Guia didàctica de la Matemàtica universitària

CÀLCUL FUNCIONAL: INTRODUCCIÓ A LES FUNCIONS

Carles Cassú, Joan Bonet, Xavier Bertran, Joan Carles Ferrer

Universitat de Girona
Departament d'Economia

CIP 517.9 CAL

Càlcul funcional : introducció a les funcions / Carles Cassú ... [et al.]. - Girona : Servei de Publicacions de la Universitat de Girona, 1995. - p. ; cm. – (Guia didàctica de la matemàtica universitària ; 9)
ISBN 84-88762-21-6
I. Cassú, Carles II. Universitat de Girona. Departament d'Economia
1. Anàlisi funcional 2. Anàlisi funcional - Problemes, exercicis, etc.
CIP 517.9 CAL

XBPD 0064-25560 1/1

Primera edició: abril de 1995
Segona edició: desembre de 1995

Amb la col·laboració del Comissionat per a Universitats i Recerca i del Departament de Cultura de la Generalitat de Catalunya

Edita: Servei de Publicacions de la Universitat de Girona

Assessorament lingüístic: Servei de Normalització Lingüística de la Universitat de Giro

Universitat de Girona
Edifici Les Àligues
Pl. Sant Domènec, 3
17071 Girona
Tel. (972) 41 82 06 - Fax (972) 41 80 31

ISBN: 84-88762-21-6
Dipòsit legal: GI-1589-95

Carles Cassú és doctor en Ciències i catedràtic d'Escola Universitària de la UdG. Joan Bonet, Xavier Bertran, i J. Carles Ferrer són llicenciats en Ciències Matemàtiques i professors titulars d'Escola Universitària del Departament d'Economia de la UdG.

PRÒLEG

Oferim als estudiants universitaris i als lectors interessats aquesta guia didàctica de la matemàtica universitària com a fruit dels nostres anys de docència de les matemàtiques a la Universitat. El resultat final ha esdevingut una col.lecció de setze petits volums agrupats en els dos mòduls d'Àlgebra lineal i de Càlcul infinitesimal.

Per raons de contingut, el mòdul d'Àlgebra lineal s'ha subdividit en les tres parts corresponents d'Àlgebra moderna (dos volums: Conjunts i Estructures), Àlgebra matricial (tres volums: Matrius, Determinants i Sistemes d'equacions) i Àlgebra Vectorial (tres volums: Vectors, Endomorfismes i Geometria analítica), i el mòdul de Càlcul infinitesimal agrupa les tres parts corresponents a Càlcul funcional (dos volums: Funcions i Continuïtat), Càlcul diferencial (quatre volums: Derivades, Corbes, Derivades parcials i Optimització) i Càlcul integral (dos volums: Integrals i Equacions diferencials).

Pensem que l'estudi de les lliçons incloses en aquest volum de *Càlcul funcional: introducció a les funcions*, és interessant per fer un repàs de molts conceptes ja vistos en l'ensenyament secundari, però que considerem indispensables per entendre bé els nous temes de càlcul funcional que ens proposem desenvolupar en els propers volums.

Creiem que, en l'estudi de la Matemàtica, l'alumne universitari podrà servir-se d'aquesta guia didàctica tant per a la confecció dels seus propis apunts com per a l'estudi dels diferents temes que conformen les assignatures corresponents a les matèries tractades. Per aquest motiu es presenta una breu *Bibliografia escollida* classificada en bàsica i addicional, segons el grau de dificultat que presenta.

Exposem el *Programa* i la *Simbologia*, on indiquem els conceptes que l'integren, conjuntament amb el simbolisme que farem servir al llarg de l'obra. Hem procurat fer un programa racional en què els conceptes es van deduint els uns dels altres de manera lògica.

En cada volum es destaca especialment el contingut en *Conceptes* i *Exemples*, de gran importància per a la comprensió de les matèries tractades, en les quals, sovint, es prescindeix de demostracions formalistes d'acord amb l'esperit de l'obra, que, com el seu títol indica, pretén ser una guia didàctica.

A continuació presentem una *Formulació matemàtica*, expressada en símbols formals dels conceptes estudiats, que ajudaran, sens dubte, a la rigorositat en la resolució de qüestions i problemes.

Continuem el desenvolupament amb la part dedicada a l'estudi de *Problemes resolts*. És important que l'estudiant comprengui fins l'últim detall aquests problemes, que, en realitat, són una continuïtat en grau de dificultat dels exemples senzills estudiats anteriorment.

Presentem després una col.lecció de *Problemes proposats*, amb la intenció que el lector els resolgui de manera natural mitjançant els coneixements adquirits als apartats anteriors.

A l'apèndix s'inclou una *Prova d'autoavaluació* que consta d'una sèrie de "problemes parametritzats", és a dir, problemes que depenen d'un paràmetre (a=1,2,3,4). Per a cada valor del paràmetre la solució serà diferent i estarà inclosa entre alguna de les vuit possibles. Aquest tipus de problemes es podrà resoldre quatre vegades amb números diferents.

Finalment, a més de la *Bibliografia escollida*, un *Glossari* de tots els conceptes matemàtics exposats al llarg de l'obra en facilita la ràpida localització.

Girona, novembre de 1995

Els autors

Introducció a les funcions

Capítol 1: **Funcions reals de variable real**

a) BIBLIOGRAFIA ESCOLLIDA

Bàsica:

AYRES, F. *Fundamentos de Matemáticas Superiores.* P16/23.

ALEGRE, P. *Ejercicios resueltos de Matemáticas Empresariales.* P257/262.

GARCÍA CASTRO, F. *Cálculo Infinitesimal, I-1.* P32/40.

THOMAS ARA, L. *Cálculo.* P64/66.

DELGADO, M. *Matemáticas: Álgebra, Cálculo, Geometría y Probabilidad.* P169/171 i P176/178.

RODRIGUEZ, A. *Matemáticas para Economistas. Tomo II.* P429/434.

DÍAZ HERNANDO, J.A. *Álgebra, Geometría y Cálculo. Tomo IV.* P119/126.

Addicional:

SAMAMED, O. *Matemáticas 1. Economía y Empresa. Teoría.* P392/410.

REY PASTOR, J. *Análisis Matemático. Tomo I.* P353/358.

PISKUNOV, N. *Cálculo Diferencial e Integral.* P8/11.

BERMAN, G.N. *Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático.* P1/17.

b) PROGRAMA I SIMBOLOGIA

1.1 CARACTERÍSTIQUES DE LES FUNCIONS

1) **Funció real de variable real.** Relació de dependència, funció (f, g, ...). Funcions vectorials, de varies variables i reals de variable real. Conjunt de les funcions ($\mathfrak{F}$). Forma explícita, variable dependent o element imatge (y), variable independent o el. original (x). Forma implícita.

2) **Funcions uniforme i multiforme.** Correspondència i aplicació. Conjunts inicial i final. Funció restringida (f_A). Funció multiforme, branques. Funció uniforme.
3) **Domini i recorregut d'una funció.** Grafo (G). Domini o conj. d'existència (D(f)), recorregut o conj. imatge (R(f)).
4) **Gràfica d'una funció.** Corba o gràfica. Coordenades d'un punt: abscissa (x) i ordenada (y). Eixos coordenats: d'abscisses (X) i d'ordenades (Y).
5) **Creixement i acotació en un interval.** Monotonia. Funció constant, estrictament creixent i estrict. decreixent. Intervals de creixement i de decreixement. Funcions creixent i decreixents. Funcions acotades inferiorment i superiorm., cotes inferior (k_i) i superior (k_s). F. acotada.

1.2 OPERACIONS ELEMENTALS AMB FUNCIONS

1) **Operacions amb funcions.** Operació ($\otimes$). Domini comú (A). Igualtat de funcions.
2) **Suma de funcions.** Funció suma (f+g). Propietats, funcions nul·la (f_0) i oposada (-f), grup abelià. Diferència de funcions (f-g).
3) **Producte de funcions.** Funció producte (f·g). Propietats, funcions unitat (f_u) i recíproca (1/f), anell commutatiu i unitari. Quocient de funcions (f/g).
4) **Producte d'un escalar per una funció.** Escalar (λ), funció producte per un escalar (λ.f). Propietats, espai vectorial.

1.3 COMPOSICIÓ DE FUNCIONS

1) **Funció composta.** Funció composta (f•g), condició de composició. Propietats.
2) **Funció inversa.** Funció identitat en un conjunt (i_A), funció inversa (f^{-1}), condicions d'existència. Regla pel càlcul de la inversa. Propietats.
3) **Representació de funcions compostes.** Translació, homotècia, oposició i valor absolut.

c) CONCEPTES I EXEMPLES

1.1 CARACTERÍSTIQUES DE LES FUNCIONS

1.1.1 FUNCIÓ REAL DE VARIABLE REAL. En les diferents branques de la ciència ens trobem sovint amb certes relacions entre algunes magnituds. És a dir, hi ha una dependència entre alguns conceptes mesurables que es pot expressar numèricament.

D'aquesta *relació de dependència*, en direm *funció*. En general, simbolitzarem les funcions per les lletres f, g i h, i les magnituds, o *variables*, per x, y, z i t. Així, si posem z=f(x, y), voldrà dir que la variable z depèn tant de la x com de la y.

Exemple 1. En l'estudi dels gasos perfectes, és coneguda la relació P.V/T=k, on P és la pressió, V el volum, T la temperatura (absoluta) i k una constant. D'aquí es dedueix que P=k.T/V i, físicament, diem que la pressió és directament proporcional a la temperatura i inversament proporcional al volum.

Matemàticament, direm que la pressió és funció de la temperatura i del volum. Ho podem escriure com a P=f(T, V).

També pot donar-se el cas que una nova variable, t, depengui de x i de y, t=g(x, y), i que es vulgui fer un estudi simultani de les dues funcions. Podríem posar (z, t)=(f(x, y), g(x, y)), o bé (z, t)=h(x, y). Ls funcions d'aquests tipus les anomenarem *funcions vectorials*, ja que les variables independent (x, y) i dependent (z, t) són vectors. Com que els vectors són de R^2, ho indicarem com a h: $R^2 \rightarrow R^2$.

Com a cas particular, les funcions del tipus z=f(x, y), on els valors de la variable independent s'expressen per un vector i els valors de la dependent per un nombre real, en podríem dir funcions reals de variable vectorial, encara que en direm *funcions de varies variables*. En farem l'estudi més endavant.

Exemple 2. La funció P=f(T, V) és una funció de dues variables. Si suposem també que la densitat del gas, D, depèn de la temperatura i el volum, D=g(T, V), podem escriure en una mateixa expressió les dues funcions, (P, D)=(f(T, V), g(T, V)), o més simplement, (P, D)=h(T, V). Aquesta funció és un exemple de funció vectorial de variable vectorial: el vector (P, D) depèn del vector (T, V).

Particularitzarem en aquest capítol la nostra anàlisi en les funcions f: R→R, que tenen una variable independent i una variable dependent. Aquestes funcions s'anomenen *funcions reals de variable real*, encara que en direm simplement funcions. El *conjunt de les funcions* f: R→R el simbolitzarem per $\mathcal{F}$.

Si la funció és del tipus y=f(x), direm que és donada en *forma explícita*, així indicarem que la *variable dependent* y està aïllada en el primer membre i que en el segon hi ha una expressió en la *variable independent* x. La y és l'*element imatge* i la x l'*element original*.

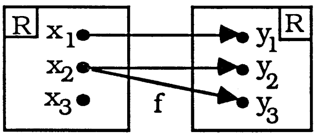
Si no es presenta la variable independent aïllada i tenim la funció escrita com a F(x, y)=0, en direm *forma implícita* de la funció.

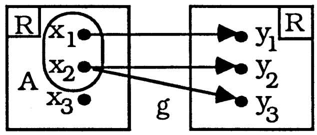
Exemple 3. Sabem que la funció P=f(T, V) indica la relació P=k.T/V. Veiem que és una funció de dues variables independents, però si fem que la temperatura romangui sempre constant, podrem escriure P=(k.T)/V=K/V, on K=k.T és una nova constant.

La funció obtinguda P=K/V és una funció real de variable real, P=f(V), i està escrita en forma explícita, ja que la variable dependent P està aïllada. Si en lloc de P=K/V poséssim P.V=K (o també P.V-K=0), diríem que està escrita en forma implícita.

1.1.2 FUNCIONS UNIFORME I MULTIFORME. Si f: R→R és una funció real de variable real, la podem considerar com una *correspondència* definida en el conjunt dels nombres reals. Recordem, a més, que una correspondència es diu *aplicació* si a cada element del *conjunt inicial* li correspon un sol element del *conjunt final*.

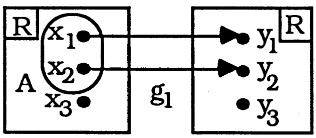
En la figura següent, on representem només tres elements del conjunt R, la funció f no és cap aplicació per dos motius: x_3 no té imatge i a x_2 li corresponen dues imatges,

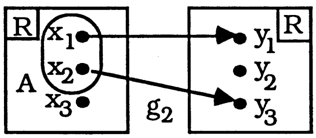




Podem resoldre la primera dificultat restringint el conjunt inicial R al subconjunt A={x_1, x_2}. Amb aquest procés de *restricció d'una funció*, obtenim una nova funció g: A→R, que anomenem *funció restringida*, i que també podríem escriure com a f_A.

La funció g continua essent una correspondència que no és aplicació, ja que l'element x_2 té dues imatges. Pel fet que g té elements amb més d'una imatge, en direm *funció multiforme* i, evidentment, no és aplicació. Si descomponem la funció g en dues funcions g_1 i g_2 on $g_1(x_2)=y_2$ i $g_2(x_2)=y_3$, tal com indiquem a la figura:





tenim aleshores que les funcions g_1 i g_2 són aplicacions. Les anomenem *branques de la funció multiforme*. Si una funció f_A és aplicació en direm *funció uniforme*, ja que cada element de A tindrà una sola imatge.

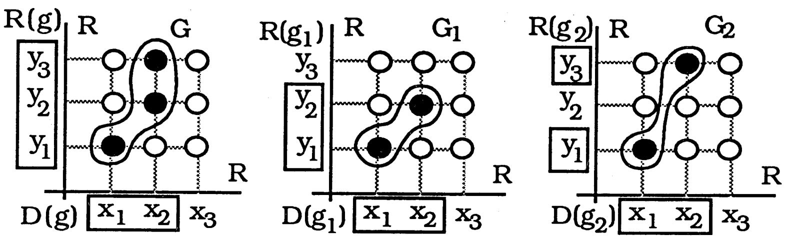
Exemple 4. Donada la funció $y=x^2$, com que per a cada valor de x li correspon un sol valor de la y, és una aplicació o funció uniforme.

En canvi, a partir de la funció implícita $y^2-x=0$ tenim $y=\pm\sqrt{x}$. Veiem que és una funció multiforme: no és aplicació. Si restringim el conjunt inicial al dels reals no nuls, A=(0,+∞), podem descompondre la funció en dues branques $y=+\sqrt{x}$ i $y=-\sqrt{x}$.

1.1.3 DOMINI I RECORREGUT D'UNA FUNCIÓ. En l'Àlgebra moderna vam estudiar el grafo associat a una correspondència. Donada la correspondència g: R→R de l'apartat anterior, on $g(x_1)=y_1$, $g(x_2)=y_2$ i també $g(x_2)=y_3$, podem apuntar el seu grafo G com el conjunt de parelles del conjunt producte $R\times R=R^2$ de tal manera que el primer terme és l'element original x i el segon l'element imatge y:

$$G=\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_2, y_3)\}$$

En la figura següent hem dibuixat el grafo G de la correspondència o funció multiforme g, conjuntament amb els grafos G_1 i G_2 de les funcions uniformes g_1 i g_2, que són les dues branques de g:



Observem que, si una funció és multiforme, hi ha alguna recta vertical que talla el grafo en dos o més punts, mentre que si és uniforme només la talla com a màxim en un sol punt.

Donada una funció f, anomenem *domini* (o *conjunt d'existència*), i el simbolitzem per D(f), el conjunt format per tots els elements originals que tenen imatge.

Anomenem *recorregut* (o *conjunt imatge*), i el simbolitzem per R(f), el conjunt dels elements del conjunt final que són imatge d'algun element del conjunt inicial.

Exemple 5. En la funció g, definida pel grafo anterior G, veiem que els elements originals són x_1 i x_2 (x_3 no té imatge). Per tant, el seu domini és $D(g)=\{x_1, x_2\}$. El mateix domini tenen les funcions g_1 i g_2.

El recorregut és $R(g)=\{y_1, y_2, y_3\}$, ja que tots tres són elements imatge. Per a les altres dues funcions g_1 i g_2, tenim $R(g_1)=\{y_1, y_2\}$ i $R(g_2)=\{y_1, y_3\}$.

1.1.4 GRÀFICA D'UNA FUNCIÓ. En general, les funcions f: R→R que estudiarem estan formades per un nombre infinit de punts i, així, el seu grafo G no està format per punts aïllats, sinó que determinen una *corba* que anomenem *gràfica de la funció.*

Podrem escriure el grafo com a $G=\{(x, y)\in R^2 \;/\; x\in D(f) \;\wedge\; y=f(x)\}$. Les parelles (x, y) seran en realitat els punts de la funció i les anomenem *coordenades del punt.* A la x, li diem *abscissa* i a la y, *ordenada.*

A més, els dos conjunts R i R que formen el producte cartesià R^2 (les rectes horitzontal i vertical) on s'ha definit el grafo, en direm *eixos coordenats*: l'horitzontal és l'*eix d'abscisses* o eix X i el vertical, l'*eix d'ordenades* o eix Y.

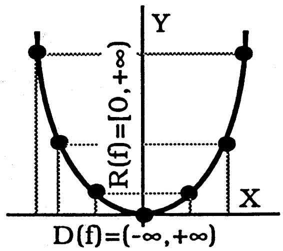
Per dibuixar aproximadament la corba, busquem la imatge d'un nombre finit de punts que constitueixen, per tant, un subconjunt del grafo. Amb aquest subconjunt de parells de R^2, construïm una *taula de valors* de la funció.

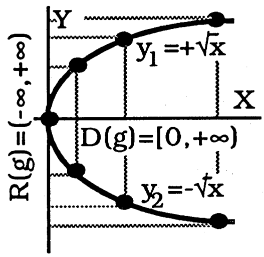
Exemple 6. Siguin les funcions $f(x)=x^2$ i $g(x)=\sqrt{x}$. Donant valors a la x podem formar unes petites taules de valors:

x	0	±1	±2	±3...
f(x)	0	1	4	9...

x	0	1	4	9...
g(x)	0	±1	±2	±3...

Dibuixem aquests punts en el pla coordenat i podrem construir les gràfiques de les funcions:





La primera funció, una paràbola d'eix vertical, és una funció uniforme, ja que tota recta vertical talla la corba en un sol punt. Observem, a més, que no és una aplicació exhaustiva perquè podem trobar rectes horitzontals que no tallen la corba (les que estan per sota de l'eix X), i tampoc no és una aplicació injectiva, ja que hi ha rectes horitzontals que tallen la corba en dos punts.

La segona funció, una paràbola d'eix horitzontal, no és funció uniforme (hi ha rectes verticals que tallen la corba en dos punts) i en diem funció multiforme, està composta per dues branques: una al primer quadrant i l'altra al quart.

En cada gràfica també hem assenyalat el domini i el recorregut, on el primer es defineix en l'eix X i el segon en l'eix Y.

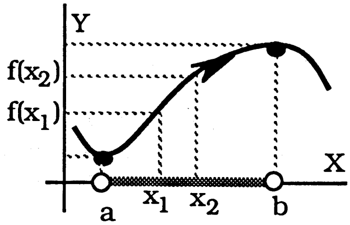
1.1.5 CREIXEMENT I ACOTACIÓ EN UN INTERVAL. Sigui la funció uniforme $y=f(x)$, que, per tant, tindrà una sola imatge per a cada element del seu domini D(f), i considerem un interval (a, b) contingut en el seu domini. Estudiarem la *monotonia de la funció*, és a dir, si es tracta d'una funció constant, creixent o decreixent en aquest interval:

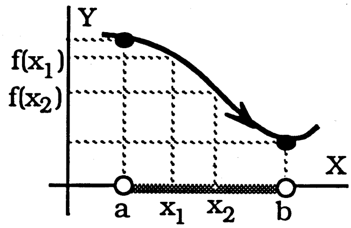
FUNCIÓ CONSTANT. Direm que $y=f(x)$ és una *funció constant* en l'interval (a, b) si per a dos elements qualssevol d'aquest interval, x_1 i x_2, es verifica $f(x_1)=f(x_2)$. És clar que la seva gràfica és una recta horitzontal.

FUNCIÓ ESTRICTAMENT CREIXENT. Direm que $y=f(x)$ és una *funció estrictament creixent* en l'interval (a, b) si per a dos elements qualssevol x_1 i x_2, on $x_1<x_2$, d'aquest interval, es verifica que $f(x_1)<f(x_2)$.

FUNCIÓ ESTRICTAMENT DECREIXENT. De manera similar, direm que $y=f(x)$ és una *funció estrictament decreixent* en l'interval (a, b) si per a dos elements qualssevol x_1 i x_2, on $x_1<x_2$, d'aquest interval, es verifica que $f(x_1)>f(x_2)$.

Fem un esquema d'aquestes dues funcions per comprendre millor la definició:





Observem en la primera que, perquè una funció sigui estrictament creixent, voldrà dir que en augmentar el valor de la x, augmenta també el de la seva imatge f(x). En la funció estrictament decreixent, en augmentar el valor de la x, disminueix el de la imatge f(x).

