fer girar el cercle i dibuixar una fletxa sobre la cartolina.

S'haurien de realitzar un gran nombre d'experimentacions amb el dau i la ruleta acompanyades d'una anàlisi de les freqüències de cada esdeveniment possible, que haurien de relacionar-se amb el nombre de cares del dau o bé amb la proporció de cercle que fa que s'obtingui cada resultat.

Possibles ruletes són:

**A8**

En aquesta secció s'examina un joc en el qual intervenen dos daus.

Acabat l'experiment s'ensenyarà als alumnes la taula T1 dels 36 possibles resultats equiprobables. Els alumnes més avançats haurien de ser capaços de calcular teòricament les dues probabilitats i copsar-ne la diferència.

Taula T1 La suma de dos daus

		Segon dau					
		1	2	3	4	5	6
Primer dau	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Inicialment el joc pot semblar favorable a A ja que té set sumes que l'afavoreixen mentre que B només en té quatre. De fet el joc afavoreix B perquè té 20 dels 36 resultats equiprobables al seu favor mentre que A només en té 16. La probabilitat que B obtingui les cinc fitxes abans que A és 0,635.

***A9**

En aquesta secció, que és opcional, es tracta un joc semblant al de la secció anterior. Mostrareu una altra vegada als alumnes una taula de doble entrada (taula T2). En aquest joc A té més probabilitat de guanyar a cada tirada (23:13) i té una probabilitat de 0,81 de guanyar la partida.

Taula T2 El producte de dos daus

		Segon dau					
		1	2	3	4	5	6
Primer dau	1	1	2	3	4	5	6
	2	2	4	6	8	10	12
	3	3	6	9	12	15	18
	4	4	8	12	16	20	24
	5	5	10	15	20	25	30
	6	6	12	18	24	30	36

Secció B

En el joc de la cursa d'obstacles els alumnes s'enfrontaran amb probabilitats més complexes. Malgrat tot les opcions són molt clares. Es podrien afegir més obstacles d'una naturalesa semblant, utilitzant ruletes, daus trucats, etc.

B1

En aquesta secció es presenta el joc i s'orienta els alumnes sobre la manera d'escollir els obstacles. Els alumnes poden treballar en grups de quatre, de manera que cada parella avaluï dos conjunts d'obstacles. Els resultats de la secció A8 haurien d'ajudar a escollir la millor ruta. També es podria presentar com un joc per a tota la classe, utilitzant un retroprojector. La millor ruta és 1b, 2a, 3b, 4b. Les probabilitats en cada obstacle, en l'ordre a:b són 1:2 5:3 3:4 i 5:9.

***B2**

En aquesta secció, que és opcional, es presenta el joc del futbol americà; de fet, és semblant al joc de la secció A1. L'equip A té un lleuger avantatge. Aquest apartat podria ser utilitzat com a reforç de les seccions anteriors.

***B3**

En aquesta secció opcional es presenta un joc basat en el tennis. Pot fer-se més semblant a la realitat utilitzant diferents mètodes d'atzar per decidir quan un cop és bo. (Per exemple la probabilitat d'entrar un segon servei podria ser més alta que 0,5, la de contestar un bon primer servei més baixa que 0,5). La idea de simulació es desenvolupa en el llibret de nivell 1 *Plou o fa sol*. Tal com es descriu en el llibret dels alumnes aquest joc és equitatiu. En comptes d'utilitzar una moneda, es podria utilitzar un dau tot substituint cara i creu per parells i senars.

***Secció C**

Aquesta secció és opcional i està pensada per introduir nocions de combinatòria. Per resoldre aquests exercicis, és essencial que els alumnes desenvolupin una estratègia lògica que assegurí que s'escullen totes les possibles combinacions una vegada i només una. Per encoratjar els alumnes a desenvolupar aquestes estratègies es proposen uns quants exercicis pràctics. Més tard aquests resultats es poden formalitzar en diagrames d'arbre i fórmules. Per fer torres de diferents colors o investigar el nombre de maneres de pintar banderes de tres colors es poden utilitzar cubs de plàstic d'un sol color o palets de colors.



Per tal que els alumnes comencin a formalitzar el nombre de possibilitats, els podeu ensenyar la taula T3 dels resultats del vaixell d'en Joan, però incompleta. Deixeu en blanc les caselles corresponents als números que hi són escrits en caràcters itàlics perquè les omplin els alumnes.

