Planteamiento e interpretación de problemas contextualizados de extremos

Celia Giné de Lera
Jordi Deulofeu Piquet

Introducción y problema de investigación

Según Polya (1962), la principal finalidad de las matemáticas del currículum de secundaria es enseñar a los alumnos a PENSAR. Este "pensar" lo identificamos, al menos en una primera aproximación, con "la resolución de problemas", considerada de suma importancia en el currículum de matemáticas de nuestro país (Departament d'Educació, 2008). Además de una herramienta para aprender a "pensar matemáticamente", la resolución de problemas la consideramos, en sí misma, como un método de enseñanza: es la interacción con situaciones problemáticas la que hace que los alumnos construyan activamente su conocimiento (Vila y Callejo, 2004; Onrubia y otros, 2001).

Desgraciadamente, a menudo, como concluyen Guzman y Cuevas (2004), el día a día del aula no siempre funciona así, y las matemáticas tienden a ejercerse de una forma rutinaria y descontextualizada. Esto hace que cuando a los estudiantes se les propone resolver un problema no rutinario, o la solución del cual no obedece al esquema en el cual ha sido enseñado, apliquen los algoritmos de manera mecánica, llegando a soluciones inverosímiles y siendo incapaces de ver el error. Fue objetivo de nuestro estudio comprobar si esto pasaba con estudiantes de bachillerato de nuestro país, centrándonos, pero, en un tipo de problemas concretos: los problemas contextualizados de extremos.

Estos problemas pertenecen a los que Blanco (1993) denomina *problemas sobre situaciones reales*: problemas que plantean actividades lo más cercanas posible a situaciones reales que requieren el uso de habilidades, conceptos y procesos matemáticos. El método de aproximación a este tipo de problemas supone tres fases principales: la creación de un modelo matemático de la situación, la aplicación de técnicas matemáticas a este modelo y la traducción a la situación real para analizar su validez. Adaptándolas al esquema utilizado para la resolución de problemas contextualizados de extremos en bachillerato (J.I. del Blanco y otros, 1999), este método se concreta de la siguiente manera:

Creación de un modelo matemático de la situación

1. Seleccionamos y damos nombre a las variables.
2. Obtenemos la expresión de la función que queremos que alcance un valor extremo.
3. Si la función anterior se expresa con más de una variable, buscamos relaciones entre estas variables para poder expresar la función con una única variable.

Aplicación de técnicas matemáticas al modelo

4. Calculamos la derivada y obtenemos los valores que la anulan.

Traducción a la situación real para analizar su validez

5. Teniendo en cuenta el dominio de la función y los valores obtenidos en el paso anterior, determinamos los extremos absolutos ayudándonos, si hace falta, del signo de la segunda derivada.

Nuestro interés se centra en la primera i la última fase de las tres consideradas por Blanco, ya que, al ver qué hace el alumno en estas fases, podremos analizar si realmente "piensa" cuando resuelve un problema o si, por lo contrario, sólo aplica algoritmos de manera mecánica.

Con este propósito, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación: cuando proponemos un problema contextualizado de extremos a un estudiante de Bachillerato que ya tiene conocimientos sobre las derivadas y sus aplicaciones, ¿cómo intenta resolverlo?

Concretamente,

1. ¿Cómo crea un modelo matemático de la situación (abordaje)?
2. ¿Cómo traduce a la situación real la solución del problema para analizar su validez (interpretación)?

Metodología

Para responder a estas preguntas, se realizó un estudio exploratorio con 40 estudiantes de 2º de Bachillerato Científico y Tecnológico de un mismo instituto de Tarragona.

Los instrumentos para la obtención de datos fueron un protocolo de cinco problemas y un cuestionario, que describimos en los siguientes apartados.