De l'interval en què la funció és estrictament creixent, en direm *interval de creixement*. Anàlogament, l'*interval de decreixement* és l'interval en què la funció és estrictament decreixent.

Exemple 7. La funció $y=x^2$, dibuixada en l'exemple anterior com una paràbola vertical, té per interval de creixement el $(0, +\infty)$ i per interval de decreixement el $(-\infty, 0)$.

Per poder parlar de creixement o decreixement en la funció multiforme $y=\sqrt{x}$, representada per una paràbola horitzontal, haurem de descompondre-la primer en les seves dues branques $y=+\sqrt{x}$ i $y=-\sqrt{x}$. La primera branca és estrictament creixent en l'interval $(0, +\infty)$, mentre que la segona és estrictament decreixent en el mateix interval.

En un sentit més ampli, direm que una funció $y=f(x)$ és una *funció creixent* (o *monòtona creixent*) en un interval (a, b), si per dos elements x_1, x_2 qualssevol d'aquest interval, on $x_1<x_2$, es verifica que $f(x_1)\leq f(x_2)$.

Anàlogament, direm que $y=f(x)$ és una *funció decreixent* (o *monòtona decreixent*) en un interval (a, b), si per dos elements x_1, x_2 qualssevol d'aquest interval, on $x_1<x_2$, es verifica que $f(x_1)\geq f(x_2)$.

Exemple 8. En la funció $y=f(x)$ definida en $(0, 10)$ per intervals per $y=(x/2)^3$ si $x\leq 4$, $y=8$ si $4<x<8$ i $y=-48+15x-x^2$ si $x>8$, dibuixada a la dreta, tenim els següents intervals de monotonia:

Estrictament creixent: $(0, 4)$

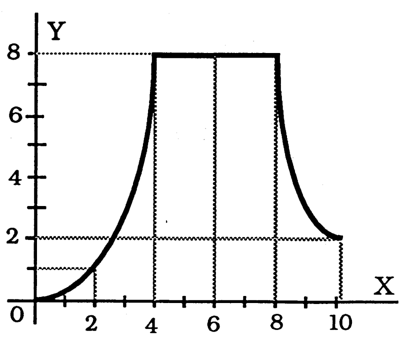
Constant: $(4, 8)$

Estrictament decreixent: $(8, 10)$

I en un sentit ampli, tenim:

Mon. creixent: $(0, 8)$

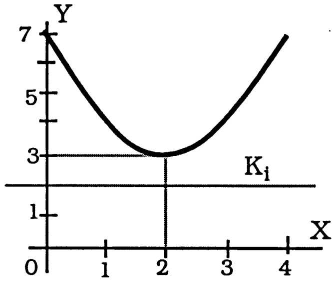
Mon. decreixent: $(4, 10)$.

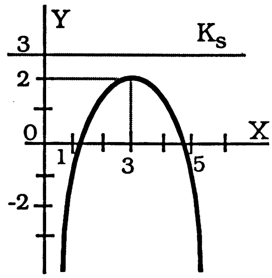


A continuació definim el concepte de *funció acotada* (o també *funció afitada*). Direm que una funció y=f(x) és una *funció acotada inferiorment* en un interval (a, b) si existeix un nombre real k_i, anomenat *cota inferior*, tal que les imatges dels elements de l'interval són sempre superiors a aquesta cota. És a dir, si $a<x<b$ es verifica que $f(x) \geq k_i$.

Anàlogament, y=f(x) és una *funció acotada superiorment* en (a, b) si existeix un nombre real k_s, anomenat *cota superior*, de manera que la imatge de tot x de l'interval és sempre inferior o igual a aquest valor. Per tant, si $a<x<b$ tenim $f(x) \leq k_s$.

Exemple 9. Si construïm taules de valors corresponents a les funcions $f(x)=x^2-4.x+7$ i $g(x)=-x^2+6.x-7$ i en dibuixem la gràfica, veurem que la primera és una funció acotada inferiorment en tot R. Una cota inferior pot ser $k_i=2$. També poden ser cotes inferiors $k_i=1$, $k_i=0$, etc. Veiem que la cota inferior més gran és $k_i=3$. La funció no és acotada superiorment, però si la restringim en l'interval (0, 4), són cotes superiors tots els números reals superiors o iguals a 7.

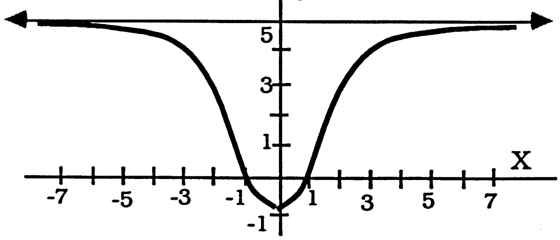




Observem que la segona funció y=g(x) és acotada superiorment en tot R. Les cotes superiors poden ser $k_s=3$, $k_s=4$, etc. on la cota superior més petita és $k_s=2$. No és acotada inferiorment, però restringint l'interval d'estudi al (1, 5), com que $g(1)=g(5)=-2$, observem que són cotes inferiors tots els nombres reals inferiors o iguals a -2.

Quan una funció y=f(x) en un interval (a, b) és a la vegada acotada inferiorment i superiorment, direm simplement que és una *funció acotada* en aquest interval. Reunint les dues condicions anteriors, si $a<x<b$, haurà de passar que $k_i \leq f(x) \leq k_s$.

Exemple 10. Les funcions de l'exemple anterior no són acotades en R, però sí que ho és la funció $h(x)=5.(x^2-1)/(x^2+1)$ que té per gràfica:



Són cotes inferiors tots els nombres reals inferiors o iguals a -1 i són cotes superiors tots els nombres reals superiors o iguals a 5.

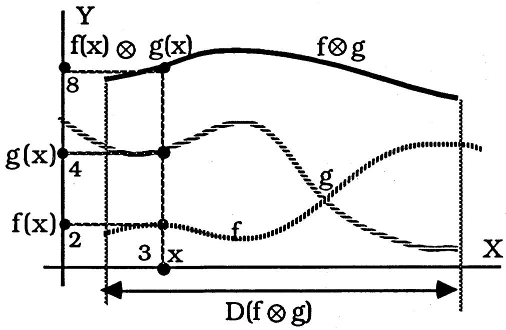
1.2 OPERACIONS ELEMENTALS AMB FUNCIONS

1.2.1 OPERACIONS AMB FUNCIONS. Siguin f, g∈$\mathcal{F}$ dues funcions reals de variable real, f,g: R→R, que tenen per dominis respectius D(f) i D(g). Veurem a continuació l'*operació de funcions*, operació que podrà ser de suma, producte, multiplicació per un escalar i composició.

En general, designem una operació amb el símbol ⊗, i així f⊗g és una nova funció, on el seu domini és, en general, un subconjunt de la intersecció dels dos dominis, ja que la determinació de la imatge (f⊗g)(x) es farà a partir de les imatges f(x) i g(x). Designarem per A aquest *domini comú*. Podem escriure, doncs,

$$A=D(f\otimes g) \quad , \quad A\subseteq D(f)\cap D(g)$$

La nova funció f⊗g la construirem a partir de les funcions originals, f i g, seguint la regla donada per la definició de l'operació.



Així, si, com farem en el cas de la suma i el producte, utilitzem la regla següent:

(f⊗g)(x)=f(x)⊗g(x),

aleshores dibuixarem les dues funcions originals i després, punt a punt, calcularem els punts de la nova funció.

Exemple 11. Si es tracta del producte de funcions (·), i si per exemple en x=3 tenim f(3)=2 i g(3)=4, tindrem (f·g)(3)=f(3).g(3)=2.4=8. Per tant, en la funció producte la imatge del 3 serà el 8.

Abans d'entrar en l'estudi concret de cada una de les operacions entre funcions, direm que es verifica la *igualtat de funcions*, és a dir, que f=g, si per cada valor de x tenim f(x)=g(x). Lògicament, si els dominis són diferents D(f)≠D(g), la igualtat de funcions només es verifica en la restricció en el seu domini comú.

Exemple 12. Les dues funcions irracionals aparentment són iguals, perquè "l'arrel d'un quocient és igual al quocient de les arrels":

$$f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x-3}} \quad i \quad g(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-3}}$$

Però es veu clarament que no tenen el mateix domini, ja que per x=0 la primera existeix i la segona no. Si en calcules els dominis, trobaràs D(f)=(-∞, 1]∪(3, +∞) i D(g)=(3, +∞). Com que el domini comú és A=(3, +∞), podem dir que les funcions són iguals en A.

1.2.2 SUMA DE FUNCIONS. Siguin dues funcions f, g: $A \to R$ que estudiem en el seu domini comú A. Definim la *suma de funcions* (+) com aquella nova funció, f+g, anomenada *funció suma*, de manera que la imatge d'un element és igual a la suma de les imatges respectives. És a dir, per a tot x de A definim $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$.

La suma de funcions compleix les *propietats* següents, que pots trobar esquematitzades en l'apartat de formulació matemàtica.

1) OPERACIÓ INTERNA. La suma f+g de dues funcions és també una funció.
2) COMMUTATIVA. La funció f+g és la mateixa que la g+f. En efecte, $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=g(x)+f(x)=(g+f)(x)$, per a tot x, i, per la igualtat de funcions, tenim f+g=g+f.
3) ASSOCIATIVA. La funció (f+g)+h és igual a la f+(g+h).Aquesta propietat és deguda a la propietat associativa de números reals. Les demostracions d'aquesta i d'altres propietats es fan de manera similar a l'anterior.
4) FUNCIÓ NUL·LA. Hi ha una funció, que designem per f_0 i que anomenem *funció nul·la*, la imatge de la qual sempre és zero, $f_0(x)=0$, per a tot x. Si dibuixem aquesta funció veurem que es tracta d'una recta horitzontal d'alçada zero, és a dir, l'eix X. Veiem que f_0 és l'element neutre de la suma de funcions, ja que compleix $f+f_0=f$, per a tot f.
5) FUNCIÓ OPOSADA. Per a tota funció f, hi ha una funció -f, que anomenem *funció oposada*, de manera que les seves imatges són les oposades de les imatges originals, $(-f)(x)=-f(x)$. Si dibuixem les gràfiques de f i -f, veurem que són simètriques respecte a l'eix X i, per tant, ens resultarà $f+(-f)=f_0$, per a tot f.

A causa d'aquestes cinc propietats, deduïm que el conjunt de totes les funcions definides en el domini comú A, que simbolitzem per $\mathcal{F}_A$, conjuntament amb l'operació de suma de funcions, $\{\mathcal{F}_A, +\}$, posseeix l'*estructura de grup abelià*.

Podem definir la *diferència de funcions* a partir de la suma, dient que "la diferència de dues funcions és igual a la suma de la primera amb l'oposada de la segona". Per tant, f-g=f+(-g). La nova funció, f-g, en direm *funció diferència*.

Exemple 13. Partim de dues funcions racionals $f(x)=(x-2)/(x-4)$ i $g(x)=(x-3)/(x-6)$, que tenen per dominis $D(f)=R-\{4\}$ i $D(g)=R-\{6\}$. La funció suma es defineix a partir de l'expressió:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{x-2}{x-4}+\frac{x-3}{x-6}=\frac{(x-2).(x-6)+(x-3).(x-4)}{(x-4).(x-6)}=\ldots=\frac{2.x^2-15.x+24}{x^2-10.x+24}$$

Trobem també la diferència d'aquestes funcions, i observem que $(f-g)(x)=[f+(-g)](x)=f(x)+(-g)(x)=f(x)+[-g(x)]=f(x)-g(x)$, és a dir:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{x-2}{x-4}-\frac{x-3}{x-6}=\frac{(x-2).(x-6)-(x-3).(x-4)}{(x-4).(x-6)}=\ldots=\frac{-x}{x^2-10.x+24}$$

Observem que els dominis D(f+g) i D(f-g) coincideixen amb el domini comú, $A=R-\{4, 6\}$.

1.2.3 PRODUCTE DE FUNCIONS. Per a les funcions f, g: $A \to R$, definim l'operació de *producte de funcions* (·) com la nova funció, f·g, anomenada *funció producte*, tal que la imatge d'un element és igual al producte de les imatges respectives: $(f \cdot g)(x)=f(x).g(x)$, per a tot x d'A.

L'operació de producte de funcions, de manera similar a la suma, compleix les *propietats* següents:

1) OPERACIÓ INTERNA. El producte f·g de dues funcions f i g és també una funció.
2) COMMUTATIVA. La funció f·g és la mateixa que la g·f. És a dir, "l'ordre dels factors no altera el producte".
3) ASSOCIATIVA. La funció (f·g)·h és la mateixa que la f·(g·h). Per tant, no importa com s'agrupin els parèntesis.
4) FUNCIÓ UNITAT. Existeix una funció, que designem per f_u i que anomenem *funció unitat*, tal que la seva imatge sempre és igual a la unitat, $f_u(x)=1$, per a tot x. La gràfica d'aquesta funció és una recta horitzontal d'alçada unitat. Observem que f_u és l'element neutre pel producte de funcions, ja que $f \cdot f_u=f$, per a tot f.
5) FUNCIÓ RECÍPROCA. Si $f(x)\neq 0$ per a tot x de A, llavors existeix una funció, anomenada *funció recíproca* i designada per 1/f, tal que la imatge d'un element és igual a la recíproca de la imatge, és a dir, $(1/f)(x)=1/f(x)$. Es verifica que el producte d'una funció amb la seva recíproca és igual a la funció unitat, $f \cdot (1/f)=f_u$.
6) DISTRIBUTIVITAT RESPECTE A LA SUMA. El producte de funcions és distributiu respecte a la suma de funcions, és a dir, per a tres funcions f, g i h es compleix que $f \cdot (g+h)=(f \cdot g)+(f \cdot h)$.

Observem que no sempre existeix la recíproca d'una funció, però sí que podem dir que el conjunt de les funcions de domini comú A, conjuntament amb les operacions de suma i producte de funcions, $\{\mathcal{F}_A, +, \cdot\}$, posseeix l'*estructura d'anell commutatiu i unitari.*

L'operació de *quocient de funcions* es defineix a partir del producte, dient que "el quocient de dues funcions és igual al producte de la primera amb la recíproca de la segona". En conseqüència, tenim $f/g=f \cdot (1/g)$, on f/g, és la *funció quocient.*

Exemple 14. Amb les funcions $f(x)=(x-2)/(x-4)$ i $g(x)=(x-3)/(x-6)$ de l'exemple anterior, fem el producte:

$$(f \cdot g)(x)=f(x).g(x)=\frac{x-2}{x-4}.\frac{x-3}{x-6}=\frac{(x-2).(x-3)}{(x-4).(x-6)}=\frac{x^2-5.x+6}{x^2-10.x+24}$$

Quant al quocient, observem que hauríem de fer els passos següents $(f/g)(x)=[f \cdot (1/g)](x)=f(x).(1/g)(x)=f(x).[1/g(x)]=f(x)/g(x)$, és a dir:

$$(f/g)(x)=f(x)/g(x)=\frac{x-2}{x-4}:\frac{x-3}{x-6}=\frac{(x-2).(x-6)}{(x-4).(x-3)}=\frac{x^2-8.x+12}{x^2-7.x+12}$$

Veiem que el domini de la funció producte, $D(f \cdot g)=A=R-\{4, 6\}$, és la intersecció dels dos dominis, ja que perquè existeixi la imatge $(f \cdot g)(x)$ és necessari que prèviament existeixin les imatges f(x) i g(x).

En canvi, per trobar el domini de la funció quocient, D(f/g), a més que haurà d'existir f(x) i g(x), també haurà d'existir f(x)/g(x), per la qual cosa ha de ser $g(x)\neq 0$. Si fem el denominador $x^2-7.x+12=0$, veiem que obtenim una nova arrel, x=3. Ens resultarà $D(f/g)=R-\{3, 4, 6\}$.

1.2.4 PRODUCTE D'UN ESCALAR PER UNA FUNCIÓ. Sigui $f \in \mathcal{F}_A$ una funció de domini D(f)=A i sigui λ un nombre real. L'operació de *producte d'un escalar per una funció* és una nova funció anomenada *funció producte per un escalar* i designada per $\lambda.f$, de manera que per a tot x es verifica $(\lambda.f)(x)=\lambda.f(x)$, és a dir, la imatge de la funció producte per un escalar és igual a l'escalar pel producte de la imatge.

L'operació anterior compleix les *propietats* següents:

1) OPERACIÓ EXTERNA. El producte $\lambda.f$ és una altra funció.
2) ASSOCIATIVITAT ESCALAR. Es verifica $\lambda.(\mu.f)=(\lambda.\mu).f$.
3) DISTRIBUTIVITAT ESCALAR. Es compleix $(\lambda+\mu).f=(\lambda.f)+(\mu.f)$.
4) DISTRIBUTIVITAT FUNCIONAL. Resulta $\lambda.(f+g)=(\lambda.f)+(\lambda.g)$.
5) ESCALAR UNITAT. Pel real $\lambda=1$ es verifica que $1.f=f$.

Amb aquestes propietats, el conjunt $\mathcal{F}_A$ de les funcions definides en el domini A, amb les operacions de suma de funcions (+) i de producte per un escalar (.), és a dir, la terna $\{\mathcal{F}_A, +, .\}$ té una estructura que s'anomena *estructura d'espai vectorial real.*

Exemple 15. Amb l'escalar $\lambda=3$ i la funció $f(x)=(x-2)/(x-4)$, fem el seu producte:

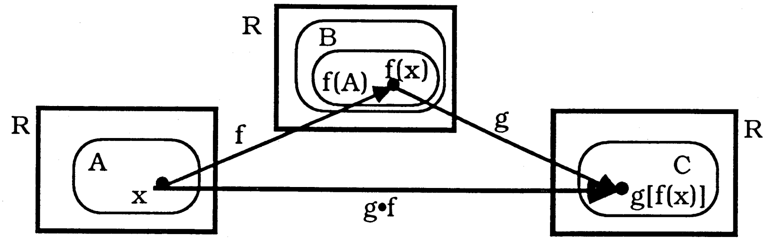
$$(\lambda.f)(x)=\lambda.f(x)= 3.\frac{x-2}{x-4}=\frac{3.x-6}{x-4}$$

Observem que el domini $D(\lambda.f)$ és el mateix que el de la funció original, D(f), ja que si existeix f(x), existeix també $\lambda.f(x)$. En aquest cas, el domini d'aquestes funcions és A=R-{4}.

1.3 COMPOSICIÓ DE FUNCIONS

1.3.1 FUNCIÓ COMPOSTA. Donades dues funcions f i g de dominis respectius A=D(f) i B=D(g), estudiarem la *composició de funcions* (•) on a un element x de A li aplicarem f, obtindrem la imatge f(x) i, després, li aplicarem g, i ens donarà la nova imatge g[f(x)].

Considerem la *funció composta*, g•f, com aquella funció definida en A tal que la imatge d'un element x ve donada per (g•f)(x)=g[f(x)].



Del diagrama anterior observem que perquè sigui possible la composició s'ha de complir la *condició* que el recorregut de f sigui un subconjunt del domini de g, és a dir,

$$f(A)\subseteq B \quad \text{o també} \quad R(f)\subseteq D(g)$$

Entre les *propietats* o característiques de la composició apuntem:

1) ASSOCIATIVA. Per a tres funcions es verifica $(h \bullet g) \bullet f = h \bullet (g \bullet f)$.
2) NO COMMUTATIVA. En general, la composició de funcions no és commutativa, $g \bullet f \neq f \bullet g$, encara que es pot verificar per unes funcions determinades o per uns valors particulars.

Exemple 16. Considerem les funcions $f(x)=(x-2)/(x-4)$ i $g(x)=(x-3)/(x-6)$. Fem la seva composició $g \bullet f$,

$$(g \bullet f)(x)=g[f(x)]=\frac{f(x)-3}{f(x)-6}=\left(\frac{x-2}{x-4}-3\right):\left(\frac{x-2}{x-4}-6\right)=\ldots=\frac{2.x-10}{5.x-22}$$

En canvi, si trobem la funció $f \bullet g$, obtenim

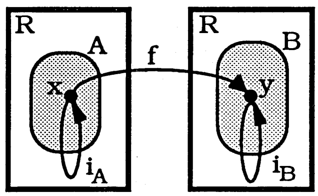
$$(f \bullet g)(x)=f[g(x)]=\frac{g(x)-2}{g(x)-4}=\left(\frac{x-3}{x-6}-2\right):\left(\frac{x-3}{x-6}-4\right)=\ldots=\frac{x-9}{3.x-21}$$

Per saber si hi ha algun valor de x que verifica la commutativitat, $(g \bullet f)(x)=(f \bullet g)(x)$, igualarem les dues funcions obtingudes i resoldrem l'equació resultant. Comprova que s'obté $x^2-5.x+12=0$, que no té arrels reals i, per tant, les funcions f i g no commuten mai.

1.3.2 FUNCIÓ INVERSA. Definim en primer lloc l'*aplicació identitat* en un conjunt A com aquella funció designada per i_A, tal que la imatge de qualsevol element de A és igual al seu original, $i_A(x)=x$.

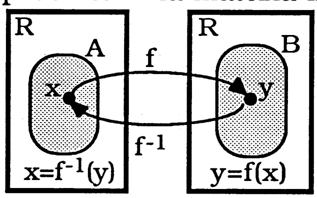
Sigui ara f una funció de domini $D(f)=A$ i recorregut $R(f)=B$ i siguin i_A i i_B les aplicacions identitats definides en A i B. Com podem veure en l'esquema adjunt, es compleixen per a la composició les igualtats :

$$f \bullet i_A = f \quad \text{i} \quad i_B \bullet f = f.$$



Recordem que anomenem funció a tota correspondència de R en R. A la correspondència recíproca, f^{-1}: R→R, l'anomenem *funció inversa* de f. Segons això, tenim $D(f^{-1})=R(f)=B$ i $R(f^{-1})=D(f)=A$.