Taula T3 Nombre de possibilitats

	Nombre de colors				
	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	-	2	6	12	20
Nombre d'espais	3	-	6	24	60
	4	-	-	24	120
	5	-	-	-	120

Generalitzant, per r colors i n espais:

Si els colors no es poden repetir, hi ha $\frac{r!}{(r-n)!}$ maneres ($n \leq r$)

Si els colors es poden repetir, hi ha r^n maneres.

Respostes

A1 a 3 b 3 c Consulteu els comentaris específics.

h Consulteu els comentaris específics.

A2 Consulteu els comentaris específics.

A3 b Probabilitat $p(\square) = 1/6$ etc.

A4 Consulteu els comentaris específics.

A6 b 1/3 c 1/2 d 1/3 e 5/6 f 1/2 g 1/3 h 0 i 1

k impossible, segur.

A8 Des de a fins a c consulteu els comentaris específics.

g Les respostes teòriques són 7, 2 i 12, però les respostes depenen dels resultats dels alumnes.

h Consulteu els comentaris específics.

B Consulteu els comentaris específics.

C a 6 b 6 d 12 e 24 f 4 g 16

Prova

1 Si tireu un dau equitatiu, quina és la probabilitat d'obtenir:

a Un 3?







b un número parell?

c un 8?

2 Un dau té les cares numerades, 1, 1, 2, 3, 4, 5, per tant no té la cara 6. Dibuixeu el diagrama de barres dels resultats que us sembli que podríeu obtenir si tiréssiu el dau 60 vegades.

3 L'Anna, en Bernat i la Carme havien de tirar un dau equitatiu 240 cops cadascun. La taula ens mostra els resultats que van donar al professor. Un d'ells va fer l'experiment mentre que els altres dos es van inventar els resultats.

240 tirades d'un dau equitatiu

Número	Freqüència		
	Anna	Bernat	Carme
	24	40	37
	26	40	42
	33	40	36
	27	40	48
	96	40	36
	34	40	41

a Qui us sembla que va realitzar efectivament l'experiment?

b Per què creieu que els altres dos es van inventar els resultats?

4 a Escriviu un esdeveniment *segur*.

b Escriviu un esdeveniment *improbable*.

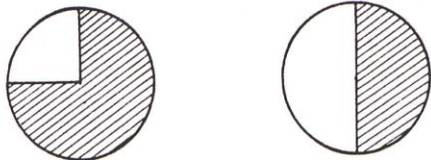
c Escriviu un esdeveniment *molt probable*.

d Escriviu un esdeveniment *impossible*.

e Suggeriu un número decimal per descriure la probabilitat de cadascun dels esdeveniments anteriors.

5 Heu d'escollir entre els obstacles següents:

- (i) Tirar dos daus equitatius i obtenir unes puntuacions que sumin. 6.
- (ii) Fer girar dues fletxes sobre aquestes ruletes de manera que assenyalin els sectors no ratllats.



a Com decidirieu quin és l'obstacle més senzill?

Respostes

- 1 a $1/6$ b $1/2$ c 0.
- 2 És millor un diagrama de barres amb les alçades *pròximes* a 20, 10, 10, 10, 10 que un que tingui exactament aquestes freqüències.
- 3 a La Carme.
b L'Anna dona massa *cincs*. En Bernat no dona cap variabilitat.
- 4 Des de (a) fins a (d) accepteu qualsevol resposta raonable. e 1; algun número entre 0 i 0,5; algun número entre 0,5 i 1; 0.
- 5 Provaria els dos obstacles un gran nombre de vegades i escolliria el que m'afavorís més (o compararia la freqüència relativa del segon obstacle amb la probabilitat del primer que és $5/36$, o compararia $5/36$ amb $1/8$ que és la probabilitat del segon).

Connexions amb altres unitats del projecte

Altres unitats del mateix nivell (nivell 1)

Treure un cinc
La pràctica ens ajuda a millorar
Plou o fa sol
Taules estadístiques

La loteria de la classe
Coneguem la nostra classe
Lleure i diversió

Unitats d'altres nivells que tracten una temàtica igual o semblant

Nivell 2 Gool! Jocs de fira

Nivell 3 Control de qualitat

Nivell Margarina o mantega? Mostres aleatòries

Aquesta unitat és particularment interessant en l'àrea de Matemàtiques.