Protocolo de problemas

La primera tarea consistió en diseñar problemas, a fin de poder responder a nuestras dos preguntas de investigación. Se decidió nombrar problemas de tipo 1 a los que tienen por objetivo explicar cómo los alumnos interpretan las soluciones obtenidas, y, de tipo 2, a los orientados a explicar cómo abordan el problema. Todos ellos se eligieron con una serie de características comunes:

- *Problemas sobre situaciones reales* (Blanco 1993).
- No necesariamente fáciles de plantear e interpretar, pero con funciones fáciles de derivar (no nos interesa que se encallen en esta fase).
- Con un nivel de dificultad similar al que poseen los problemas típicos de extremos que presentan los textos de Bachillerato y que se proponen en las PAU (Pruebas de Acceso a la Universidad).
- No necesariamente tendría que funcionar el método estándar de la derivada para resolverlos (resultará interesante ver la interpretación que hacen los alumnos del problema y si son capaces de ser creativos y utilizar otros métodos para encontrar la solución).

Adicionalmente, cada tipo de problemas cumplían los siguientes requisitos:

- Los *problemas de tipo 1* tenían que ser fáciles de plantear (por lo que les marcamos los pasos a seguir), pero la interpretación de los resultados debía ser vital para obtener la solución correcta. El primer problema (1.1) se creó a partir de textos de Bachillerato, y tiene la particularidad de que la solución debe ser un número natural (mientras que el máximo de la función a optimizar es un número decimal). El segundo problema (1.2.) se logró localizar en la literatura existente (Guzmán y Cuevas, 2004), y tiene la particularidad de que el máximo de la función se ubica en un extremo de su dominio de definición, dónde el método de la derivada no funciona. El hecho de coger el mismo problema que un artículo con fines similares a los nuestros (aunque no iguales) nos permitirá comparar los resultados.

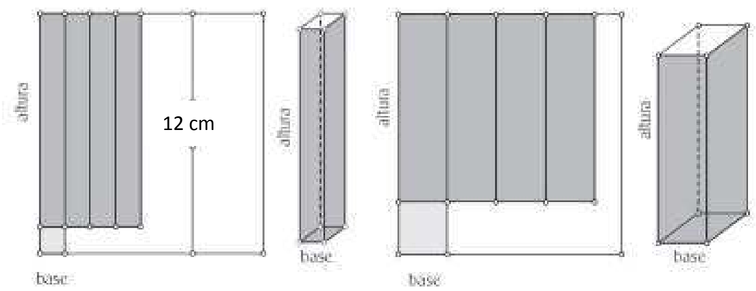
- En los *problemas de tipo 2* la dificultad debía radicar en el planteamiento del problema, donde la comprensión del contexto es imprescindible. Uno de los problemas (2.1) se creó a partir de textos de Bachillerato, y los otros dos (2.2., 2.3) se extrajeron de pruebas de acceso a la universidad (PAU) de años anteriores.

A continuación, exponemos el protocolo de problemas.

<u>PROBLEMA 1.1.</u> En una casa de payés alquilan las habitaciones a 100 € la noche. Con este precio, en una noche tienen 15 clientes. Los propietarios se han fijado en que, por cada 5 € que rebajan el precio por noche, tienen un cliente más.

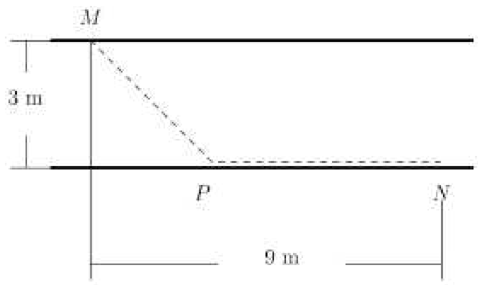
1. ¿Cuánto ganan por 1 noche cuando aún no han rebajado el precio? ¿Y cuando han hecho la rebaja de 5 € una vez? ¿Y cuando la han hecho dos veces?
2. Escribe la expresión que da los ingresos por noche I(x) en función del número de veces x que se rebaja 5 € el precio.
3. Elabora el gráfico de la función de ingresos I(x).
4. Acaba el problema de manera que puedas determinar qué condiciones se deben dar para obtener unos ingresos máximos.