Observem que, pel sol fet que f sigui una funció uniforme, no ens assegura que la funció inversa f^{-1} també sigui uniforme. Per tal que la funció inversa f^{-1} sigui uniforme, cal que la funció restringida f_A sigui una *aplicació injectiva*, és a dir, dos elements diferents de $A=D(f)$ no poden tenir la mateixa imatge.



En aquest cas, si considerem la funció restringida, $(f^{-1})_B$, on $B=D(f^{-1})=R(f)$, es tracta igualment d'una aplicació injectiva pel fet que f és una funció uniforme. Així, doncs, tindrem que f: A→B i f^{-1}: B→A, són aplicacions bijectives.

Nota: Estudiem especialment les funcions uniformes ja que totes les funcions multiformes es poden descompondre en diverses funcions uniformes (que gràficament hem anomenat branques). Molts autors consideren només com a funcions les que en aquesta guia didàctica anomenem funcions uniformes, amb la qual cosa només existiria la inversa d'una funció si la funció restringida en el seu domini és una aplicació injectiva. En aquesta guia hem preferit donar una definició menys restrictiva, però útil per als nostres objectius.

REGLA PER AL CÀLCUL DE LA FUNCIÓ INVERSA. Donada la funció $y=f(x)$, per determinar la seva funció inversa $y=f^{-1}(x)$, d'una manera metòdica, podem seguir els quatre passos següents:

(1) Substituir $f(x)$ per y. (2) Aïllar la x.

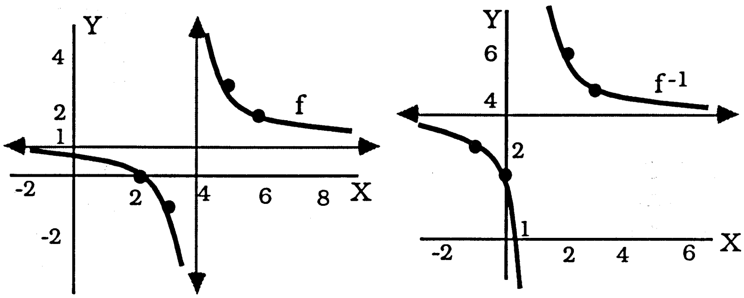
(3) Permutar variables. (4) Substituir la y per $f^{-1}(x)$.

Exemple 17. Donada la funció $f(x)=(x-2)/(x-4)$, calculem-ne la inversa f^{-1}. Primer pas, $y=(x-2)/(x-4)$.

Segon pas, aïllem la x: $y.(x-4)=x-2$, $x.y-4.y=x-2$, $x.y-x=4.y-2$, $x.(y-1)=4.y-2$, $x=(4.y-2)/(y-1)$.

Tercer pas. Permutem les variables ($x \to y$ i $y \to x$): $y=(4.x-2)/(x-1)$.

Quart pas. La funció inversa és $f^{-1}(x)=(4.x-2)/(x-1)$.



Hem dibuixat tant la funció original com la seva inversa, i hem fet unes petites taules de valors:

Funció original: $f(2)=0$, $f(3)=-1$, $f(5)=3$, $f(6)=2$,...

Funció inversa: $f^{-1}(-1)=3$, $f^{-1}(0)=2$, $f^{-1}(2)=6$, $f^{-1}(3)=5$

Observem que els valors de x i de y són els mateixos, però estan permutats, així si $f(2)=0$, deduïm que $f^{-1}(0)=2$, la qual cosa és lògica ja que precisament són funcions inverses: si a un element x se li fa correspondre la imatge y, en la funció inversa al nou original y se li farà correspondre com a imatge x.

Entre les *propietats* de la funció inversa, apuntem les següents, que es poden demostrar com a exercici. Sigui $A=D(f)$ i $B=R(f)$.

1) IDENTITAT. Si i_A i i_B són les funcions identitat en A i en B, es verifica que $f^{-1}\bullet f=i_A$ i que $f\bullet f^{-1}=i_B$.

2) IDEMPOTÈNCIA. La inversa de la inversa és la funció original, és a dir $(f^{-1})^{-1}=f$.

3) COMPOSICIÓ. La inversa de la composició és igual a la composició de les inverses, en sentit contrari, $(g\bullet f)^{-1}=f^{-1}\bullet g^{-1}$.

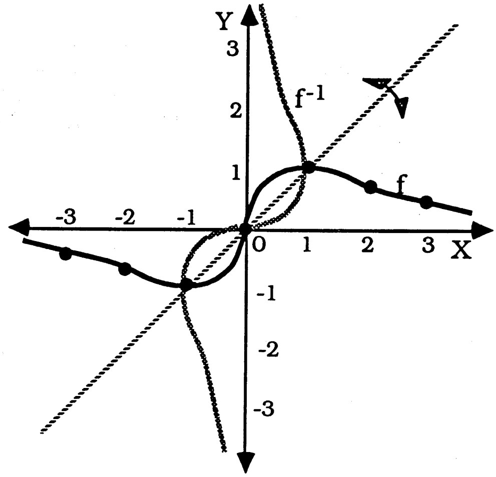
4) DOMINI. El domini de la funció inversa és igual al recorregut de la funció original, $D(f^{-1})=R(f)$.

5) RECORREGUT. El recorregut de la funció inversa és igual al domini de la funció original, $R(f^{-1})=D(f)$.

6) SIMETRIA. Les gràfiques de les funcions f i f^{-1} són simètriques respecte a la bisectriu del primer i tercer quadrants, $y=x$.

Acabem l'estudi de les funcions inverses amb un nou exemple que ens permeti visualitzar la propietat de simetria.

Exemple 18. Sigui la funció $f(x)=2.x/(x^2+1)$, que hem dibuixat per mitjà d'una taula de valors en negreta.



Calculem ara la inversa. Primer pas: $y=2.x/(x^2+1)$. Aïllem la x: $y.(x^2+1)=2.x$, $y.x^2+y=2.x$, $y.x^2-2.x+y=0$. Resolem l'equació de 2n grau, $x=(2\pm\sqrt{4-4.y^2})/(2.y)$. Simplificant, $x=(1\pm\sqrt{1-y^2})/y$.

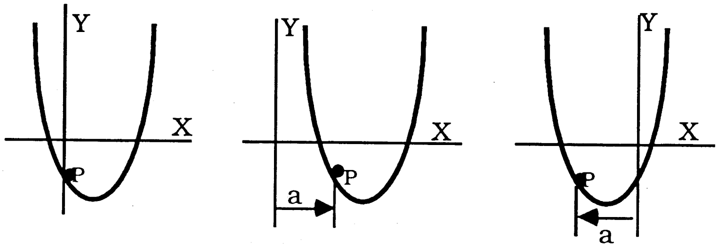
Permutant variables, $y=(1\pm\sqrt{1-x^2})/x$. Així la funció inversa constarà de dues branques:

$$f^{-1}(x)=(1+\sqrt{1-x^2})/x \quad \text{i} \quad f^{-1}(x)=(1-\sqrt{1-x^2})/x$$

Fixem-nos que D(f)=R, però que f^{-1} no és una funció uniforme, tot i ser-ho f, ja que aquesta, considerada com a aplicació, no és injectiva. Per tant, f^{-1}, no és cap aplicació. Si dónes valors a la x, veuràs que la primera branca té de recorregut $(-\infty, -1]\cup[1, +\infty)$ i la segona $[-1, 1]$.

1.3.3 REPRESENTACIÓ DE FUNCIONS COMPOSTES. A l'hora de dibuixar les gràfiques de funcions compostes, i sabent la gràfica de la funció original, y=f(x), en podem representar d'altres de relacionades amb ella, que vénen donades segons els tipus de moviment següents:

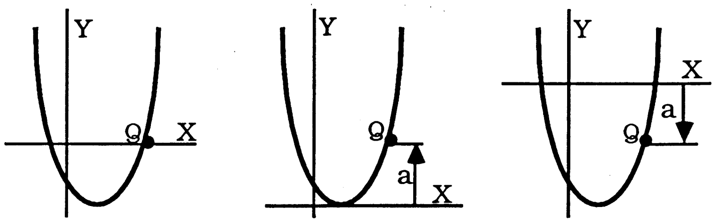
A) TRANSLACIÓ. Consisteix a desplaçar la gràfica pel pla, però sense canvi de forma.



y=f(x) y=f(x-a) y=f(x+a)

1) TRANSLACIÓ HORITZONTAL. En la figura de la plana anterior veiem que, si se substitueix x per x-a, on a>0, llavors la nova funció y=f(x-a) queda desplaçada cap a la *dreta*. Al revés, la funció y=f(x+a) és la mateixa que y=f(x), però desplaçada a *l'esquerra*.

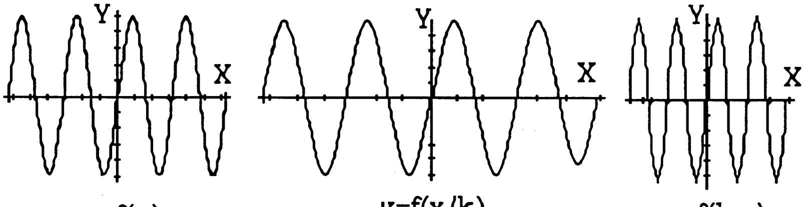
2) TRANSLACIÓ VERTICAL. Si substituïm la y per y-a en la funció y=f(x), la nova funció y-a=f(x), o bé y=f(x)+a, queda desplaçada "a" unitats cap amunt. I viceversa, si substituïm la y per y+a, obtindrem una nova funció y+a=f(x), o bé y=f(x)-a, desplaçada "a" unitats cap a baix, respecte a la gràfica de la funció original.



y=f(x) y=f(x)+a y=f(x)-a

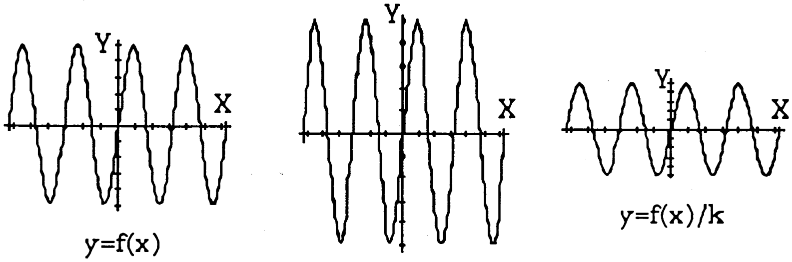
B) HOMOTÈCIA. Consisteix a multiplicar una de les variables per una constant k>1. Estudiem els casos següents:

1) HOMOTÈCIA HORITZONTAL. Si en la funció original y=f(x) se substitueix la x per x/k, la nova funció y=f(x/k) queda *allargada* amb el factor k. Al revés, si substituïm la x per k.x, la nova funció y=f(k.x) queda *escurçada* amb el factor k. Gràficament,



y=f(x) y=f(x/k) y=f(k.x)

2) HOMOTÈCIA VERTICAL. Si en la funció original y=f(x) substituïm la y per y/k, la nova funció y/k=f(x), o bé y=k.f(x), queda allargada (verticalment) amb el factor k. D'altra banda, si substituïm la y per k.y, la nova funció k.y=f(x), o bé y=f(x)/k, queda escurçada (verticalment) amb el factor k. Gràficament:

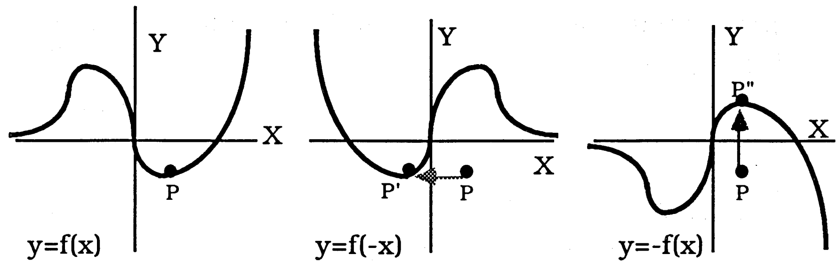


y=f(x) y=k.f(x) y=f(x)/k

C) OPOSICIÓ. Consisteix a multiplicar la x o la y per -1, és a dir, canviar les variables de signe.

1) OPOSICIÓ DE LA VARIABLE. Si canviem de signe la variable x, la nova funció y=f(-x) és simètrica de la funció original y=f(x) respecte a l'eix vertical Y.

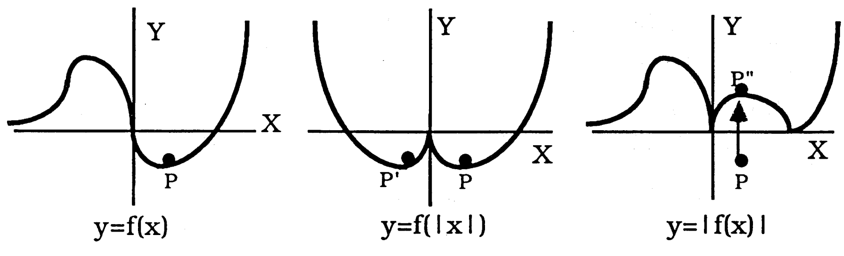
2) OPOSICIÓ DE LA FUNCIÓ. Canviant la y per -y en la funció y=f(x), obtenim -y=f(x), o bé y=-f(x), de manera que les funcions són simètriques respecte a l'eix horitzontal X.



D) VALOR ABSOLUT. Estudiarem ara la relació entre les gràfiques en el cas de substituir alguna de les variables x o y pel seu valor absolut.

1) VALOR ABSOLUT DE LA VARIABLE. Si substituïm en la funció y=f(x) la x per |x|, la nova funció y=f(|x|) té la part de la dreta de l'eix Y igual que la funció original, i la part de l'esquerra és simètrica de l'anterior.

2) VALOR ABSOLUT DE LA FUNCIÓ. Substituint la f(x) per |f(x)| en la funció original y=f(x), la gràfica de la nova funció, y=|f(x)|, resulta de fer una simetria respecte a l'eix X en totes les parts en què la y és negativa. Veiem-ho gràficament:



d) FORMULACIÓ MATEMÀTICA

Característiques de les funcions

Funció: **dependència**	F. vectorial: **f:** $\mathbf{R^n \to R^m}$
F. varies variables: **f:** $\mathbf{R^n \to R}$	F. real de variable real: **f:** $\mathbf{R \to R}$
Conjunt funcions: **F**	V. independent o el. original: $\mathbf{x}$
Variable dependent: $\mathbf{y}$	Element imatge de x: $\mathbf{y}$, $\mathbf{f(x)}$
Forma explícita: $\mathbf{y=f(x)}$	Forma implícita: $\mathbf{F(x,y)=0}$

Funcions uniforme i multiforme

Funció restringida en un conjunt: $\mathbf{f_A}$

Funció multiforme: $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{A} \Rightarrow \exists \mathbf{y} \in \mathbf{R}\ /\ \mathbf{y=f(x)}$ (no aplicació)

Branques d'una f. multiforme: $\mathbf{y=f_i(x)}$

Funció uniforme: $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{A} \Rightarrow \overline{\exists} \mathbf{y} \in \mathbf{R}\ /\ \mathbf{y=f(x)}$ (aplicació)

Domini i recorregut

Grafo: $\mathbf{G=\{(x, y) \in R^2\ /\ x \in A \wedge y=f(x)\}}$

Domini: $\mathbf{D(f)=A} \Leftrightarrow \mathbf{D(f)=\{x \in R\ /\ \exists y \in R,\ y=f(x)\}}$

Recorregut: $\mathbf{R(f)=f(A)} \Leftrightarrow \mathbf{R(f)=\{y \in R\ /\ \exists x \in D(f),\ y=f(x)\}}$

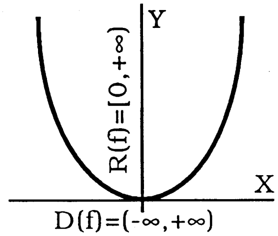
Gràfica d'una funció

Gràfica: **Corba del grafo** Punt: $\mathbf{P(x, y)}$

Coordenades: Abscissa: $\mathbf{x}$ Ordenada: $\mathbf{y}$

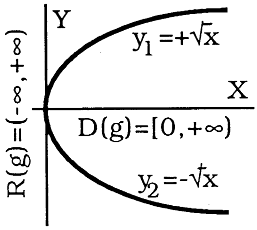
Eixos coordenats: Abscisses: $\mathbf{X}$ Ordenades: $\mathbf{Y}$ $\mathbf{(Y \perp X)}$

Funció uniforme



F. explícita: $y=x^2$

Funció multiforme



F. implícita: $y^2-x=0$

Funcions creixents i decreixents

Funció: **y=f(x)** Domini: **D(f)** Interval en D(f): **(a, b)**

Monotonia: **creixement o decreixement**

Monotonia estricta:

Funció constant: $\forall x_1, x_2 \in (a, b) \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$

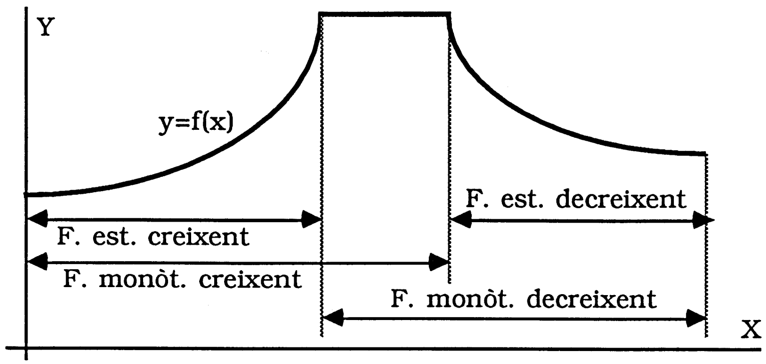
F. estrict. creixent: $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, si $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

F. estrict. decreixent: $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, si $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$

Monotonia àmplia:

Funció mon. creixent: $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, si $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$

Funció mon. decreixent: $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, si $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$



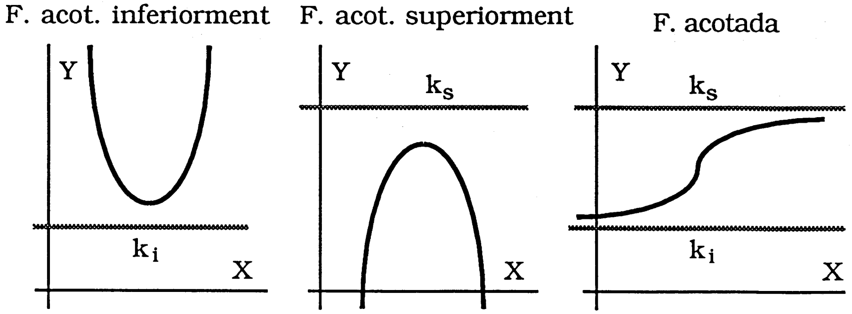
Funcions acotades

Cota inferior: $\mathbf{k_i}$ Cota superior: $\mathbf{k_s}$

F. acotada inferiorment: $\exists k_i \in \mathbf{R}$ / $\forall x \in (a, b) \Rightarrow k_i \le f(x)$

F. acotada superiorment: $\exists k_s \in \mathbf{R}$ / $\forall x \in (a, b) \Rightarrow k_s \ge f(x)$

F. acotada: $\exists k_i, k_s \in \mathbf{R}$ / $\forall x \in (a, b) \Rightarrow k_i \le f(x) \le k_s$

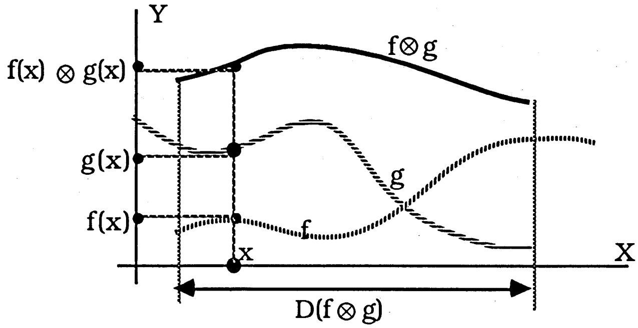


Operacions amb funcions

Funcions: $\mathbf{f,g: R \to R}$ Dominis: $\mathbf{D(f), D(g)}$

Domini comú de la funció $f \otimes g$: $\mathbf{A \subseteq D(f) \cap D(g)}$

Operació de funcions: $\mathbf{f \otimes g \Leftrightarrow \forall x \in A \ , \ (f \otimes g)(x) = f(x) \otimes g(x)}$



Igualtat de funcions: $\mathbf{f=g \Leftrightarrow [\ f(x)=g(x) \ \wedge \ D(f)=D(g)\ ]}$

Suma de funcions

Funció suma: $\mathbf{f+g: A \to R \ / \ \forall x \in A \Rightarrow (f+g)(x)=f(x)+g(x)}$

Propietats:

1) Op. interna: **f+g=funció** 2) Commutativa: **f+g=g+f**
3) Associativa: **(f+g)+h=f+(g+h)**
4) Funció nul.la : $\mathbf{f_0: A \to R \ / \ \forall x \in A \Rightarrow f_0(x)=0 \ , \ f+f_0=f}$
5) Funció oposada: $\mathbf{-f: A \to R \ / \ \forall x \in A \Rightarrow (-f)(x)=-f(x) \ , \ f+(-f)=f_0}$

Conseqüències:

Estructura $\{F_A , +\}$ = **grup abelià**

Diferència de funcions: **f-g=f+(-g)**

Producte de funcions

Funció producte: $\mathbf{f,g: A \to R \ / \ \forall x \in A \Rightarrow (f \cdot g)(x)=f(x).g(x)}$

Propietats:

1) Op. interna: **f·g=funció** 2) Commutativa: **f·g=g·f**
3) Associativa: **(f·g)·h=f·(g·h)**
4) Funció unitat : $\mathbf{f_u: A \to R \ / \ \forall x \in A \Rightarrow f_u(x)=1 \ , \ f \cdot f_u=f}$
5) Funció recíproca: en general no existeix
   Si $\mathbf{f(x) \neq 0 \ \forall x \in A \Rightarrow \exists (1/f): A \to R \ , \ (1/f)(x)=1/f(x) \ , \ f \cdot (1/f)=f_u}$
6) Distributivitat respecte a la suma $\mathbf{f \cdot (g+h)=(f \cdot g)+(f \cdot h)}$

Producte de funcions (cont.)