Interconnexions entre els conceptes i les tècniques utilitzades en aquestes unitats

La taula que es presenta ens mostra aquestes interconnexions. El codi numèric que figura a l'esquerra fa referència als ítems detallats en el capítol 5 del llibre *L'Ensenyament de l'Estadística 11-16*.

Tot ítem que figuri a la columna *Pre-requisits estadístics* ha d'haver estat tractat abans d'abordar aquesta unitat. A la dreta, i a la mateixa alçada, s'indiquen les unitats que introdueixen aquesta idea o tècnica.

Els ítems que figuren a la columna *Idea o tècnica utilitzada* no s'introdueixen específicament ni tenen una atenció especial en la unitat. Poden figurar en un o més exemples i es tracten dins d'un context més general. No és necessari tenir un coneixement previ d'aquests ítems a l'hora de tractar la unitat. A les dues columnes de la dreta s'informa de la resta d'unitats que introdueixen o utilitzen aquests ítems i que poden ser presentades abans o després d'aquesta unitat.

Els ítems que figuren a la columna *Idea o tècnica introduïda* es tracten específicament en la unitat i, si es tracta d'una tècnica, es mostra el seu desenvolupament amb tot detall. A la columna de la dreta hi figuren les unitats que tracten aquests mateixos ítems.







Codi Num.	Pre-requisits estadístics	Introduïts a	
		Coneguem la nostra...	Plou o fa sol Lleure i diversió
2.1a	Construcció de taules de freqüència per a una variable	Treure un cinc	Taules estadístiques
2.2a	Diagrames de barres per a dades discretes	Treure un cinc	Lleure i diversió
	<i>Idea o tècnica utilitzada</i>	<i>Introduïda a</i>	<i>També utilitzada a</i>
1.2a	Utilització de dades discretes	Treure un cinc Coneguem la nostra... Plou o fa sol Jocs de fira	La loteria de la classe Taules estadístiques Lleure i diversió Control de qualitat
4.1a	Freqüència relativa d'un esdeveniment	Margarina o mantega?	Mostres aleatòries
5a	Lectura de taules	Treure un cinc La loteria de la classe Coneguem la nostra classe Plou o fa sol Lleure i diversió Taules estadístiques	Good!
5u	Inferències a partir de diagrames de barres	La loteria de la classe Good!	Plou o fa sol
5x	Comparació de valors actuals amb valors estimats	Jocs de fira Margarina o mantega? Mostres aleatòries	Plou o fa sol

Codi Num.	Idea o tècnica introduïda	També utilitzada a	
		La loteria de la classe Good! Margarina o mantega?	Plou o fa sol Control de qualitat
1.3e	Variabilitat entre mostres	La pràctica ens ajuda Jocs de fira	Plou o fa sol Control de qualitat
4.1e	La probabilitat en una escala ordinal	Jocs de fira	Margarina o mantega?
4.1c	Probabilitat com a límit esperat de freqüències relatives. Casos equiprobables	Treure un cinc Mostres aleatòries	Margarina o mantega?
4.1d	Probabilitat com a límit esperat de freqüències relatives. Casos no equiprobables	Good!	Margarina o mantega?
4.1e	Probabilitat en mostres aleatòries procedents de poblacions finites conegudes	Good!	Mostres aleatòries
4.1g	Assignació subjectiva de probabilitats	Margarina o mantega?	
4.1l	Biaix (per ex. en un dau trucat)	Treure un cinc	
4.1m	Aleatorietat i model de probabilitat uniforme	Plou i fa sol	Margarina o mantega?
4.1n	Probabilitat de combinacions d'esdeveniments (de forma intuïtiva)	Plou i fa sol	
4.1o	Recopil·le sistemàtic de resultats	Jocs de fira	Mostres aleatòries

Fulls
«R»

R2

Taula 6 Nombre de vegades que ha sortit cadascuna de les cares

	Recòmpte	Nombre de vegades
		
		
		
		
		
		

Taula 7 Lançament de dos daus - Suma dels resultats

Suma dels resultats	Les 10 partides		Resultats de la classe Frequència
	Recòmpte	Frequència	
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			