<u>PROBLEMA 1.2.</u> Queremos construir una caja de base cuadrada sin tapa con una lámina cuadrada de 12 cm de lado, donde la base se encuentre en una esquina de la lámina como en la siguiente figura:



1. Escribe la expresión que da el volumen V(x) en función del lado de la base x.
2. ¿Qué valores puede tomar la base x?
3. Elabora el gráfico de la función volumen.
4. Determina el volumen máximo que se puede obtener.

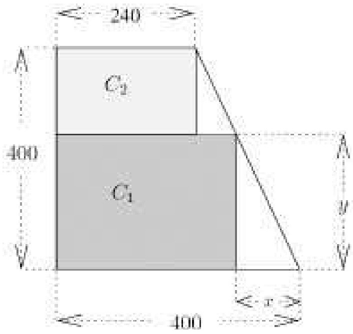
<u>PROBLEMA 2.1.</u> Un "perrito hambriento" (M) se encuentra a un lado de un río de 3 m de anchura, y ve un trozo de longaniza al otro lado (N). La situación es la siguiente:



La velocidad del perro por el agua (M-P) es de 4 m/s, y por tierra (P-N) de 5 m/s. ¿Cuántos metros deben recorrer el perro por cada medio para que el tiempo en llegar a la longaniza sea mínimo?

<u>PROBLEMA 2.2.</u> Un campo tiene forma de trapecio rectángulo, de bases 240 m i 400 m, y el lado perpendicular a las bases también es de 400 m. Se quiere partir tal como indica la figura para hacer

dos campos rectangulares C1 y C2. Llamamos x e y a los catetos de uno de los triángulos rectángulos que se forman.



1. Comprobad que $y = \frac{5}{2}x$
2. Utilizando la igualdad anterior, escribid la suma de las áreas de los dos campos en función de x.
3. El campo C1 se quiere sembrar con maíz y el campo C2 con trigo. Con el maíz se obtiene un beneficio de 0,12 € por m2 y con el trigo un beneficio de 0,10 € por m2. Determinad las medidas de cada campo para obtener el beneficio máximo.

PROBLEMA 2.3. Una fábrica de cerveza quiere construir latas cilíndricas de 300 cm3 de capacidad. El material de la superficie lateral cuesta 0,4 €/cm2 y el de las tapas 0,5 €/cm2. Además el tirador de la lata tiene un coste de 0,1 €. ¿Qué dimensiones (radio y altura) debe tener la lata para que el coste del material necesario para construirla sea el mínimo posible?

Cuestionario

Después de los problemas se pasó un cuestionario a los estudiantes con el fin de poder obtener mayor información sobre aspectos, como el reconocimiento del tipo de problemas y/o de los métodos utilizados, que con la resolución de los problemas podían quedar desapercibidos. Las preguntas del cuestionario fueron las siguientes:

1. ¿Crees que todos los problemas que has resuelto podrían estar en un mismo tema del libro de texto? ¿Qué título pondrías a este tema?
2. ¿Has resuelto todos los problemas de la misma manera? ¿Por qué?
3. Explica, en general, el método (o métodos) de resolución que has utilizado.
4. Justifica este método (o métodos).

Resultados

En un primer análisis el tratamiento de los datos fue cuantitativo y descriptivo: mediante un vaciado de los datos analizamos los aspectos que más nos interesaban de cada problema y del cuestionario.

En la siguiente tabla mostramos un resumen de los resultados más significativos de los problemas, donde A, B y C significan:

A. Obtienen correctamente la función a optimizar.
B. El método prevale a la interpretación según el contexto.
C. Usan el método estándar.

	Total	Con respuesta	Correctos	A	B	C
1.1.	40	40	17	23	4	6
1.2.	40	36	3	24	17	11
2.1.	40	32	0	3	3	10
2.2.	40	31	2	5	1	6
2.3.	40	33	4	12	1	10

Tabla 1: Resultados, en términos absolutos, del análisis cuantitativo de los problemas del protocolo

Y los resultados obtenidos mediante el cuestionario, fueron los siguientes:

A. Identifica los problemas de extremos.
B. Conoce el método estándar de resolución.
C. Justifica el método estándar de resolución.
D. Explicita otros métodos/heurísticas para resolver problemas.