Conseqüències:

Estructura $\{F_A, +, \cdot\}$ = **anell commutatiu i unitari**

Quocient de funcions: **Si $f(x)\neq 0$ $\forall x\in A$ $\Rightarrow$ $f/g=f\cdot(1/g)$**

Producte d'un escalar per una funció

Producte: $\forall\lambda\in\mathbf{R}$, $\forall f\in F_A$ **i** $\forall x\in A$ $\Rightarrow$ **$(\lambda.f)(x)=\lambda.f(x)$**

Propietats:

1) Op. externa: **$\lambda.f$=funció** 2) Assoc. escalar: $\lambda.(\mu.f)=(\lambda.\mu).f$

3) Distributivitat escalar: $(\lambda+\mu).f=(\lambda.f)+(\mu.f)$

4) Distributivitat funcional: $\lambda.(f+g)=(\lambda.f)+(\lambda.g)$

5) Escalar unitat: $\exists 1\in\mathbf{R}$ / $\forall f\in F_A$ $\Rightarrow$ $1.f=f$

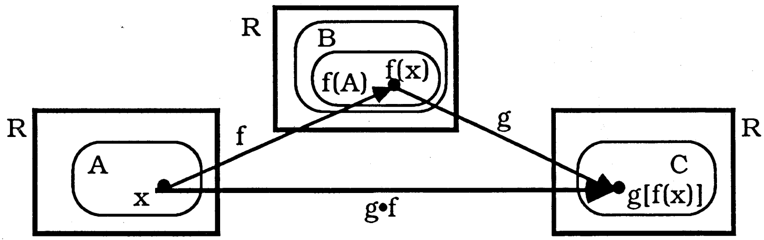
Conseqüència: $\{F_A, +, .\}$ = **espai vectorial real**

Composició de funcions

Funcions: $f\in F_A$, $g\in F_B$ Dominis: **$A=D(f)$, $B=D(g)$**

Funció composta: $g\bullet f$: $A\rightarrow\mathbf{R}$ / $\forall x\in A$, $(g\bullet f)(x)=g[f(x)]$

Condició per a la composició: $R(f)\subseteq D(g)$



Propietats:

1) Associativa: **$(h\bullet g)\bullet f=h\bullet(g\bullet f)$**

2) No commutativitat: **En general $g\bullet f\neq f\bullet g$**

Funció inversa

F. unif. injectiva: $f\in F_A$ / $\forall x_1,x_2\in A$ $\wedge$ $f(x_1)=f(x_2)$ $\Rightarrow$ $x_1=x_2$

Funció identitat: i_A: $A\rightarrow A$ / $\forall x\in A$, $i_A(x)=x$

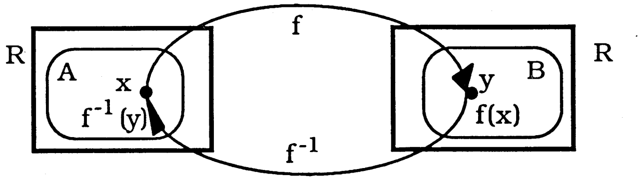
Propietat: **Si $A=D(f)$ $\wedge$ $B=R(f)$ $\Rightarrow$ $f\bullet i_A=f$ $\wedge$ $i_B\bullet f=f$**

Funció inversa (cont.)

Condició de funció inversa per funcions uniformes:

Hipòtesis: $f \in F_A$, **f injectiva** $\wedge$ $f(A)=B$

Conclusió: $\exists f^{-1} \in F_B$, $f^{-1}: B \rightarrow R$ / $\forall y \in B \wedge f(x)=y \Rightarrow f^{-1}(y)=x$



Propietats: 1) $f^{-1} \bullet f = i_A \wedge f \bullet f^{-1} = i_B$ 2) $(f^{-1})^{-1}=f$

3) $(g \bullet f)^{-1} = f^{-1} \bullet g^{-1}$ 4) $D(f^{-1})=R(f)$ 5) $R(f^{-1})=D(f)$

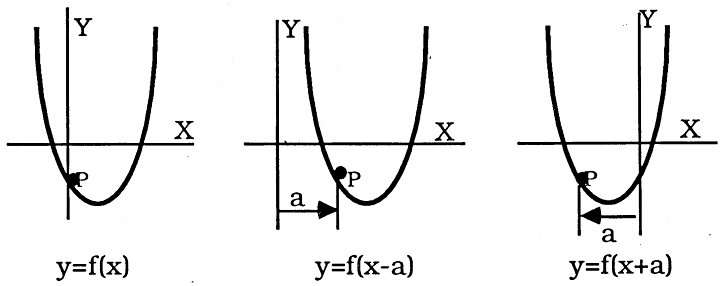
6) Les gràfiques de f i f^{-1} són simètriques respecte a la bisectriu del primer quadrant.

Representació de funcions compostes

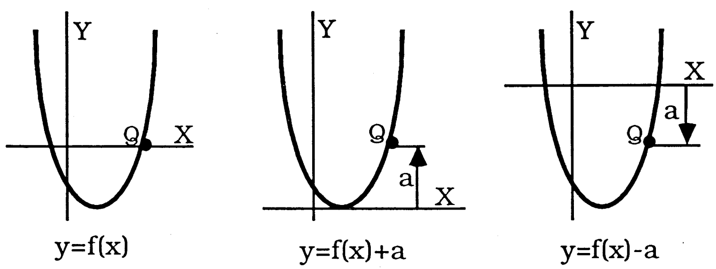
Funció original: **y=f(x)** Constants: **a>0 , k>1**

A) Translació:

1) Horitzontal Dreta: **y=f(x-a)** Esquerra: **y=f(x+a)**



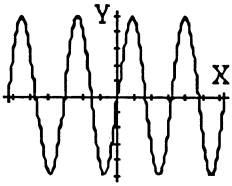
2) Vertical A dalt: **y=f(x)+a** A baix: **y=f(x)-a**



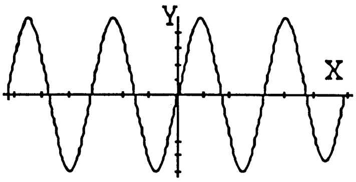
Representació de funcions compostes (cont.)

B) Homotècia:

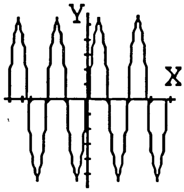
1) Horitzontal   Allargada: **y=f(x/k)**   Escurçada: **y=f(kx)**



y=f(x)

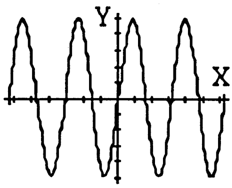


y=f(x/k)

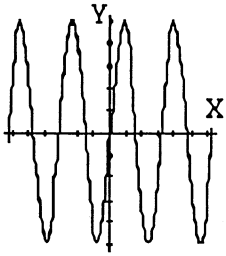


y=f(k.x)

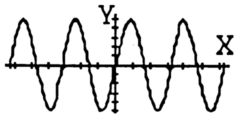
2) Vertical   Allargada: **y=k.f(x)**   Escurçada: **y=f(x)/k**



y=f(x)



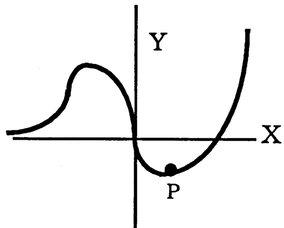
y=k.f(x)



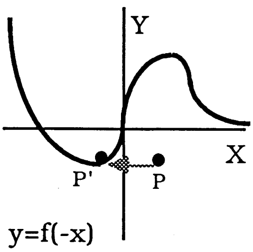
y=f(x)/k

C) Oposició :

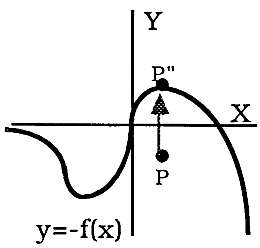
1) Variable: **y=f(-x)**   2) Funció: **y=-f(x)**



y=f(x)



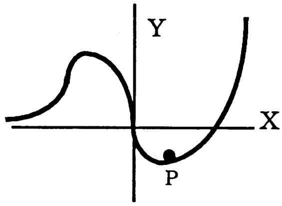
y=f(-x)



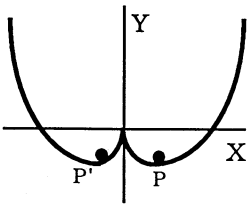
y=-f(x)

D) Valor absolut:

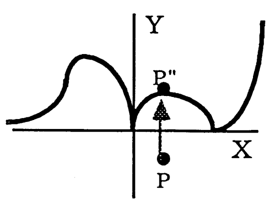
1) Variable: **y=f(|x|)**   2) Funció: **y=|f(x)|**



y=f(x)



y=f(|x|)



y=|f(x)|

e) PROBLEMES RESOLTS

1.1 CARACTERÍSTIQUES DE LES FUNCIONS

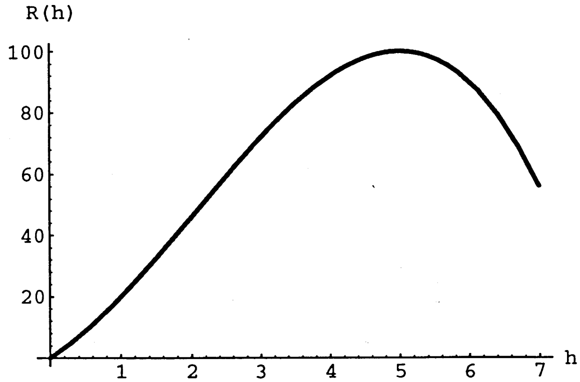
Gràfica d'una funció

1. En una fàbrica d'interruptors elèctrics s'ha estudiat la productivitat en el torn matinal de 8h a 15h i s'ha comprovat que el ritme de muntatge d'un treballador mitjà ens és donat aproximadament per la funció $R(h)=-h^3+6.h^2+15.h$ peces/hora, on h és el nombre d'hores transcorregudes a partir de les 8 del matí. Dibuixa la gràfica per mitjà d'una taula de valors, assenyalant-ne el punt màxim. En quant haurà variat el seu ritme de muntatge entre les 11h i les 12h? I a l'última hora de treball?

Solució. Formem una taula de valors des de h=0 (les 8 del matí) fins a h=7 (les 3 de la tarda):

hora	8h	9h	10h	11h	12h	13h	14h	15h
h	0	1	2	3	4	5	6	7
R(h)	0	20	46	72	92	100	90	56

Amb aquests valors podem dibuixar la gràfica, on a l'eix X (abscisses) hem indicat el nombre d'hores transcorregudes a partir de les 8 del matí, mentre que a l'eix Y (ordenades) hem col·locat el ritme o velocitat de muntatge:



Observem gràficament que el punt més alt, el màxim, es troba en el punt P(5, 100). És a dir, a la cinquena hora de treball, que correspon a la 1h, el treballador va a la velocitat màxima de muntatge: 100 peces/hora. Com que a les 11h, h=3, anava a un ritme de R(3)=72 i a les 12h, h=4, a un de R(4)=92, llavors la variació és de R(4)-R(3)=92-72=20. Per tant, la velocitat de muntatge ha augmentat de 20 peces/hora.

Anàlogament, a les 14h o 2h de la tarda, h=6, és R(6)=90 i a l'hora d'acabar, les 15h o 3h de la tarda, h=7, és R(7)=56. La diferència és R(7)-R(6)=56-90=-34, és a dir, que el ritme de muntatge ha disminuit en 34 peces/hora.

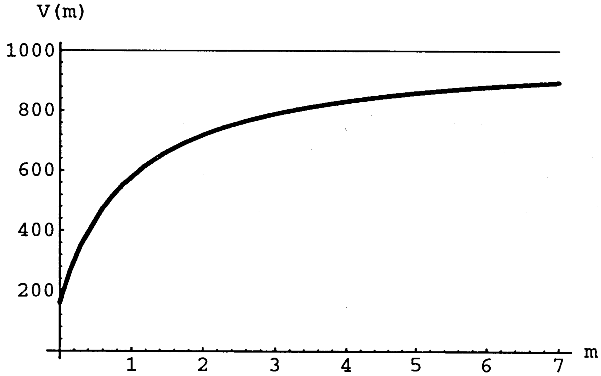
2. S'estima que el creixement mensual de les vendes d'una empresa, al llarg del primer semestre de l'any, vindrà donat per la funció V(m)=40.(25.m+4)/(m+1) productes, on m són els mesos. Digues el nombre de vendes en començar l'any, les quantitats mensuals venudes al llarg d'aquest semestre i dibuixa aquesta corba de previsió de vendes. Quines seran les vendes per al mes de juliol? Si es manté la mateixa corba de previsió de vendes, durant quin mes les vendes seran de 940 productes? És possible que l'empresa arribi a vendre 1.000 productes mensuals?

Solució. Les vendes en començar l'any, m=0, que representarien les vendes en el mes de desembre de l'any passat, eren de V(0)=40.(0+4)/1=160 productes.

Per als altres mesos de gener (m=1), febrer (m=2), etc. calculem les vendes respectives i les col·loquem ordenadament en una taula de valors:

Mes	Gen.	Feb.	Març	Abr.	Maig	Juny
m	1	2	3	4	5	6
V(m)	580	720	790	832	860	880

Amb aquesta sèrie de punts ja podrem dibuixar la gràfica de previsió de vendes:



Observem que és una funció estrict. creixent i que en el mes de juliol, m=7, les vendes són de V(7)=40.(25.7+4)/6=895 productes.

Per a trobar el mes on les vendes són de V(m)=940 productes, haurem de resoldre l'equació 40.(25m+4)/(m+1)=940. Si ara simplifiquem per 20: 2(25m+4)/(m+1)=47, 50m+8=47m+47, 3m=39, m=13. Per tant, el mes on les vendes són de 940 productes, serà el gener de l'any següent.

Ja veiem a la gràfica que les vendes es van aproximant cada vegada més als 1.000 productes mensuals. Comprovem, però, numèricament i donant valors elevats a la m, que mai no s'arribarà a aquesta quantitat. Així, si m=27, tindrem V(27)=970; per m=83, V(83)=990; per m=209, V(209)=996, etc.

Més endavant, en l'estudi del Càlcul diferencial, direm que y=1000 és una asímptota horitzontal.

3. La corba de beneficis-pèrdues d'una empresa multinacional en el quinquenni 1990-1994 ve donada aproximadament per la funció $B(t)=2.t^5-55.t^4+570.t^3-2790.t^2+6480.t-5544$ milions de PTA, on t és el nombre d'anys transcorreguts a partir del 1990. Comprova que, per als dos primers anys, 1990 i 1991, l'empresa ha tingut greus pèrdues, degudes sobretot a la compra de material brut, màquines i equipament. Què ha passat en l'any olímpic «Barcelona 92»? I en els dos anys següents?

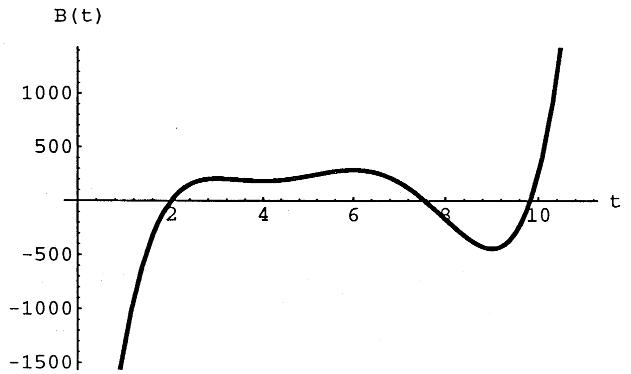
Estudia també l'evolució esperada de l'empresa en el proper quinquenni 1995-1999. És cert que en el proper mil·lenni s'espera un creixement espectacular de l'empresa? Fes la gràfica de la corba de beneficis-pèrdues durant aquesta dècada i assenyala els anys de màxim i mínim creixement.

Solució. Per a l'any 1990 tenim B(0)=-5.544 milions i per al 1991, B(1)=2-55+570-2790+6480-5544=-1.337 milions de pèrdua.

L'any olímpic és, com tothom sap, el 1992. Per tant, t=2, i per aquest valor calculem el benefici corresponent emprant la regla de Ruffini, un mètode que ens permetrà trobar directament el resultat amb la calculadora, sense necessitat de fer càlculs intermedis:

	2	-55	570	-2790	6480	-5544
2	↓	4	-102	936	-3708	5544
	2	-51	468	-1854	2772	(0

Com que el residu és 0, com a conseqüència del teorema del residu estudiat en cursos anteriors, el valor numèric del polinomi donat B(t) per t=2 és 0, és a dir, B(2)=0. El seu significat és que en el segon any l'empresa no tindrà pèrdues ni beneficis.



Quant als dos anys següents, t=3 i t=4, i aplicant també la regla de Ruffini, tindrem B(3)=207 i B(4)=184 milions de PTA. Per tant, durant els anys 1993 i 1994, l'empresa ja ha tingut guanys.

Per al proper quinquenni 1995-1999, on la t variarà de 5 a 10, respectivament, si calculem els beneficis en milions de PTA, obtindrem les quantitats:

B(5)=231 , B(6)=288 , B(7)=175 , B(8)=-168 i B(9)=-441

Fixem-nos que durant els anys 1998 i 1999 l'empresa té unes sensibles pèrdues.

De passada, també trobem els beneficis en el proper mil·lenni, durant els dos primers anys, 2000 i 2001, on t=10 i 11, respectivament. Obtindrem B(10)=256 i B(11)=3.663 milions de PTA. Realment, un creixement espectacular, tant que ens fa pensar que la funció només pot ser vàlida durant un temps determinat, per a la previsió de l'evolució dels beneficis i, a causa de fenòmens exteriors, l'haurem d'anar modificant.

Veiem que els beneficis van oscil·lant, creixent durant uns anys i decreixents en altres. Per trobar els beneficis més grans i més petits, hem dibuixat a la plana anterior la gràfica de la funció.

En aquesta corba de beneficis podem observar dos màxims que corresponen als anys 1993 i 1996 i són de 207 i 288 milions de PTA, respectivament. També hi trobem dos mínims, els dels anys 1994 i 1999, amb uns beneficis de 184 i -441 milions.

4. En un determinat estudi de la dependència entre dues variables econòmiques x i y s'ha comprovat que estan relacionades per una funció del tipus y=(a.x-b)/(c.x-d), on tots els paràmetres a, b, c i d són reals i positius. Experimentalment s'ha vist que la seva gràfica passava pels quatre punts $P_1(0, 2)$, $P_2(1, 1)$, $P_3(3, 5)$ i $P_4(4, 4)$. Calcula aquesta funció. Què passa per x=2? Té algun sentit econòmic?

Solució. Com que la corba y=f(x) ha de passar pel punt $P_1(0, 2)$, voldrà dir que quan x=0, llavors y=2. Substituint en la funció,

2=(a.0-b)/(c.0-d) , 2=(-b)/(-d) , 2=b/d , b=2.d (1)

Anàlogament, per passar per $P_2(1, 1)$ tindrem 1=(a.1-b)/(c.1-d), 1=(a-b)/(c-d) , c-d=a-b , b+c=a+d (2)

Per passar per $P_3(3, 5)$ tenim, 5=(a.3-b)/(c.3-d) , 5(3.c-d)=3.a-b, 15.c-5.d=3.a-b , b+15.c=3.a+5.d (3)

Finalment, per passar per $P_4(4, 4)$, resultarà 4=(a.4-b)/(c.4-d), 4(4.c-d)=4.a-b , 16.c-4.d=4.a-b , b+16.c=4.a+4.d (4)

Per a trobar els paràmetres indeterminats a, b, c i d, haurem de resoldre el sistema d'equacions (1), (2), (3) i (4):

b=2.d , b+c=a+d , b+15.c=3.a+5.d i b+16.c=4.a+4.d

Substituint la (1) en les altres tres,

2.d+c=a+d , 2.d+15.c=3.a+5.d i 2.d+16.c=4.a+4.d

Simplificant, c=a-d , 15.c=3.a+3.d i 16.c=4.a+2.d. Simplificant de nou, tindrem c=a-d , 5.c=a+d i 8.c=2.a+d.

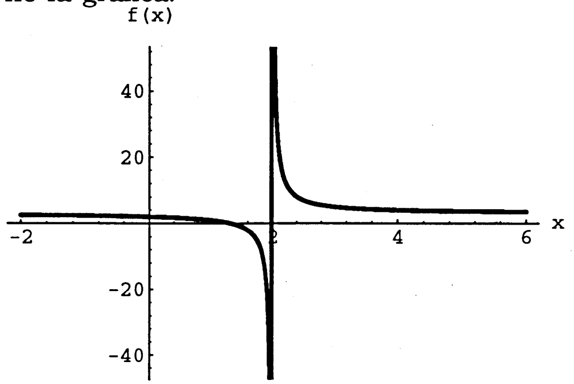
Substituint c en les altres dues, 5.(a-d)=a+d i 8.(a-d)=2.a+d. Operant, 5.a-5.d=a+d i 8.a-8.d=2.a+d. Passant a un mateix costat, 4.a=6.d i 6.a=9.d. Si simplifiquem, ens quedarà una sola equació 2.a=3.d, la qual cosa vol dir que el sistema és compatible indeterminat. Així, a=3.d/2.

La c valdrà c=a-d=(3.d)/2-d=(3.d-2.d)/2=d/2, i com que b=2.d, la solució del sistema és a=3.d/2, b=2.d i c=d/2.

Substituint en la funció donada, y=(a.x-b)/(c.x-d), obtindrem

$$y=\frac{a.x-b}{c.x-d}=\frac{(3.d/2).x-(2.d)}{(d/2).x-d}=\frac{d.[(3/2).x-2]}{d.[(1/2).x-1]}=\frac{(3.x-4)/2}{(x-2)/2}=\boxed{\frac{3.x-4}{x-2}}$$

Amb els punts donats i altres valors que podem deduir de la funció anterior, com que f(-2)=(-10)/(-4)=2'5 i f(6)=14/4=3'5, podrem fer-ne la gràfica:



Per a x=2 tenim f(2)=(3.2-4)/(2-2)=2/0=∞ i la funció no tindrà sentit econòmic en aquest punt. Tampoc no en tindrà quan la x o la y siguin negatives, és a dir, en general les funcions econòmiques només tenen sentit en el primer quadrant.

Monotonia i acotació

5. Dibuixa les funcions "valor absolut", $f_1(x)=|x|$, i la "funció esglaó", $f_2(x)=x/|x|$, dient els intervals en què són creixents, decreixents o constants. D'altra banda, donada la funció $y=f_3(x)$ definida per intervals com $f_3(x)=0$ si $x\leq 0$ i $f_3(x)=2.x$ si $x>0$, dibuixa-la i escriu-la emprant la noció de valor absolut. Estudia'n la monotonia i acotació.

Solució. Per a la funció valor absolut, $f_1(x)=|x|$, hem de tenir en compte que sempre és positiva, és a dir, que la imatge d'un número és igual al número donat, si el número és positiu, però s'ha de canviar el signe, si és negatiu. Així, una taula de valors pot ser:

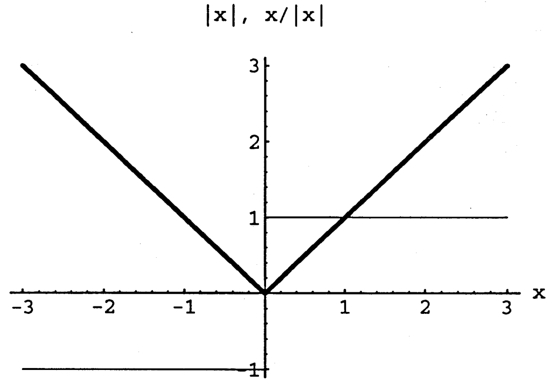
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f_1(x)$	3	2	1	0	1	2	3

També calculem la taula de valors de l'altra funció $f_2(x)=x/|x|$, que són els quocients dels valors anteriors. Així, $f_2(-3)=(-3)/3=-1$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f_2(x)$	-1	-1	-1	?	+1	+1	+1

Per a $x=0$ no podem trobar la imatge, ja que $f_2(0)=0/0$ no està definit.

Amb aquests valors, dibuixarem les dues gràfiques, la primera d'elles és la "funció valor absolut" i la segona de la "funció esglaó":

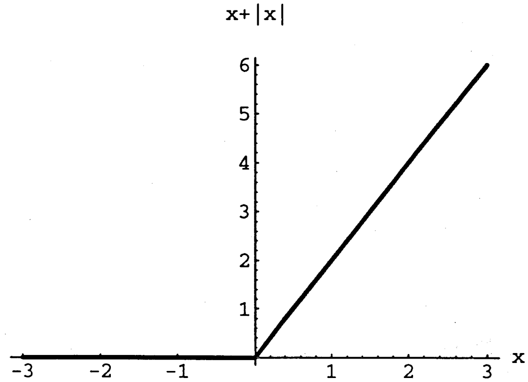


En la funció valor absolut veiem que és estrictament decreixent en l'interval $(-\infty, 0)$ i, estrictament creixent en $(0, +\infty)$. D'altra banda, la funció escaló és constant en els dos intervals anteriors.

Quant a la funció definida per intervals com $f_3(x)=0$ si $x \leq 0$ i $f_3(x)=2.x$ si $x>0$, farem en primer lloc la taula de valors,

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f_3(x)$	0	0	0	0	2	4	6

Si en fem la gràfica, veurem que també està formada per dues parts, una d'horitzontal i l'altra vertical,



Per escriure f_3 emprant la noció de valor absolut, ens podem fixar en la taula de valors d'aquesta funció $f_1(x)=|x|$ i comparar-la amb la de f_3. Deduïm fàcilment que $f_3(x)=x+|x|$.

Estudiem ara la monotonia de f_3. Veiem que és constant en l'interval $(-\infty, 0)$ i estrictament creixent en $(0, +\infty)$.

Finalment, observem que f_3 és sols acotada inferiorment, on una cota inferior pot ser per exemple $k_i=-1$.

6. Mitjançant una taula de valors fes la gràfica de la funció $y=f(x)$ definida per intervals com $f(x)=2.E(x-3)+|x-4|-1$ si $2\leq x\leq 5$, on E és la funció "part entera", i $f(x)=x/(x-4)$ en cas contrari. Estudia els intervals de creixement i decreixement i també l'acotació.

Solució. Recordem en primer lloc que la "funció part entera", E(x), és definida com aquell enter més petit o igual que x, és a dir, el primer enter que, en la recta real, es troba a la seva esquerra. Així, per exemple, $E(-2'5)=-3$, $E(3)=3$, $E(2'9)=2$ i $E(3'1)=3$. Observem dels dos últims que hi ha un salt d'unitat entre dos valors pròxims a un nombre enter.

Per a l'interval [2, 5] donarem valors enters i decimals a la x:

$$f(2)=2.E(2-3)+|2-4|-1=2.E(-1)+|-2|-1=2.(-1)+2-1=-2+1=-1$$

$$f(2'1)=2.E(2'1-3)+|2'1-4|-1=2.(-1)+1'9-1=-2+0'9=-1'1$$

$$f(2'9)=2.E(2'9-3)+|2'9-4|-1=2.(-1)+1'1-1=-2+0'1=-1'9$$

Procedint així construirem una taula de valors:

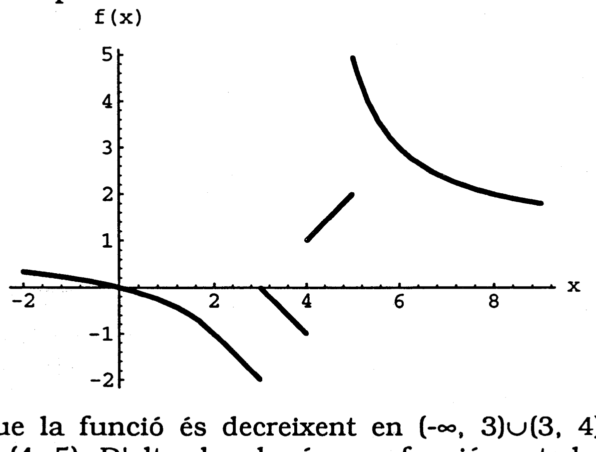
x	2	2'1	2'9	3	3'1	3'9	4	4'1	4'9	5
f(x)	-1	-1'1	-1'9	0	-0'1	-0'9	1	1'1	1'9	4

També ho podíem haver fet més matemàticament, observant que $E(x-3)=-1$ si $2\leq x<3$, $E(x-3)=0$ si $3\leq x<4$ i $E(x-3)=1$ si $4\leq x<5$ i també $|x-4|=-x+4$ si $2\leq x<4$ i $|x-4|=x-4$ si $4\leq x\leq 5$. Substituint tindríem $f(x)=-x+1$ si $2\leq x<3$, $f(x)=-x+3$ si $3\leq x<4$ i $f(x)=x-3$ si $4\leq x<5$.

A continuació, donem valors que no pertanyin a l'interval [2, 5], i la funció que emprem és ara $f(x)=x/(x-4)$,

x	-2	-1	0	1	1'9	5'1	6	7	8	9
f(x)	0'3	0'2	0	-0'3	-0'9	4'6	3	2'3	2	1'8

Amb les dues taules de valors podem dibuixar la gràfica d'aquesta funció definida per intervals:



Veiem que la funció és decreixent en $(-\infty, 3)\cup(3, 4)\cup(5, +\infty)$ i creixent en (4, 5). D'altra banda, és una funció acotada, amb cota inferior màxima $k_I=-2$ i cota superior mínima $k_S=5$.

Domini i recorregut

7. Donada la funció $f_1(x)=(x^3+x^2-4.x-4)/(x^3-2.x^2-x+2)$, aparentment sembla que tingui tres punts en que no està definida. Troba'ls. Determina una nova funció $y=f_2(x)$, simplificada de l'anterior, de manera que tingui un únic punt no pertanyent al domini. Quins són, doncs, els dominis $D(f_1)$ i $D(f_2)$?

Solució. Normalment, per buscar els punts en què una funció racional no està definida, igualem a zero el denominador, ja que si aquest és nul la funció pot fer-se infinita. En el nostre cas tenim l'equació $x^3-2.x^2-x+2=0$.

Una solució és clarament $x=1$, ja que la suma dels coeficients és nul·la. Comprovem-ho per la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & \downarrow & 1 & -1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & (0 \end{array}$$

Per calcular les altres dues arrels, resoldrem l'equació de segon grau resultant, $x^2-x-2=0$, que té com a solució $x=-1$ i $x=2$. En conseqüència, els punts en què la funció no està definida són els d'abscisses $x=-1$, $x=1$ i $x=2$.

Trobarem la funció f_2, simplificada de l'anterior, descomponent numerador i denominador en factors. Igualem a zero el numerador, $N=x^3+x^2-4.x-4=0$, i comprovem que $x=-1$ és una arrel,

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -4 & -4 \\ -1 & \downarrow & -1 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & (0 \end{array}$$

Les altres dues arrels seran les solucions de $x^2-4=0$, que són clarament $x=2$ i $x=-2$. D'aquesta manera el numerador es pot escriure com a producte de tres factors, $N=(x+1).(x-2).(x+2)$.

Hem de fer el mateix amb el denominador, $D=x^3-2.x^2-x+2=0$, del qual ja hem trobat les arrels, $x=-1$, $x=1$ i $x=2$. Per tant, el denominador pot ser donat com a $D=(x+1).(x-1).(x-2)$.

Substituint en la funció donada,

$$f_1(x)=\frac{x^3+x^2-4.x-4}{x^3-2.x^2-x+2}=\frac{(x+1).(x-2).(x+2)}{(x+1).(x-1).(x-2)} \quad \text{Simplificant, } f_2(x)=\frac{x+2}{x-1}$$

Recordem que es pot simplificar sempre que els factors siguin diferents de zero. En conseqüència, en l'expressió anterior hem suposat $x\neq-1$ i $x\neq2$.

Hem escrit la funció simplificada com una nova funció, f_2, per distingir que els dos dominis són diferents:

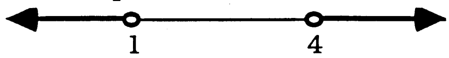
$$D(f_1)=R-\{-1,\ 1,\ 2\} \quad \text{i} \quad D(f_2)=R-\{1\}$$

Les dues funcions seran iguals en tots els punts menys els d'abscisses $x=-1$ i $x=2$, on f_1 no està definida, però sí que ho està la funció f_2.

8. Calcula els dominis de la funció multiforme $f(x)=\pm\sqrt{x^2-5.x+4}$ i de la funció uniforme $g(x)=+\sqrt{(1+x)/(2-x)}$. Fes una gràfica de les dues funcions, servint-te d'una taula de valors. A partir d'ella, digues els intervals de creixement-decreixement i els recorreguts.

Solució. Perquè hi hagi una funció irracional d'índex 2 és necessari que el radicand sigui no negatiu. Per tant, en la primera funció f haurà de passar que $x^2-5.x+4\geq 0$.

Aquesta inequació de segon grau la resoldrem calculant primer els punts frontera, arrels de l'equació $x^2-5.x+4=0$. Podem obtenir la solució ràpidament, trobant dos números de manera que la suma sigui 5 i el producte 4. Aquests són x=1 i x=4. Dibuixem una recta,



Calcularem el domini de f, i comprovarem pels diferents intervals en què ha quedat dividida la recta si existeix la funció.

Per $x<1$, per exemple $x=0$, $f(0)=\pm\sqrt{0^2-5.0+4}=\pm 2$, existeix.

Per $x=1$, $f(1)=\pm\sqrt{1^2-5.1+4}=0$, existeix.

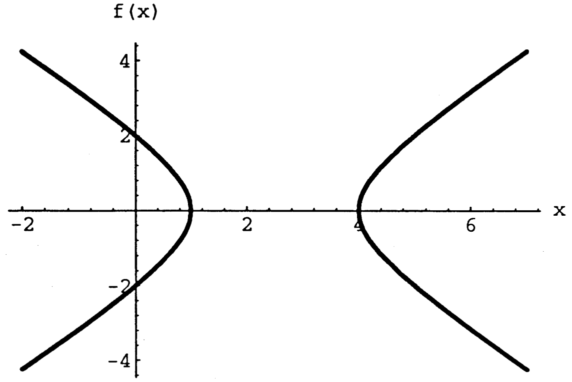
Per $1<x<4$, p. e. $x=2$, $f(2)=\pm\sqrt{2^2-5.2+4}=\pm\sqrt{-2}$, no existeix.

Per $x=4$, $f(4)=\pm\sqrt{4^2-5.4+4}=0$, existeix.

Per $x>4$, p. e. $x=5$, $f(5)=\pm\sqrt{5^2-5.5+4}=\pm 2$, existeix.

En conseqüència, el domini és $D(f)=(-\infty,\ 1]\cup[4,\ +\infty)$.

Procedirem de manera similar amb $g(x)=+\sqrt{(1+x)/(2-x)}$. Si volem que existeixi, s'haurà de verificar que $(1+x)/(2-x)\geq 0$, on els punts frontera (punts que poden separar el domini del no domini) els trobarem igualant a zero tant el numerador $1+x=0$, d'on $x=-1$, com el denominador, $2-x=0$, és a dir, $x=2$.



Situem els punts frontera en una recta i calcularem, com abans, si els intervals en què ha quedat dividida pertanyen o no al domini.

Per $x<-1$, p. e. $x=-2$, $g(-2)=+\sqrt{(1-2)/(2+2)}=+\sqrt{-1/4}$, no existeix.

Per $x=-1$, $g(-1)=+\sqrt{(1-1)/(2+1)}=+\sqrt{0}=0$, existeix.

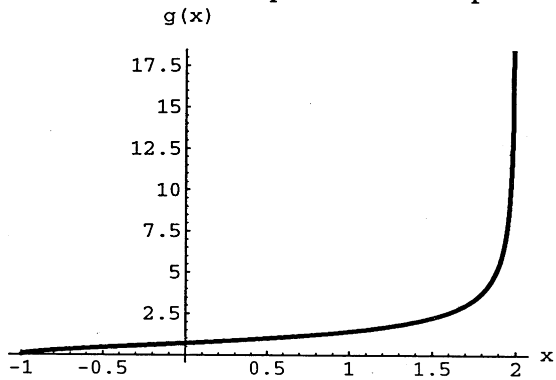
Per $-1<x<2$, p. e. $x=0$, $g(0)=+\sqrt{(1+0)/(2-0)}=+\sqrt{1/2}$, existeix.

Per $x=2$, $g(2)=+\sqrt{(1+2)/(2-2)}=+\sqrt{3/0}=+\infty$, no existeix.

Per $x>2$, p. e. $x=3$, $g(3)=+\sqrt{(1+3)/(2-3)}=+\sqrt{-4}$, no existeix.

El domini d'aquesta nova funció és $D(g)=[-1, 2)$.

Com que ja hem trobat valors i coneixem els dominis, podrem dibuixar les dues funcions, on la primera és a la plana anterior,



Per estudiar la monotonia de la primera funció, que és una funció multiforme, la descompondrem primer en dues branques.

En la primera branca, $f_1(x)=+\sqrt{x^2-5.x+4}$, veiem de la gràfica que és decreixent en l'interval $(-\infty, 1)$ i creixent en $(4, +\infty)$. Per a la segona branca, $f_2(x)=-\sqrt{x^2-5.x+4}$, és al contrari: creixent en l'interval $(-\infty, 1)$ i decreixent en $(4, +\infty)$.

Per a la segona funció, g, que és uniforme, veiem que és sempre creixent en $(-1, 2)$.

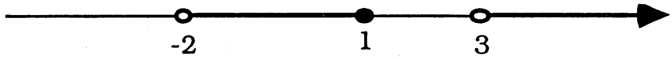
Finalment, observem que els recorreguts són $R(f)=(-\infty, +\infty)$, és a dir, tot l'eix real, i $R(g)=[0, +\infty)$, tots els reals no negatius.

9. Fes la gràfica de la funció $f(x)=+\sqrt{(6.x-6)/(x^2-x-6)}$, calculant-ne prèviament el domini. És una funció uniforme o multiforme? Quin és el recorregut? És creixent o decreixent? Quines són les antiimatges (o originals) de la unitat?

Solució. La funció donada existirà sempre i que el radicand sigui no negatiu, $(6.x-6)/(x^2-x-6)\geq 0$. Resolem aquesta inequació anul·lant el numerador i denominador i trobant els punts frontera.

Veiem que $x=1$ és una arrel del numerador. Les arrels del denominador són $x=[1\pm\sqrt{1^2-4.1.(-6)}]/2=(1\pm5)/2$, és a dir, $x=3$ i -2.

Representem aquests punts en una recta,



Per $x<-2$, p. e. $x=-3$, $f(-3)=+\sqrt{(6.(-3)-6)/((-3)^2-(-3)-6)}=+\sqrt{-4}$, n. e.

Per $x=-2$, $f(-2)=+\sqrt{(6.(-2)-6)/((-2)^2-(-2)-6)}=+\sqrt{-18/0}=+\sqrt{-\infty}$, n. e.

Per $-2<x<1$, p. e. $x=0$, $f(0)=+\sqrt{(6.0-6)/(0^2-0-6)}=+\sqrt{1}=1$, existeix.

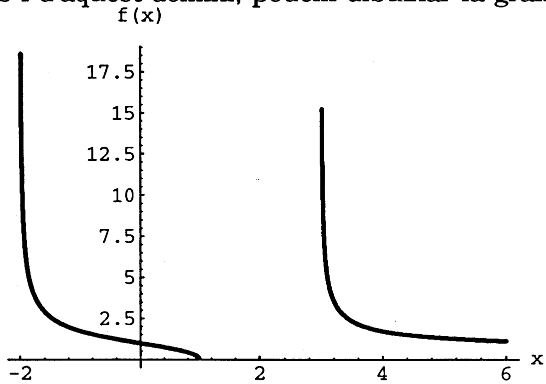
Per $x=1$, $f(1)=+\sqrt{(6.1-6)/(1^2-1-6)}=+\sqrt{0/(-6)}=+\sqrt{0}=0$, existeix.

Per $1<x<3$, p. e. $x=2$, $f(2)=+\sqrt{(6.2-6)/(2^2-2-6)}=+\sqrt{6/(-4)}$, n. ex.

Per $x=3$, $f(3)=+\sqrt{(6.3-6)/(3^2-3-6)}=+\sqrt{12/0}=+\sqrt{\infty}=+\infty$, n. ex.

Per $x>3$, p.e. $x=4$, $f(4)=+\sqrt{(6.4-6)/(4^2-4-6)}=+\sqrt{18/6}=+\sqrt{3}$, ex.

En conseqüència, el domini és $D(f)=(-2, 1]\cup(3, +\infty)$. A partir dels valors donats i d'aquest domini, podem dibuixar la gràfica:



És clar que la funció és uniforme, ja que explícitament hem indicat el signe positiu de l'arrel. A més, observem que té de recorregut $R(f)=[0, +\infty)$. Veiem que és una funció decreixent en el seu domini.

Per trobar les antiimatges, o originals, de la unitat, haurem de calcular els valors de x de manera que $f(x)=1$. Es tracta de resoldre l'equació irracional

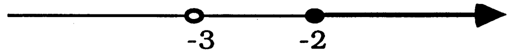
$$+\sqrt{(6.x-6)/(x^2-x-6)}=1$$

Elevant al quadrat i operant s'obté $6.x-6=x^2-x-6$. Simplificant, $6.x=x^2-x$, ens resulta l'equació $x^2-7.x=0$. Traient factor comú, tindrem $x.(x-7)=0$, que té d'arrels $x=0$ i $x=7$. Comprovem que aquests dos valors són les antiimatges de la unitat.