Total alumnos	A	B	C	D
40	24	14	4	26

Tabla 2: Resultados, en términos absolutos, del análisis cuantitativo del cuestionario

Análisis cualitativo de datos: Tipologías de alumnos

El análisis cuantitativo expuesto en el apartado anterior de resultados nos dio un estado general en relación a las respuestas de los alumnos que nos llevó a hacer un estudio cualitativo más en profundidad, en el cual determinamos 8 tipologías diferentes de alumnos cruzando las variables siguientes:

1. Saben usar el método estándar. (Sí: 1, No: 0)
2. Plantean correctamente los problemas (tienen una base matemática aceptable). (Sí: 1, No: 0)
3. Interpretan las soluciones (usan razonamientos para contextualizarlas). (Sí: 1, No: 0)

Estas tipologías nos han permitido categorizar a los alumnos, así como analizar el papel que juegan las variables anteriores en las resoluciones y las relaciones entre ellas. A continuación presentamos un cuadro de las tipologías obtenidas, donde se ha añadido el número de alumnos identificados en cada una.

Tipología	1.Método	2.Planteamiento	3.Interpretación	40 alumnos
A	1	1	1	IIIII
B	1	1	0	III
C	1	0	1	IIII
D	1	0	0	IIII
E	0	1	1	III
F	0	1	0	I
G	0	0	1	IIIII
H	0	0	0	IIIIIIIIIIIIIII

Tabla 3: Tipologías de alumnos

En esta tabla podemos observar que totas las categorías, definidas a priori al cruzar las tres variables consideradas, tienen por lo menos un alumno, y que además la mayoría están equilibradas, exceptuando la H -que con el 37,5% de los alumnos, es con diferencia la más significativa-, y la F -que tiene solamente uno-. El hecho de que haya tantos alumnos que no se sepan el método, y no sepan plantear ni interpretar los problemas (tipología H), puede resultar a primera vista preocupante, pero se debe tener en cuenta que en el momento de recogida de datos no estaban dando este temario, y que no sabían que se les haría una prueba sobre problemas de extremos. El caso de la tipología F es de naturaleza distinta: resulta extraño encontrarse alumnos con una buena base matemática que desconozcan las técnicas enseñadas en clase y no apliquen razonamientos lógicos para interpretar los problemas.

Encontramos también interesante analizar cuantitativamente cada una de las variables por separado, con lo que obtuvimos los siguientes resultados:

- Saben usar el método estándar -tipologías A, B, C, D-: 40% de los alumnos
- Plantean correctamente los problemas (tienen una base matemática aceptable) -tipologías A, B, E, F-: 30% de los alumnos

- Interpretan las soluciones (usan razonamientos para contextualizarlas) -tipologías A, C, E, G-: 42,5 % de los alumnos

Conclusiones
Las conclusiones más significativas de nuestro trabajo se refieren una al abordaje de los problemas y la otra a su interpretación. Estas conclusiones nos llevan a formular algunos interrogantes sobre la educación matemática actual, y en particular sobre cómo se podría mejorar la acción docente para obtener mejores resultados.

1. Relación entre el uso del método estándar y el abordaje correcto del problema
Los problemas de tipo 1 son planteados en un 40% mediante el método estándar, aunque sólo el 30% de los abordajes correctos lo usan. El método estándar no tiene una influencia significativa sobre el abordaje de los problemas de tipo 1. Sí la tiene en el abordaje de los de tipo 2. En estos, el 60% de los alumnos que los abordan usan el método estándar y los plantean correctamente sólo alumnos que han utilizado dicho método. Los siguientes dos gráficos muestran de una manera más clara esta tendencia:

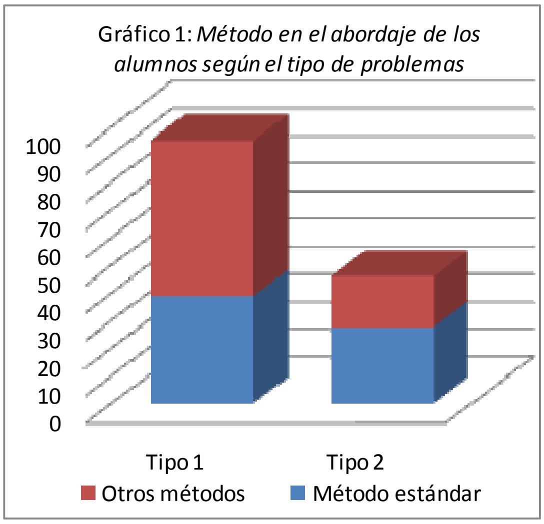


Gráfico 1: *Método en el abordaje de los alumnos según el tipo de problemas*

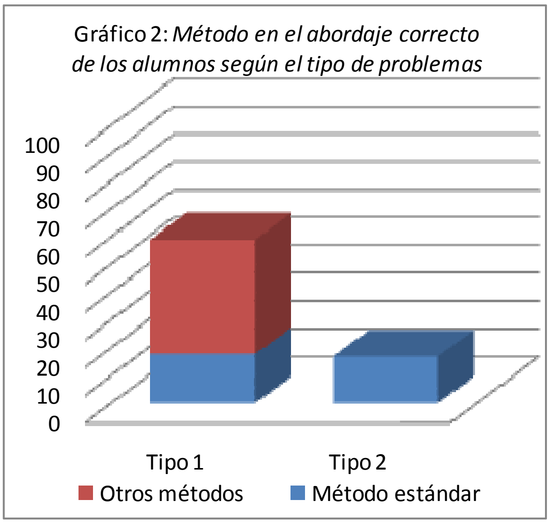


Gráfico 2: *Método en el abordaje correcto de los alumnos según el tipo de problemas*

Además de estar al alcance de muchos más alumnos a la hora de abordarlos, los problemas de tipo 1 han dado mucho más juego en cuanto a diferentes formas de resolverlos, no siendo imprescindible el método estándar para encontrar la solución correcta (aunque sí una buena comprensión del problema en su contexto). Estos problemas son justamente los que no hemos obtenido de las PAU (Prueba de Acceso a la Universidad), y tampoco abundan en los libros de texto. Tal hecho pone de manifiesto que los problemas de extremos de esta prueba a menudo pueden resolverse solamente con el método estándar, y que éste da siempre la respuesta correcta. En consecuencia, la mayoría de profesores enseñan en clase problemas con estas características. A pesar de ello, los alumnos tampoco escogen estos problemas en las PAU (Miralles, 2009). *¿Qué sucedería con los resultados de las PAU si en ellas se incluyeran problemas de tipo 1 y si los profesores incluyeran en su acción docente problemas contextualizados de extremos, tanto antes como después de la instrucción sobre los métodos para resolver dichos problemas?*

2. Relación de la capacidad interpretativa de los alumnos con las otras variables (base matemática y conocimiento del método estándar)
Basándonos en los resultados obtenidos en los dos problemas de tipo 1 (donde era más fácil analizar la comprensión del contexto) y las tipologías con las que hemos categorizado cada alumno, obtenemos el siguiente gráfico:

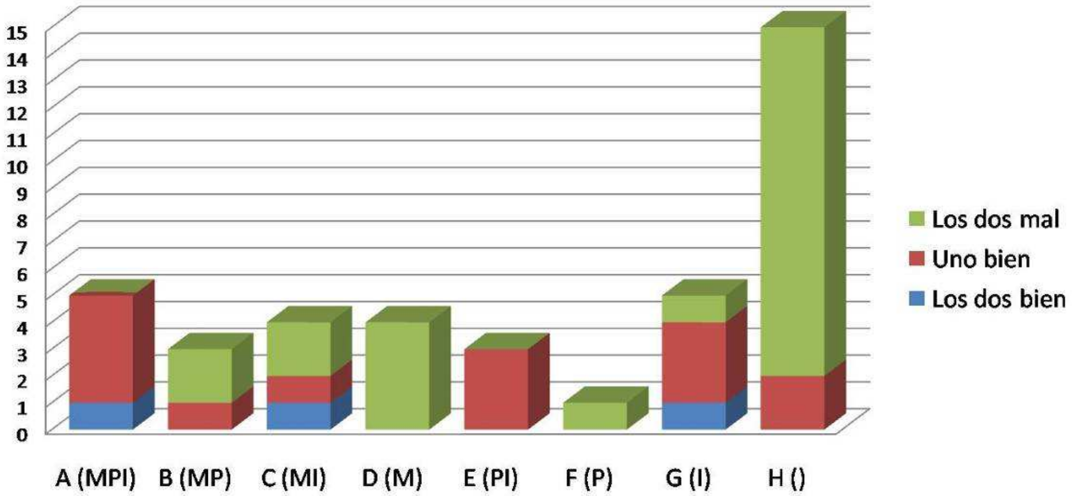


Gráfico 3: Resultados, en términos absolutos, de los problemas de tipo 1 para cada tipología de alumno

Recordemos las variables que nos definen las tipologías:
- M: Saben usar el método estándar.
- P: Plantean correctamente los problemas (tienen una base matemática aceptable).
- I: Interpretan las soluciones (usan razonamientos para contextualizarlas).

Como podemos observar en el gráfico, *el hecho de haber solucionado los problemas de tipo 1 correctamente* –para los que, obligatoriamente, han debido interpretar su solución-, *es independiente de la base matemática de los alumnos o del conocimiento que tengan del método estándar.*

Esta afirmación cuestiona la conclusión de Guzmán y Cuevas (2004), según la cual *debido a que los estudiantes están entrenados para desarrollar procesos algorítmicos, cuando se les propone un problema no rutinario donde el algoritmo no da directamente la solución,* no saben interpretarlo. De acuerdo con nuestro estudio, esto sólo será válido para las tipologías de alumnos B y D (que no son mayoritarias).

El hecho de habernos encontrado muchos alumnos con capacidad para interpretar los problemas, pero que no tenían una base matemática suficiente o no conocían el método estándar –a pesar de haberlo trabajado en clase- , nos lleva a formularnos algunas preguntas respeto nuestra práctica docente diaria: *¿No deberíamos aprovechar mejor estas capacidades? ¿Deberíamos introducir la resolución de problemas no rutinarios en clase de matemáticas, de manera que permitieran desarrollar el ingenio de los alumnos y despertar su curiosidad por las matemáticas?*

Referencias

Blanco, J. I., Busquets, O., Castañer, C., & Vicenç, F. (1999). Matemàtiques 2 : batxillerat : modalitat ciències de la naturalesa i de la salut / tecnologia. Barcelona: Editorial Barcanova.

Blanco, L. (1993). Una clasificación de problemas matemáticos. Epsilon , 25, 49-60.

Departament d'Educació (2008). Currículum de Matemàtiques de Batxillerat. DOG nº 5183. Generalitat de Catalunya.

Guzmán, S. M., & Cuevas, C. A. (2004). Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el cálculo diferencial. Educación Matemática , 16 (002), 93-104.

Miralles, J., & Deulofeu, J. (2009). Dificultad subjetiva de la prueba de Matemáticas de las PAU; ¿Qué eligen los alumnos? El ejemplo de Catalunya 2007. XIV JAEM. Girona.

Onrubia, J., Rochera, M., & Barberà, E. (2001). La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva psicológica. A C. Coll, J. Palacios, & A. Marchesi, Dessarrollo psicológico y educación 2 (p. 487-508). Madrid: Alianza.

Polya, G. (1962). Mathematical Discovery. New York: John Wiley and Sons.

Vila, A., & Callejo, M. L. (2004). Matemáticas para aprender a pensar : el papel de las creencias en la resolución de problemas. Madrid: Narcea.

(*)Esta investigación se ha realizado en el marco del grup de recerca consolidat de la Generalitat de Catalunya *Educació i Competència Matemàtica * (PREMAT, 2009-SGR-364) ,y ha contado con la financiación del proyecto financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación *Detección y análisis de factores de influencia en la discontinuidad del aprendizaje matemático entre las etapas de la educación primaria y secundaria *(EDU 2009-07298).