10. Una funció té la forma $f(x)=+5.\sqrt{x^3+8}/(x+3)^2$. Quin és el seu domini? Troba les imatges pels punts de l'interval [7, 11]. És una funció constant? Dibuixa la gràfica aproximada. És una funció acotada? Comprova que les abscisses $x_1=-1'71$, $x_2=2'15$ i $x_3=8'56$ separen els intervals de creixement i decreixement, estudiant la funció en la proximitat d'aquests punts.

Solució. La funció no està definida si $x^3+8<0$. El punt frontera, solució de $x^3+8=0$, és $x=-2$. D'altra banda, f tampoc no estarà definida si s'anul·la el denominador, $(x+3)^2=0$, és a dir, si $x=-3$.

Aquests dos punts, $x=-2$ i $x=-3$, dividiran la recta real en tres intervals. Estudiem la funció en ells per veure si hi està definida.



Per $x<-3$, p. e. $x=-4$, $f(-4)=+5.\sqrt{-56}$, no existeix.

Per $x=-3$, $f(-3)=+5.\sqrt{-19}/0$, no existeix.

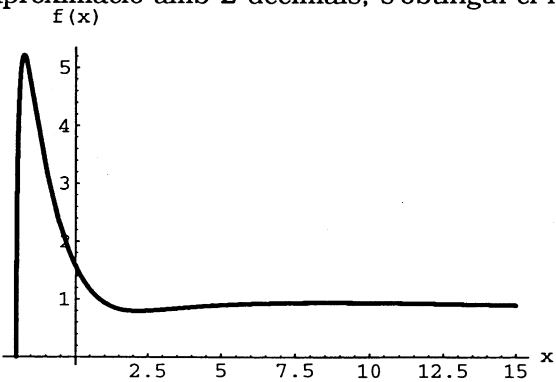
Per $-3<x<-2$, p. e. $x=-2'5$, $f(-2'5)=+5.\sqrt{-7'25}/0'5$, no existeix.

Per $x=-2$, $f(-2)=+5.\sqrt{0}/1=0$, existeix.

Per $x>-2$, p. e. $x=-1$, $f(-1)=+5.\sqrt{7}/4=3'3$, existeix.

Així, doncs, el domini és $D(f)=[-2, +\infty)$. Observem que $x=-3$, que anul·la el denominador, no ens aporta res perquè està situat en un interval en què no existeix ja l'arrel quadrada.

Si donem valors a la funció en l'interval [7, 11], observarem que les imatges valen aproximadament $f(7)=0'93$, $f(8)=0'94$, $f(9)=0'94$, $f(10)=0'93$ i $f(11)=0'93$. En aquest interval sembla que la funció és constant, però no és així, ja que primer és creixent (si $7<8$, llavors $f(7)<f(8)$) i després resulta ser decreixent (si $9<10$, llavors $f(9)>f(10)$). En cap moment no és constant, malgrat que en 10 i 11, en fer l'aproximació amb 2 decimals, s'obtingui el mateix valor.



Per dibuixar la gràfica haurem de donar més valors, diferents dels de l'interval donat. Sabem que $f(-2)=0$ i que $f(-1)=3'3$. A més,

x	0	1	2	3	4	5	6	17	47	97
f(x)	1'57	0'93	0'80	0'82	0'86	0'90	0'92	0'87	0'64	0'47

Hem donat també valors més grans a la x per veure que la funció es va acostant, encara que molt lentament, a l'eix X.

En prendre únicament el signe positiu de l'arrel, fa que sigui una funció uniforme que, com veiem, està acotada. Una cota inferior pot ser, per exemple, k_i=-1 o k_i=0, ja que la funció mai no és negativa, mentre que una cota superior pot ser k_s=6.

Per als valors x_1=-1'71, x_2=2'15 i x_3=8'56, agafem punts pròxims a ells i en determinem les imatges per estudiar la monotonia:

x	-2	-1'71	-1	2	2'15	3	8	8'56	9
f(x)	0	5'2	3'3	0'8	0'79	0'82	0'942	0'943	0'942

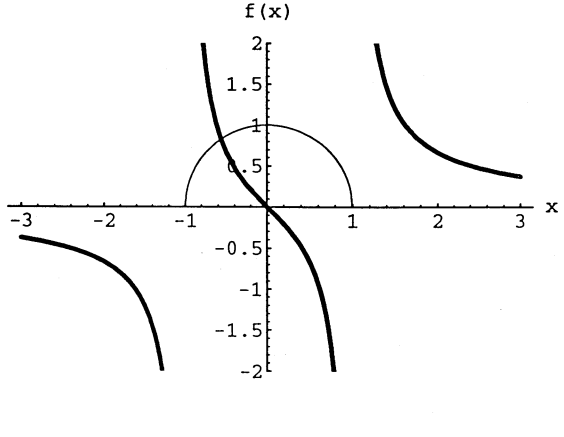
En el primer interval (-2, -1), la funció passa de ser creixent a decreixent, per tant el punt P_1(-1'71, 5'2) és un màxim relatiu. En el segon interval (2, 3), la funció passa de decreixent a creixent, i així el punt P_2(2'15, 0'79) és un mínim relatiu. Finalment, en el tercer interval (8, 9), la funció passa de creixent a decreixent, i d'aquesta manera el punt P_3(8'56, 0'943) és un altre màxim.

1.2 OPERACIONS ELEMENTALS AMB FUNCIONS

11. Siguin les funcions $f(x)=+\sqrt{1-x^2}$ i $g(x)=x/(x^2-1)$. Calcula el domini de cadascuna d'elles i també els de les funcions suma, producte i quocient. Són tots iguals?

Solució. Perquè existeixi la funció f és necessari que el radicand sigui més gran o igual a zero, $1-x^2 \geq 0$. Trobarem els punts frontera resolent l'equació $1-x^2=0$, i directament deduïm les seves arrels x=-1 i x=1.

Aquestes dues abscisses dividiran l'eix X en tres intervals, i com que per x=0, que està en el del mig, es verifica f(0)=+1, la funció existirà si $-1 \leq x \leq 1$, i no existirà fora d'ella, ja que obtindríem solucions imaginàries. Per tant, el domini és D(f)=[-1, 1].



Per a la segona funció, $g(x)=x/(x^2-1)$, veiem que no estarà definida si s'anul·la el denominador, $x^2-1=0$, que té les mateixes arrels que la funció anterior, $x=-1$ i $x=1$. Així, doncs, el seu domini és $D(g)=R-\{-1, 1\}$.

Ajudats per alguns valors, que podem trobar operant mentalment, tindrem les gràfiques de les dues funcions anteriors, que són a la plana anterior.

La funció suma, $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=+\sqrt{1-x^2}+[x/(x^2-1)]$, perquè existeixi hauran d'existir prèviament les dues funcions f i g. Per aquest motiu, el domini de la funció suma serà igual a la intersecció dels dominis. Obtindrem $D(f+g)=(-1, 1)$.

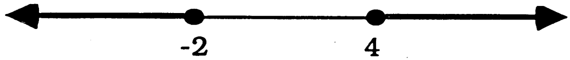
Per a la funció producte, $(f\cdot g)(x)=f(x).g(x)=+\sqrt{1-x^2}.[x/(x^2-1)]$ podem dir exactament el mateix, $D(f\cdot g)=(-1, 1)$.

Ara bé, per a la funció quocient, $(f/g)(x)=+\sqrt{1-x^2}/[x/(x^2-1)]$, a més que existeixin les funcions del numerador i del denominador, també haurà d'existir aquesta funció quocient i, per tant, no es podrà anul·lar el denominador. Com que per $x=0$ és $g(x)=0$, en el domini comú $(-1, 1)$ li haurem de treure aquest punt. Deduïm, doncs, que $D(f/g)=(-1, 1)-\{0\}$.

També podem posar $D(f/g)=(-1, 0)\cup(0, 1)$. En conseqüència, els tres dominis, $D(f+g)$, $D(f\cdot g)$ i $D(f/g)$, no són tots iguals.

12. Determina els dominis de les dues funcions $f_1(x)=\sqrt{x^2-2.x-8}$ i $f_2(x)=\sqrt{|x^2-2.x-3|-5}$. Quin és el domini de la funció quocient $f=f_1/f_2$? I el domini de la nova funció $g(x)=\sqrt{(x^2-2.x-8)/(|x^2-2.x-3|-5)}$? Fes una gràfica d'aquesta última en l'interval $A=[-5, 7]$. Quin és el recorregut? (Suposem totes les arrels quadrades positives).

Solució. La primera funció $f_1(x)=\sqrt{x^2-2.x-8}$ existirà sempre que $x^2-2.x-8\geq0$. Els dos punts frontera, solució de $x^2-2.x-8=0$, són $x=-2$ i $x=4$. Com sabem, aquests punts separaran l'interval en què la corba existeix del que no existeix. Estudiem-ho en aquest cas:



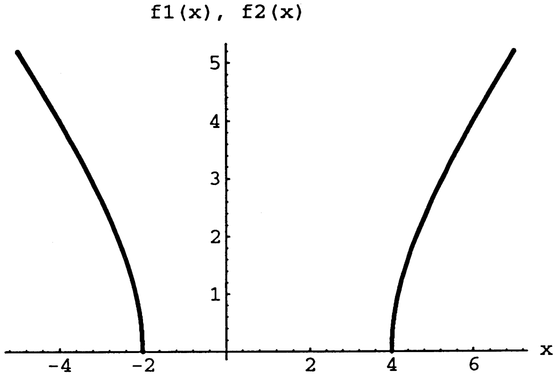
Si provem per $x=0$, tindrem $f_1(0)=\sqrt{0^2-2.0-8}=\sqrt{-8}$, que és un valor imaginari. Per tant, el domini haurà de ser l'interval exterior, $\boxed{D(f_1)=(-\infty, -2]\cup[4, +\infty)}$. Hem inclòs els punts frontera, ja que en aquests punts la funció s'anul·la i, per tant, existeix.

Prenem la nova funció $f_2(x)=\sqrt{|x^2-2.x-3|-5}$ i observem que existirà quan $|x^2-2.x-3|-5\geq0$. Els punts fontera els trobarem resolent l'equació $|x^2-2.x-3|-5=0$, és a dir, quan $|x^2-2.x-3|=5$. D'aquesta funció de valor absolut es desprenen dues possibilitats:

Si x^2-2.x-3≥0, que és quan x≤-1 o x≥3, tenim x^2-2.x-3=5, o bé x^2-2.x-8=0, que té com a arrels x=-2 i x=4.

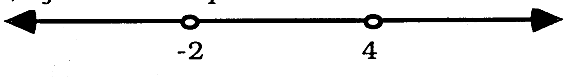
Si ara x^2-2.x-3<0, que és quan -1<x<3, tenim -(x^2-2.x-3)=5, o bé x^2-2.x+2=0. En trobar les seves arrels, obtenim $x=(2\pm\sqrt{4-8})/2$, que té solucions complexes i, en conseqüència, no té cap arrel real.

D'aquesta manera, els únics punts frontera són x=-2 i x=4. Com que per x=0 ens resulta $f_2(0)=\sqrt{|0^2-2.0-3|-5}=\sqrt{-2}$, la corba no passarà per x=0 i tampoc en l'interval (-2, 4). Deduïm, doncs, que el domini serà el mateix que el de f_1, $\boxed{D(f_2)=(-\infty, -2]\cup[4, +\infty)}$.



Per a la funció quocient $f=f_1/f_2=(\sqrt{x^2-2.x-8})/(\sqrt{|x^2-2.x-3|-5})$, en principi el domini ha de ser igual a la intersecció dels dos dominis, però també haurem d'eliminar els punts en que el denominador s'anul·la, ja que en aquests punts la funció es fa infinita. Com sabem, l'equació $|x^2-2.x-3|-5=0$ té per arrels x=-2 i x=4. Consegüentment, el domini de f és, $\boxed{D(f)=(-\infty, -2)\cup(4, +\infty)}$.

Considerem ara la nova funció $g(x)=\sqrt{(x^2-2.x-8)/(|x^2-2.x-3|-5)}$, que existirà sempre i que el radicand sigui no negatiu. Els punts frontera els trobarem anul·lant tant el numerador com el denominador, i ja hem vist que ens donaran x=-2 i x=4.



Estudiem diferents punts de la recta, per veure si pertanyen o no al domini.

Per x<-2, p. e. x=-3, $g(3)=\sqrt{(9+18-8)/(|9+18-3|-5)}=1$, existeix.

Per x=-2, $g(-2)=\sqrt{(4+4-8)/(|4+4-3|-5)}=0/0$=indet., no existeix.

Per -2<0<4, p. e. x=0, $g(0)=\sqrt{(0-0-8)/(|0-0-3|-5)}=2$, existeix.

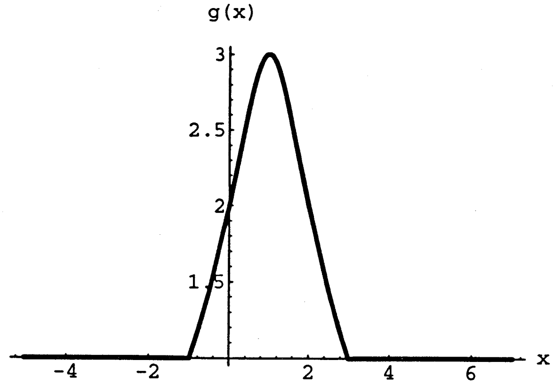
Per x=4, $g(4)=\sqrt{(16-8-8)/(|16-8-3|-5)}=0/0$=indet., no existeix.

Per x>4, p. e. x=5, $g(5)=\sqrt{(25-10-8)/(|25-10-3|-5)}=1$, existeix.

El domini de la funció g és, doncs, $D(g)=(-\infty, -2)\cup(-2, 4)\cup(4, +\infty)$ o bé $\boxed{D(g)=R-\{-2, 4\}}$.

Per dibuixar aquesta última funció podem ajudar-nos d'una taula de valors

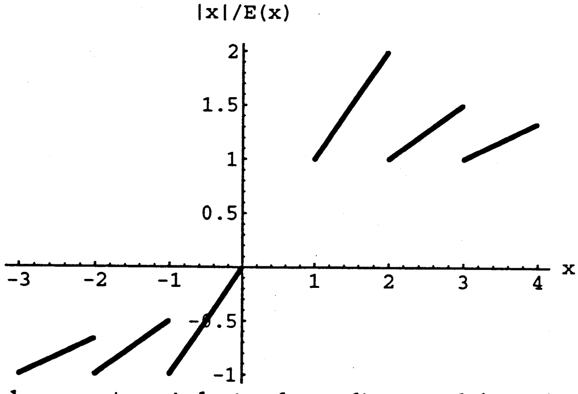
x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
g(x)	1	1	1	N.E.	1	2	3	2	1	N.E.	1	1	1



Observem que el recorregut o conjunt imatge és R(g)=[1, 3].

13. Calcula el domini de la funció $f_1(x)=|x|/E(x)$. Fes-ne després la gràfica per mitjà d'una taula de valors de l'interval (-3, 4). Quin és el seu recorregut? Fes el mateix estudi per a la seva funció recíproca, $f_2=1/f_1$.

Solució. La funció f_1, que és el quocient entre les funcions "valor absolut" i "part entera", no existirà quan s'anul·li el denominador, és a dir, quan x sigui un valor de l'interval [0, 1), ja que per als números d'aquest interval la part entera és 0. En conseqüència, el domini de f_1 és $D(f_1)=(-\infty, 0)\cup[1, +\infty)$.



Donem valors, enters i decimals en l'interval (-3, 4):

x	-2'9	-2'1	-2	-1'9	-1'1	-1	-0'9	-0'1	1	1'9	2	2'9	3	3'9
$f_1(x)$	-0'9	-0'7	-1	-0'9	-0'5	-1	-0'9	-0'1	1	1'9	1	1'4	1	1'3

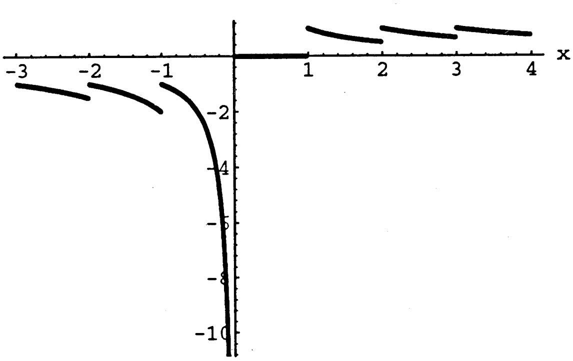
A la plana anterior hem dibuixat la gràfica. Observem que està formada per segments de recta amb diferents pendents. També podíem haver fet la gràfica, analíticament, com en el problema 6, trobant els pendents de les rectes.

Veiem que el seu recorregut és $R(f_1)=[-1, 0)\cup[1, 2)$. Quant a la funció recíproca, $f_2(x)=E(x)/|x|$, l'únic punt en que no està definida és en x=0, ja que $f_2(0)=E(0)/|0|=0/0$ no és cap valor real. Així el domini és $D(f_2)=R-\{0\}$.

Com en la funció f_1, formem una taula de valors en (-3, 4):

x	-2'5	-2	-1'5	-1	-0'5	0'5	1	1'5	2	2'5	3	3'5
$f_2(x)$	-1'2	-1	-1'3	-1	-2	0	1	0'6	1	0'8	1	0'8

Amb aquests valors dibuixem la gràfica, que ja no està formada per segments de recta com la f_1, sinó de corba (hipèrbola):



Observem que el recorregut és $R(f_2)=(-\infty, -1]\cup\{0\}\cup(0'5, 1]$.

1.3 COMPOSICIÓ DE FUNCIONS

14. Un venedor de productes electrodomèstics ha comprovat que el nombre d'unitats venudes és, de manera aproximada, inversament proporcional al quadrat del preu en la forma $V(p)=512000/p^2$. Se sap també que el preu varia mensualment per mitjà de la funció $p(t)=0'05.t^2+0'4.t+31$. Expressa les vendes en funció del temps i calcula el nombre de productes venuts al segon mes i al desè mes. Fes la gràfica per als dos primers anys. Al cap de quants mesos es tindrà un ritme de venda d'aproximadament 173 prod. mensuals?

Solució. Veiem que les vendes són funció composta del temps, ja que $V\to p\to t$. Per posar-les en la forma V(t), només caldrà que substituïm $V(t)=512.000/(0'05.t^2+0'4.t+31)^2$.

El nombre de productes venuts al 2n mes (t=2) i al 10è mes són:

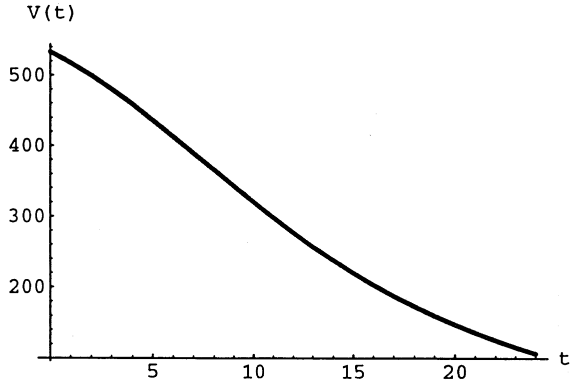
$V(2)=512.000/(0'05.2^2+0'4.2+31)^2=512.000/32^2=500$ prod.

$V(10)=512.000/(0'05.10^2+0'4.10+31)^2=...=320$ prod.

Donem valors per als dos primers anys, en total 24 mesos:

t	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
V(t)	500	458	413	366	320	276	237	203	173	147	125	106

Dibuixem la gràfica amb aquests valors, fixem-nos que és una funció monòtona decreixent, la qual cosa és lògica ja que, en augmentar el temps, també augmentarà el preu i, per tant, disminuiran les vendes,



De la taula de valors ja podem veure que la venda de 173 prod. mensuals es correspon al mes t=18, és a dir, al cap d'un any i mig. No obstant això, farem el càlcul adient per trobar aquest mes.

Com que f(t)=173, tindrem $512.000/(0'05.t^2+0'4.t+31)^2=173$. Operant, $(0'05.t^2+0'4.t+31)^2=2959'53$.

Si traiem l'arrel quadrada positiva, $0'05.t^2+0'4.t+31=54'4$ i simplifiquem, $0'05.t^2+0'4.t-23'4=0$, $5.t^2+40.t-2340=0$.

Ens queda l'equació $t^2+8.t-468=0$, que si la resolem ens dóna les arrels t=18 i t=-26, on aquesta última no és vàlida ja que el temps ha de ser positiu. Per tant, t=18 mesos, com ja havíem trobat.

15. Sigui la funció y=f(x) definida per intervals com a f(x)=x+1 si $x\leq 0$ i f(x)=2.x+1 si x>0, i sigui també la funció $g(x)=x^2-1$. Calcula les dues funcions compostes g•f i f•g, fes-ne les gràfiques.

Solució. Abans de trobar l'exercici podem dibuixar a la plana següent les dues gràfiques, donant, mentalment, valors a la x.

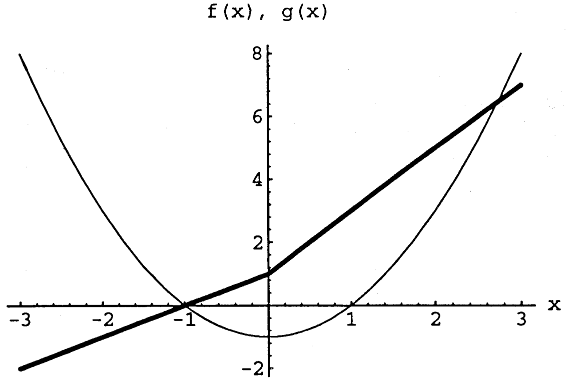
Calculem en primer lloc la funció composta g•f, sabent que es verifica (g•f)(x)=g[f(x)]. Ara bé, com que la f està definida per intervals, també ho haurem de tenir en compte:

Si $x\leq 0$, $(g\bullet f)(x)=g[f(x)]=[f(x)]^2-1=(x+1)^2-1=x^2+2.x+1-1=x^2+2.x$.

Si x>0, $(g\bullet f)(x)=[f(x)]^2-1=(2.x+1)^2-1=4.x^2+4.x+1-1=4.x^2+4.x$

Apuntem, doncs, que la funció g•f també estarà definida per intervals: si $x\leq 0$, $(g\bullet f)(x)=x^2+2.x$ i si x>0, $(g\bullet f)(x)=4.x^2+4.x$.

La gràfica següent mostra la primera funció amb traç gruixut i la segona amb traç fi,



Per calcular l'altra funció composta, f•g, hem de tenir en compte que la f, definida per intervals, s'ha d'aplicar després de la g. Per aquest motiu ens fixarem que $g(x) \leq 0$ quan $-1 \leq x \leq 1$ i, per tant, $g(x) > 0$ quan $x < -1$ o bé $x > 1$.

Estudiem, doncs, aquests intervals:

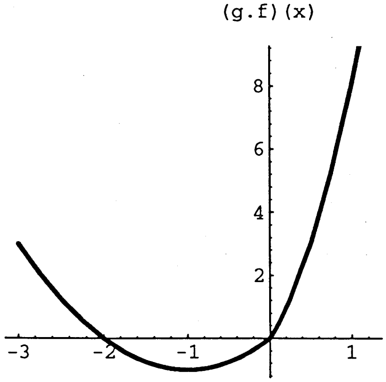
Per $-1 \leq x \leq 1$, $(f \bullet g)(x) = f[g(x)] = g(x) + 1 = (x^2 - 1) + 1 = x^2$

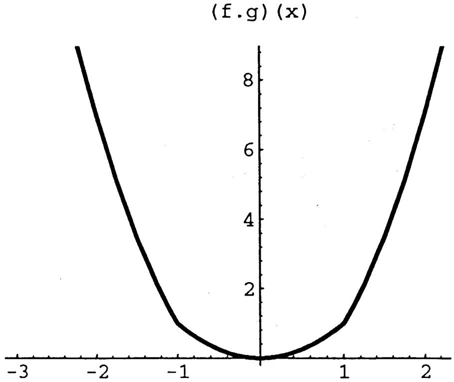
Per $x < -1$ o $x > 1$, $(f \bullet g)(x) = f[g(x)] = 2.g(x) + 1 = 2.(x^2 - 1) + 1 = 2.x^2 - 1$

En resum, i si emprem la noció de valor absolut, la funció composta f•g estarà definida per intervals com $(f \bullet g)(x) = x^2$ si $|x| \leq 1$ i $(f \bullet g)(x) = 2.x^2 - 1$ si $|x| > 1$.

Podem dibuixar ara les dues gràfiques, fent prèviament unes taules de valors,

t	-2	-1'5	-1	-0'5	0	0'5	1	1'5	2
(g•f)(x)	0	-0'75	-1	-0'75	0	3	8	15	24
(f•g)(x)	7	3'5	1	0'25	0	0'25	1	3'5	7





Veiem clarament que les dues gràfiques estan formades per trossos de paràbola.

16. Per a les funcions $f(x)=x/(x^2-36)$ i $g(x)=\sqrt{(1-5.x)/(9.x+1)}$, calcula els seus dominis respectius. Quina és la funció composta g•f? I el seu domini? Dibuixa aproximadament la funció composta en l'interval del seu domini, tot suposant que és una funció multiforme.

Solució. El domini de la primera funció és D(f)=R-{-6, 6}, ja que els dos valors x=-6 i x=6 són els punts en què el denominador s'anul·la i, per tant, la funció es fa infinita.

Perquè la segona funció existeixi ha de succeir que el radicand sigui no negatiu. Els punts frontera es trobaran igualant tant el numerador com el denominador a zero, 1-5.x=0 i 9.x+1=0, i s'obtindrà respectivament x=1/5 i x=-1/9. Estudiem els intervals en que aquests punts han dividit l'eix X.

Per x<-1/9, p. e. x=-1, $g(-1)=\sqrt{(1+5)/(-9+1)}=\sqrt{-6/8}$, no existeix.

Per x=-1/9, $g(-1/9)=\sqrt{(1+5/9)/(-1+1)}=\sqrt{(14/9)/0}=\infty$, no existeix.

Per -1/9<x<1/5, p.e. x=0, $g(0)=\sqrt{(1-0)/(0+1)}=1$, existeix.

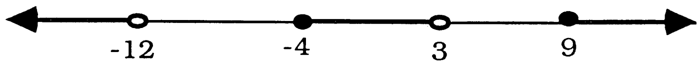
Per x=1/5, $g(1/5)=\sqrt{(1-1)/(9/5+1)}=\sqrt{0/(14/5)}=0$, existeix.

Per x>1/5, p.e. x=1, $g(1)=\sqrt{(1-5)/(9+1)}=\sqrt{-4/10}$, no existeix.
En conseqüència, el domini és D(g)=(-1/9, 1/5].

Calculem a continuació la funció composta g•f, que s'obté aplicant primer f i després g, com indiquem a continuació:

$$(g\bullet f)(x)=g[f(x)]=\sqrt{\frac{1-5.f(x)}{9.f(x)+1}}=\sqrt{\frac{1-5.[x/(x^2-36)]}{9.[x/(x^2-36)]+1}}=\ldots=\sqrt{\frac{x^2-5.x-36}{x^2+9.x-36}}$$

Estudiem el domini d'aquesta nova funció g•f calculant els punts frontera. Del numerador obtenim l'equació $x^2-5.x-36=0$ amb arrels x=9 i x=-4, i del denominador, $x^2+9.x-36=0$, que té per arrels x=3 i x=-12.



Per x<-12, p. e. x=-13, (g•f)(-13)=...=±3'5, existeix.

Per x=-12, (g•f)(-12)=...=±∞, no existeix.

Per -12<x<-4, p. e. x=-5, $(g\bullet f)(-5)=\sqrt{-1/4}$, no existeix.

Per x=-4, (g•f)(-4)=...=0, existeix.

Per -4<x<3, p. e. x=0, (g•f)(0)=...=±1, existeix.

Per x=3, (g•f)(3)=...=±∞, no existeix.

Per 3<x<9, p. e. x=4, $(g\bullet f)(4)=\sqrt{-5/2}$, no existeix.

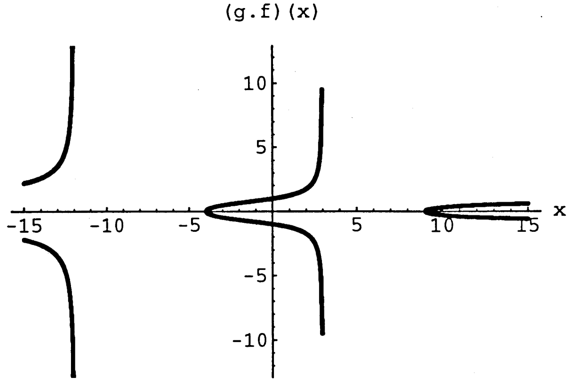
Per x=9, (g•f)(9)=...=0, existeix.

Per x>9, p. e. x=10, (g•f)(x)=...=±0'3, existeix.

En conseqüència, el domini és D(g•f)=(-∞, -12)∪[-4, 3)∪[9, +∞). Podem dibuixar la gràfica d'aquesta funció multiforme tot donant una sèrie de valors,

x	-15	-13	-4	-2	0	2	9	10	12
(g•f)(x)	2'2	±2'6	0	±0'6	±1	±1'7	0	±0'3	±0'4

La gràfica tindrà aproximadament la forma



Funció inversa

17. S'ha comprovat que el nombre d'hores de treball necessàries per a repartir propaganda d'un determinat producte al x% de les cases d'una població, segueix la funció f(x)=12.x/(125-x). Quin és el domini matemàtic d'aquesta funció? I en la pràctica, quin és el domini? Quantes hores es necessitaran per a distribuir propaganda a la quarta part, a la meitat i a les tres quartes parts de la població? Quants dies faran falta per a repartir-ho a tot el poble? Fes la gràfica de la funció.

Troba també la funció inversa f^{-1} i, a partir d'ella, calcula el percentatge de gent que ha rebut propaganda, sabent que s'han treballat en total 13h. Comprova el resultat amb la funció original.

Solució. El domini de la funció f és D(f)=R-{125}. Li hem dit domini matemàtic. Ara bé, com que en la pràctica la x de la funció f(x)=12.x/(125-x) significa percentatge, la x variarà del 0% al 100%, i així el domini, diem-ne econòmic, serà D_E(f)=[0, 100].

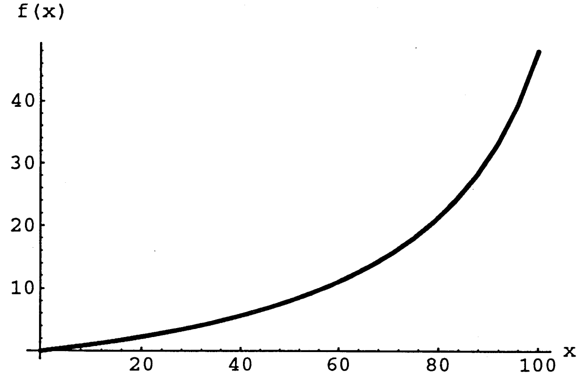
Per saber el nombre d'hores necessitades per a repartir propaganda a la quarta part de la població, x=25%, només ens caldrà substituir, f(25)=12.25/100=12/4=3 hores. Farem el mateix per x=50% i x=75% i obtenim f(50)=12.50/75=8 h i f(75)=12.75/50=18 h, respectivament.

Igualment, per a repartir-ho a tot el poble, x=100%, necessitarem f(100)=12.100/25=48 h, que equival a treballar durant 2 dies complets.

Donem valors en l'interval pràctic que va del 0% al 100%,

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
f(x)	0	1'0	2'2	3'7	5'6	8	11	15'2	21'3	30'8	48

La gràfica serà d'una corba monòtona creixent. De passada també apuntem la inversa, amb traç fi, que calcularem tot seguit,



Es tracta ara de determinar la funció inversa f^{-1}, comprovant que és uniforme i, amb aquesta finalitat, seguirem la regla dels quatre passos:

(1) Substituïm f(x) per y: y=12.x/(125-x).

(2) Aïllem la x: (125-x).y=12.x , 125.y-x.y=12.x , 125.y=12.x+x.y , 125.y=x.(12+y) , x=125.y/(12+y).

(3) Permutem variables, x→y i y→x: y=125.x/(12+x).

(4) Substituïm la y per $f^{-1}(x)$: $\boxed{f^{-1}(x)=125.x/(12+x)}$.

Ara, en la funció inversa, la x representarà el nombre d'hores treballades per repartir propaganda, i $f^{-1}(x)$ serà el percentatge de població que l'ha rebuda. Com que en el nostre cas tenim x=13 h, trobem directament que $f^{-1}(x)=125.13/25=65$, i així el percentatge de població serà del 65%.

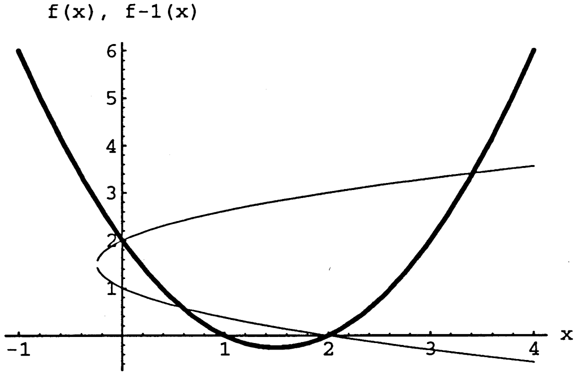
Comprovem que és cert amb la funció directa:

f(x)=12.x/(125-x), f(65)=12.65/(125-65)=13 h.

18. Fes la gràfica de la funció $f(x)=x^2-3.x+2$, i observa que no és una funció injectiva. Troba després l'interval A en què la funció és creixent i prova que en A la funció sí que és injectiva. Defineix la funció f_A en aquest interval i calcula'n la inversa $(f_A)^{-1}$, i comprova que és uniforme. En quin interval B estarà definida $(f_A)^{-1}$?

Solució. Si donem valors a la x, f(-1)=6, f(0)=2, f(1)=0, f(2)=0, f(3)=2, f(4)=6, etc., obtindrem una sèrie de punts que ens permetran dibuixar la gràfica de la funció donada. Naturalment, si la corba no queda prou clara, pots donar més valors.

Per saber el punt més baix de la corba, el mínim, ens fixem en el fet que la corba és simètrica respecte a un eix vertical que passa pel punt mínim (anomenat vèrtex de la paràbola). Així, per exemple, f(1)=0 i f(2)=0. Evidentment, l'abscissa del mínim es trobarà fent la mitjana de les dues abscisses, x=(1+2)/2=1'5, i li correspon una ordenada igual a $f(1'5)=1'5^2-3.1'5+2=-0'25$. El punt mínim o vèrtex és, doncs, V(1'5, -0'25).



La funció és creixent en l'interval (1'5, +∞). Provem que en aquest interval la funció sí que és injectiva. Agafem dues imatges iguals, f(a)=f(b), i provem que també forçosament a=b.

$$f(a)=f(b)\ ,\ a^2-3.a+2=b^2-3.b+2\ ,\ a^2-3.a=b^2-3.b\ ,\ a^2-b^2=3.a-3.b$$

Descomponent en factors, (a+b).(a-b)=3.(a-b) , (a+b-3).(a-b)=0. Ara bé, com que a i b pertanyen a l'interval (1'5, +∞) és a+b>3 i, per tant, $a+b-3\neq0$. Conseqüentment, si simplifiquem per a+b-3, obtindrem a-b=0, és a dir, l'única solució és a=b, i això demostra que la funció és una aplicació injectiva en aquest interval.

Podem definir la funció restringida en A, f_A com a aquella funció que està definida només en els valors de l'interval A=[1'5, +∞) i val $f_A(x)=x^2-3.x-2$. Trobem la seva inversa, $(f_A)^{-1}$:

(1) Substituïm $f_A(x)$ per y: $y=x^2-3.x+2$.

(2) Aïllem la x: $x^2-3.x+2-y=0$, $x^2-3.x+(2+y)=0$. Si la resolem, $x=(3\pm\sqrt{9-4.(2-y)})/2$, $x=(3\pm\sqrt{1+4.y})/2$.

(3) Permutem variables: $y=(3\pm\sqrt{1+4.x})/2$.

(4) Substituïm la y per $(f_A)^{-1}(x)$: $(f_A)^{-1}(x)=(3\pm\sqrt{1+4.x})/2$.

Ens preguntem ara si les dues determinacions de la imatge degudes al doble signe ± són totes dues vàlides. Com que el conjunt de definició de f és A=[1'5, +∞), la imatge de la funció inversa ha de ser aquest interval perquè, com sabem, $R(f^{-1})=D(f)$.

Si agaféssim el signe menys, obtindríem valors com (3-a)/2, on a és positiu, i serien, per tant, inferiors a 1'5, per la qual cosa no pertanyerien a l'interval A. En canvi, prenent el signe positiu, les imatges sí que pertanyen a A i, per tant, deduïm que la funció inversa, que per cert és uniforme, és:

$$\boxed{(f_A)^{-1}(x)=(3+\sqrt{1+4.x})/2}\ .$$

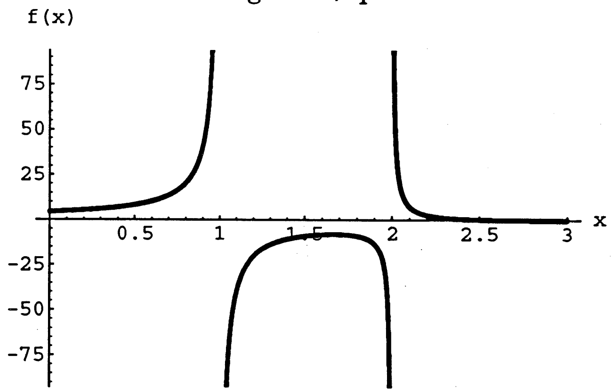
Perquè existeixi la funció inversa ha de passar que $1+4.x\geq 0$. El punt frontera és $x=-1/4=-0'25$ i, com que per als valors superiors o iguals a ell es compleix la desigualtat anterior, observem que el domini de la funció inversa és $D((f_A)^{-1})=[-0'25, +\infty)$. Per tant, la funció inversa està definida en l'interval $B=[-0'25, +\infty)$.

Observa que es compleix $D(f^{-1})=R(f)$.

19. Per a la funció $f(x)=(x^2-6.x+9)/(x^2-3.x+2)$, troba els seus zeros. Quin és el domini? Troba ara la funció inversa, f^{-1}. És una funció uniforme o multiforme? Quin és el seu domini? Comprova, fent-ne la composició, que efectivament f i f^{-1} són inverses.

Solució. Els zeros d'una funció són les abscisses dels punts d'ordenada nul·la, és a dir, els punts de tall amb l'eix X. Per trobar-los igualarem a zero la funció, $f(x)=0$. D'aquí obtenim $x^2-6.x+9=0$, una equació de segon grau que si la resolem veurem que ens dóna la solució doble $x=3$.

La funció no està definida en els punts en què es fa infinita, i això passa quan s'anul·la el denominador, $x^2-3.x+2$. Com que aquesta equació té d'arrels $x=1$ i $x=2$, el domini serà $D(f)=R-\{1, 2\}$. Ho podem veure amb la seva gràfica, que realitzem a continuació:



Calculem a continuació la funció inversa f^{-1}, emprant la regla dels quatre passos:

(1) Substituïm f(x) per y: $y=(x^2-6.x+9)/(x^2-3.x+2)$.

(2) Aïllem la x: $(x^2-3.x+2).y=x^2-6.x+9$, $x^2.y-3.x.y+2.y=x^2-6.x+9$, $x^2.y-3.x.y+2.y-x^2+6.x-9=0$, $(y-1).x^2+(6-3.y).x+(2.y-9)=0$. Si resolem ara aquesta equació de segon grau,

$$x=\frac{(3.y-6)\ \pm\sqrt{(6-3.y)^2-4.(y-1).(2.y-9)}}{2.(y-1)}$$

Resolem primer el discriminant,

$$\Delta=36-36.y+9.y^2-8.y^2+36.y+8.y-36=y^2+8.y$$

Substituint i traient factor comú,

$$x=\frac{3.(y-2)\ \pm\sqrt{y.(y+8)}}{2.(y-1)}$$

(3) i (4) Permutem variables i substituïm la y per $f^{-1}(x)$:

$$f^{-1}(x)=\frac{3.(x-2)\ \pm\sqrt{x.(x+8)}}{2.(x-1)}$$

La funció anterior és una funció multiforme, ja que l'arrel quadrada comporta un doble signe, i així hi haurà valors de la x que tindran dues imatges. Això és degut al fet que f no és una aplicació injectiva

Estudiem el domini de f^{-1}, i observem que els punts x=0, x=-8 i x=1 són punts frontera, els dos primers per a anul·lar el radicand i l'últim per a anul·lar el denominador. Dibuixem aquests punts en la recta real,

Estudiem per a quins punts dels intervals anteriors existirà la funció inversa:

Per x<-8, p. e. x=-9, $f^{-1}(-9)=[3.(-11)\pm\sqrt{-9.(-1)}]/[2.(-10)]$ que té dues solucions 1'8 i 1'5. Per tant, existeix.

Per x=-8, clarament $f^{-1}(-8)=[3.(-10)]/[2.(-9)]=1'6$, existeix.

Per -8<x<0, p. e. x=-1, el radicand és $\Delta=(-1).(7)=-7$, i com que és negatiu, no existeix la funció.

Per x=0 tenim $f^{-1}(0)=[3.(-2)]/[2.(-1)]=3$, existeix.

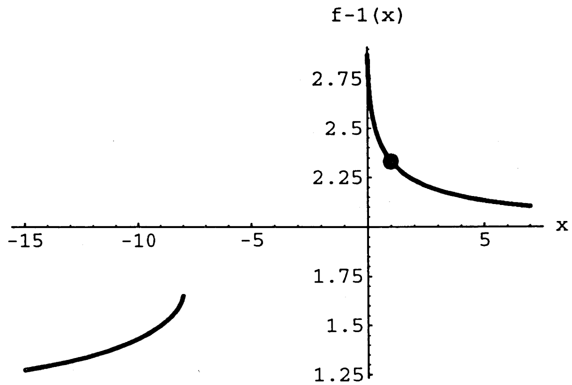
Per 0<x<1, p. e. x=0'5, $f^{-1}(0'5)=...=6'5$ i 2'5, existeix.

Per x=1, $f^{-1}(1)=[3(-1)\pm3]/0=$Ind. i ∞, no existeix.

Per x>1, p. e. x=2, $f^{-1}(2)=(0\pm4'4)/2=\pm2'2$, existeix.

En resum, comprovem que el domini és

$$\boxed{D(f)=(-\infty,\ -8]\cup[0,\ 1)\cup(1,\ +\infty)}$$



Hem de fer notar que el punt P(1, 2'33) de la figura anterior no pertany a la corba.

Finalment, fent la composició de f^{-1} i f, comprovem que conté el grafo identitat. Operant f amb f^{-1} tindrem,

$$(f^{-1}\bullet f)(x)= f^{-1}[f(x)]= \frac{3.[f(x)-2] \pm\sqrt{f(x).[f(x)+8)]}}{2.[f(x)-1]}$$

Calculem a part els claudàtors,

$$f(x)-2= \frac{x^2-6.x+9}{x^2-3.x+2} -2 = \frac{x^2-6.x+9-2.x^2+6.x-4}{x^2-3.x+2} = \frac{-x^2+5}{x^2-3.x+2}$$

$$f(x)+8= \frac{x^2-6.x+9}{x^2-3.x+2} +8 = \frac{x^2-6.x+9+8.x^2-24.x+16}{x^2-3.x+2} = \frac{9x^2-30.x+25}{x^2-3.x+2}$$

$$f(x)-1= \frac{x^2-6.x+9}{x^2-3.x+2} -1 = \frac{x^2-6.x+9-x^2+3.x-2}{x^2-3.x+2} = \frac{-3.x+7}{x^2-3.x+2}$$

Substituint,

$$(f^{-1}\bullet f)(x)= \frac{3.\frac{-x^2+5}{x^2-3.x+2} \pm\sqrt{\frac{x^2-6.x+9}{x^2-3.x+2}.\frac{9.x^2-30.x+25}{x^2-3.x+2}}}{2.\frac{-3.x+7}{x^2-3.x+2}}$$

Com que el radicand està format per quadrats perfectes, ja que $x^2-6.x+9=(x-3)^2$, $9.x^2-30.x+25=(3.x-5)^2$ i també $(x^2-3.x+2)^2$, podem simplificar l'arrel i després el denominador comú $x^2-3.x+2$, obtenim:

$$(f^{-1}\bullet f)(x)= \frac{3.(-x^2+5) \pm(x-3).(3.x-5)}{2.(-3.x+7)} = \frac{(-3.x^2+15) \pm (3.x^2-14.x+15)}{-6.x+14}$$

Com que és una funció multiforme, tenim més d'una determinació per la imatge. Si prenem la branca corresponent a la determinació donada pel signe menys de l'arrel, tenim:

$$(f^{-1}\bullet f)(x)= \frac{(-3.x^2+15) - (3.x^2-14.x+15)}{-6.x+14} = \frac{-6.x^2+14.x}{-6.x+7} = \frac{x.(-6.x+7)}{(-6.x+7)} = x$$

20. Per a la funció uniforme $f(x)=2.(x-2)/\sqrt{x-3}$, on x i f(x) són variables econòmiques (x>0 i f(x)>0) i on hem pres la determinació positiva de l'arrel, calcula'n la inversa f^{-1}. És una funció uniforme o multiforme? Determina els dos dominis i dibuixa les dues corbes per mitjà d'una taula de valors. Estudia també la monotonia i les cotes inferiors màximes de les dues gràfiques.

Solució. Trobarem la inversa de la funció donada emprant la regla dels quatre passos,

(1) Substituïm f(x) per y: $y=2.(x-2)/\sqrt{x-3}$.

(2) Aïllem la x: $y^2=4.(x-2)^2/(x-3)$, $(x-3).y^2=4.(x^2-4.x+4)$,

$$x.y^2-3.y^2-4.x^2+16.x-16=0 \ , \ -4.x^2+(y^2+16).x+(-3.y^2-16)=0 \ ,$$

$$4.x^2-(y^2+16).x+(3.y^2+16)=0.$$

Resolent aquesta equació de segon grau,

$$x=\frac{(y^2+16)\pm\sqrt{(y^2+16)^2-4.4.(3.y^2+16)}}{2.4}$$

Desenvolupem el discriminant,

$$\Delta=y^4+32.y^2+256-48.y^2-256=y^4-16.y^2=y^2.(y^2-16)$$

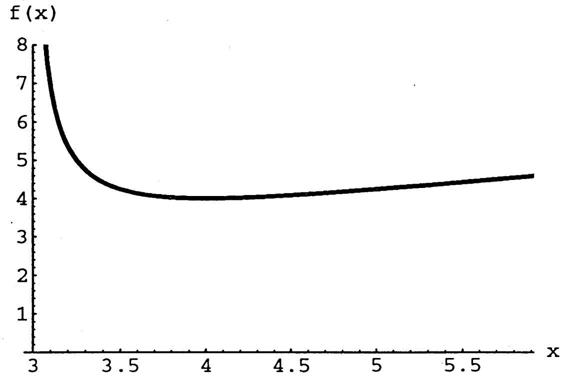
Substituint,

$$x=\frac{(y^2+16)\pm\sqrt{y^2.(y^2-16)}}{8}=\frac{(y^2+16)\pm y.\sqrt{y^2-16}}{8}$$

(3) i (4) Permutem variables i anomenem $y=f^{-1}(x)$. Tindrem

$$f^{-1}(x)=\frac{(x^2+16)\pm x.\sqrt{x^2-16}}{8}$$

Observem que la funció inversa és multiforme, perquè la funció f no és una aplicació injectiva en el seu domini, ja que, com veiem en la gràfica següent, hi ha elements diferents que tenen la mateixa imatge.



Veiem que el domini de la funció donada, $f(x)=2.(x-2)/\sqrt{x-3}$, és $D(f)=(3,\ +\infty)$, i amb això ens assegurem que sempre $f(x)>0$. A més, observem a la gràfica que $R(f)=[4,\ +\infty)$.

Per a la funció inversa f^{-1}, com que donem un sentit econòmic a les variables, tenim

$$D(f^{-1})=[4,\ +\infty)$$

Apuntem una taula de valors per dibuixar la funció donada,

x	3	3'1	3'5	4	5	6	7	12
f(x)	∞	4'2	6'9	54	4'2	4'6	5	6'6

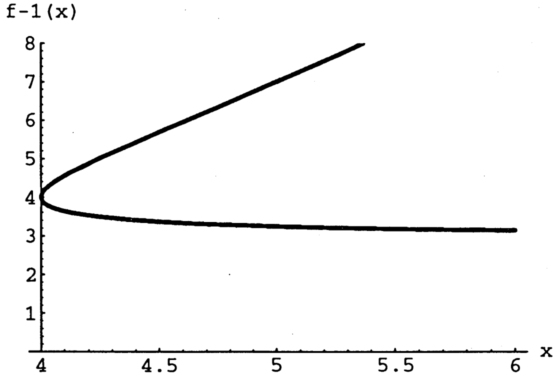
També apuntem una taula de valors per a la funció inversa. Amb el signe positiu de l'arrel:

x	4	5	6	7	10
$f^{-1}(x)$	4	7	9'8	13'1	25'9

Amb el signe negatiu de l'arrel:

x	4	5	6	7	10
$f^{-1}(x)$	4	3'2	3'1	3'09	3'04

Dibuixem ara les gràfiques de la funció inversa f^{-1},



Observant la funció donada f, veiem que el punt mínim és P(4, 4) i així és decreixent en l'interval (3, 4) i creixent en el $(4, +\infty)$. En canvi, la funció inversa té dues branques, de les quals una és creixent i l'altra decreixent. Per donar-li un sentit econòmic precís cal prendre només una de les dues branques.

A més, les dues funcions f i f^{-1} estan acotades inferiorment, però no superiorment. Les cotes inferiors màximes són $k_i=4$ i $k_i=3$, respectivament.

f) PROBLEMES PROPOSATS

1.1 CARACTERÍSTIQUES DE LES FUNCIONS

Gràfica d'una funció

21. El cost total per a la fabricació de q unitats d'un motor per a rentadores ve donat, aproximadament, per la funció polinòmica $C(q)=5.q^3-12.q^2+380.q+670$ PTA. Fes la gràfica aproximada d'aquesta funció, sabent que no es poden fabricar més de 30 unitats diàries. Quin serà el cost de producció si actualment es fabriquen diàriament 24 unitats? I si se'n fabriquessin 25? Quant costaria a l'empresa la producció del 25è motor?

Sol. C(24)=71998, C(25)=80795, C(25è)=8797 PTA.

22. La corba de beneficis d'una empresa, en milions de PTA, segueix aproximadament la funció multiforme $f(t)=\sqrt{t+2}$, on t és el nombre d'anys que es comptaran a partir de l'actualitat. Quina branca haurem d'estudiar? Quants anys fa que funciona l'empresa? Quin és el benefici actual? S'espera que en els propers anys els beneficis augmentaran segons aquesta corba, però al cap de 7 anys està previst que entri en el mercat una gran empresa estrangera, que farà que els beneficis segueixin la nova funció $g(t)=(t-10)^2/3$. Fes la gràfica conjunta. Quins seran els beneficis dintre d'aquests 7 anys? Al cap de quants anys tindrà benefici nul? Haurà de tancar l'empresa?

Sol. $f(t)=+\sqrt{t+2}$, t=-2 fa dos anys , $f(0)=\sqrt{2}$, f(7)=3 milions
g(t)=0 t=10 anys. No, després creix.

23. Dibuixant la funció de vendes mensuals s'ha comprovat que aquestes, V, eren inversament proporcionals al quadrat del preu de venda, p, en centenars de PTA. Si se sap que pel preu de 3.600 PTA s'han venut aquell mes 100 articles, quina és la funció de vendes? Fes-ne la gràfica mitjançant una taula de valors. Si després d'alguns mesos s'ha passat del preu de venda de 4.000 a 4.500 PTA, quants articles s'han deixat de vendre?

Sol. $V(p)=k/p^2$, k=129600 , V(45)-V(40)=17.

24. Una funció de productivitat té la forma $f(x)=a/[(x-b)^2+c]$, on f(x) són el nombre de milers de productes fabricats, x són els anys i a, b i c són uns paràmetres que hauràs de determinar, sabent que la gràfica passa pels punts $P_1(0, 1)$, $P_2(1, 2)$ i $P_3(2,5)$.

Dibuixa després la gràfica i digues l'any de màxima productivitat i el nombre de productes fabricats.

Sol. $f(x)=10/[(x-3)^2+1]$, 3r any , 10.000 prod.

Monotonia i acotació

25. Es defineix la funció "part entera" de x, f(x)=E(x) com a aquella funció en què la imatge d'un element x és el major enter que és més petit o igual que x. (Gràficament, la imatge de x és l'enter que es troba immediatament a l'esquerra de x). Escriu aquesta funció emprant desigualtats i dibuixa-la. Dibuixa també la funció g(x)=x-E(x), que està relacionada amb l'anterior. Quina forma tenen les gràfiques d'aquestes funcions? Estudia la monotonia i l'acotació.

Sol. E(x)=z si $z \le x < z+1$, $z \in Z$, g(x)="part decimal" , g(x)=D(x) , E(x)="escala", D(x)="dent de serra" , E(x)=Constant ($z \notin Z$) i no acotada , D(x)=Creixent ($z \notin Z$) i acotada ($k_i=0$, $k_s=1$).

26. Dibuixa la gràfica de la funció y=f(x), definida per intervals com $f(x)=|x|$ si $-2 \le x \le 1$, f(x)=E(2.x) si $1<x<2$, f(x)=6-x si $2 \le x \le 4$ i f(x)=2 si $|x-1|>3$. Apunta els intervals on la funció és constant, creixent o decreixent, tant en sentit estricte com ampli. Indica també la cota inferior màxima i la cota superior mínima.

Sol. Const: $(-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$, E.cre: (0, 2) , E.dec.: $(-2, 0) \cup (2, 4)$
M.cre: $(-\infty, -2) \cup (0, 2) \cup (4, +\infty)$, M.dec.: $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$,
$K_i=0$, $k_s=4$.

27. Donada la funció $f(x)=(x^2+3.x+2)/(x^2+3.x-10)$, calcula els seus "zeros", és a dir, els punts en què la corba talla l'eix d'abscisses. En quins punts no existeix la corba? Quin és el seu domini? Quins són els intervals de creixement i decreixement?

Sol. Zeros: $x_1=-1$ i $x_2=-2$, $f(x)=\infty \Rightarrow x_3=2$ i $x_4=-5$
$D(f)=(-\infty, -5) \cup (-5, 2) \cup (2, +\infty)$, Creix: $(-\infty, -5) \cup (-5, -1'5)$
Decreix.: $(-1'5, 2) \cup (2, +\infty)$

28. Una funció multiforme y=f(x) ve donada en forma implícita per l'equació $(x^2/25)+(y^2/169)=1$. Posa-la en forma explícita, dibuixa-la i determina el domini i el recorregut. Com s'anomena aquesta corba? És una funció acotada?

Sol. $y=\pm(13/5).\sqrt{25-x^2}$, D(f)=[-5, 5] , R(f)=[-13, 13] ,
El·lipse vertical. Sí.

29. La funció $f(x)=(-x^4+4.x^3+12.x^2-32.x-28)/9$ té per domini tot l'eix X, però per un problema determinat s'agafa com a "conjunt de definició" l'interval $A=[-3, 5]$. Fes la gràfica donant com a valors els enters d'aquest conjunt. Quin és el seu recorregut? És acotada? Indica també els intervals de creixement i decreixement.

Sol. $R(f)=[-5, 4]$, Sí , Creix: $(-3, -2)\cup(1, 4)$, Dec: $(-2, 1)\cup(4, 5)$.

30. Per a la funció multiforme $f(x)=\pm x.\sqrt{12-x}$, calcula el domini. Descompon-la després en les seves dues branques, indicant en cadascuna d'elles el recorregut i la monotonia.

Sol. $D(f)=(-\infty, 12]$, $f_1(x)=+x.\sqrt{12-x}$, $R(f_1)=(-\infty, 16]$
$Creix(f_1)=(-\infty, 8)$, $Dec(f_1)=(8, 12)$; $f_2(x)=-x.\sqrt{12-x}$
$R(f_2)=[-16, +\infty)$, $Creix(f_2)=(8, 12)$, $Dec(f_2)=(-\infty, 8)$.

1.2 OPERACIONS ELEMENTALS AMB FUNCIONS

31. Siguin les funcions $f(x)=+\sqrt{6+x-x^2}$ i $g(x)=\sqrt{7-8.x+x^2}$. Troba'n els dominis. Quin serà el domini de la funció suma f+g? I el de la funció quocient?

Sol. $D(f)=[-2, 3]$, $D(g)=(-\infty, 1]\cup[7, +\infty)$, $D(f+g)=[-2, 1]$,
$D(f/g)=[-2, 1)$.

32. Siguin les funcions $f(x)=-\sqrt{x^2-1}$ i $g(x)=|x^2-16|/2$. Quins són els seus dominis? Dibuixa després aquestes dues corbes i determina, gràficament, la funció suma. Quin és el domini? Estudia l'acotació.

Sol. $D(f)=(-\infty,-1]\cup[1, +\infty)$, $D(g)=R$, $D(f+g)=D(f)$, Acot. inf.

33. Per a les funcions $f(x)=|x-1|$ i $g(x)=E(x+1)$ fes la gràfica donant valors en l'interval $[-4, 4)$. Dibuixa després les funcions suma, f+g, i producte, $f\cdot g$, en el mateix interval. Estudia també els recorreguts i la monotonia de les dues últimes funcions.

Sol. $R(f+g)=(1, 3)\cup[4, 5)\cup[6, 7)$, $Creix(f+g)=(1, 4)$, $Dec=(-4, 1)$
$R(f\cdot g)=[-15, -12)\cup[-8, -6)\cup[-3, -2)\cup[0, 2)\cup[3, 6)\cup[8, 12)$
$Creix(f\cdot g)=(-4, -1)\cup(1, 4)$, $Dec=(0, 1)$, $Const=(-1, 0)$.

1.3 COMPOSICIÓ DE FUNCIONS

34. El cost total (o acumulatiu) de fabricació $C(q)$ de q peces en una indústria de l'automòbil ve donat per $C(q)=q^2+50.q+200$ PTA. També s'ha comprovat que la producció és funció lineal del temps en la forma $q(t)=30.t$, on t és el nombre d'hores que fa que es treballa. Si es comença a treballar a les 7h del matí, expressa el cost com a funció composta del temps i calcula l'hora en què ja s'han gastat 30.200 PTA. Quin seria el cost realitzat durant aquesta hora?

Sol. $C(t)=900.t^2+1500.t+200$, $t=5$h (migdia) , $C_5=9600$ PTA.

35. Donada la funció multiforme $g(x)=(x/4).\sqrt{25-x^2}$ i les dues funcions uniformes $f(x)=x-3$ i $h(x)=x+3$, dedueix la nova funció composta $k(x)=(h{\bullet}g{\bullet}f)(x)$. Quin és el seu domini? Fes-ne la gràfica per mitjà d'una taula de valors. Quins són els seus zeros? Quin és el recorregut aproximat? Comprova després que té la mateixa gràfica que $y=g(x)$, però fent una translació horitzontal i una altra de vertical.

Sol. $k(x)=[12+(x-3).\sqrt{16+6.x-x^2}]/4$, $D(k)=[-2, 8]$,
$x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=6$ i $x_4=7$, $R(k)\approx[-0'1, 6'1]$.

36. Siguin les funcions $f(x)=(5.x+1)/(4.x+6)$ i $g(x)=(7.x+2)/(8.x+9)$. Calcula les funcions compostes $g{\bullet}f$ i $f{\bullet}g$. Podem dir que la composició de funcions verifica en general la propietat commutativa?

Sol. $(g{\bullet}f)(x)=(f{\bullet}g)(x)=(43.x+19)/(76.x+62)$. No.

Funció inversa

37. Donada la funció $f(x)=(x+a)/(x+b)$, demostra que és una aplicació injectiva en el seu domini per $a\neq b$. Estudia després els valors que podran tenir els paràmetres a i b perquè aquesta funció coincideixi amb la seva inversa. Quina serà la funció si volem que també passi pel punt P(3, 4)? Troba també la funció $f^2=f{\bullet}f$.

Sol. $a\neq-1$ i $b=-1$, $a=5$, $f(x)=(x+5)/(x-1)$, $f^2=i$=f. idèntica.

38. Per a la funció $f(x)=(3.x+1)/(2.x+3)$ troba la seva inversa f^{-1}. Quins són els dominis? Comprova que tant f com f^{-1} són aplicacions injectives en el seu domini. Quins són els recorreguts? Si compares els dominis amb els recorreguts, què pots deduir?

Sol. $f^{-1}(x)=(1-3.x)/(2.x-3)$, $D(f)=R-\{-3/2\}$, $D(f^{-1})=R-\{3/2\}$
$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$, $R(f)=D(f^{-1})$, $R(f^{-1})=D(f)$.

39. Per mitjà de les dues funcions $f(x)=(x-3)/2$ i $g(x)=4/(x+1)$, comprova que la inversa de la composició, $(g\bullet f)^{-1}$, és igual a la composició de les inverses canviades d'ordre, $f^{-1}\bullet g^{-1}$.

Sol. $(g\bullet f)(x)=8/(x-1)$, $(g\bullet f)^{-1}(x)=(8+x)/x$, $f^{-1}(x)=2.x+3$, $g^{-1}(x)=(4-x)/x$, $(f^{-1}\bullet g^{-1})(x)=(8+x)/x$.

40. Calcula la funció inversa, f^{-1}, de la funció f definida a trossos en l'interval $A=[-2, 2]$ per $f(x)=-x-3$ si $-2\leq x<0$ i $f(x)=x^2+2$ si $0\leq x\leq 2$. En quin interval B estarà definida f^{-1}? Representa les dues gràfiques.

Sol. $f^{-1}(x)=-x-3$ si $-3<x\leq -1$ i $f^{-1}(x)=+\sqrt{x-2}$ si $2\leq x\leq 6$, $B=(-3, -1]\cup[2, 6]$.

Capítol 2: **Funcions elementals**

a) BIBLIOGRAFIA ESCOLLIDA

Bàsica:

AYRES, F. *Fundamentos de Matemáticas Superiores.* P24/61, P83/99, P176/187, P124/238, P256/271 i P290/302.

CHIANG, A.C. *Métodos Fundamentales de Economía Matemática.* P24/30, P37/47, P273/296, P574/576 i P665/674.

PISKUNOV, N. *Cálculo Diferencial e Integral.* P11/21, P47/48 i P107/109.

BERMAN, G.N. *Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático.* P12-31.

Addicional:

FERNÁNDEZ VIÑA, J.A. *Ejercicios y Complementos de Análisis Matemático.* P35/44.

SAMAMED, O. *Matemáticas 1. Economía y Empresa. Teoría.* P395/410.

SPIEGEL, M. *Cálculo Superior.* P21/23, P27/29 i P37/38.

b) PROGRAMA I SIMBOLOGIA

2.1 FUNCIONS POLINÒMIQUES I RACIONALS.

1) **Funcions polinòmiques.** F. constant, recta horitzontal. F. rectilínia, línia recta, pendent (a), ordenada en l'origen (b). Forma explícita, implícita, dos-punts, paramètrica, equacions paramètriques. F. quadràtica, paràbola, par. invertida. Zeros, discriminant (Δ). Vèrtex, eix de simetria. F. cúbica i quàrtica.
2) **Funcions racionals.** Zeros i asímptotes. Hipèrbola equilàtera, f. homogràfica.

2.2 F. POTENCIALS, EXPONENCIALS I LOGARÍTMIQUES.

1) **Funcions potencials**. Paràboles semicúbica i de Neil. Propietats de les potències. Notació científica dels nombres decimals.
2) **Funcions exponencials**. Exp. creixents i decreixents. El nombre d'Euler, exponencial euleriana (exp). Equacions exponencials.
3) **Funcions logarítmiques**. Logaritme d'un número, fun. logarítmica. Logaritmes decimal (Log) i neperià (Ln). Propietats dels logaritmes. Operacions amb logaritmes. Equacions logarítmiques.

2.3 FUNCIONS TRIGONOMÈTRIQUES.

1) **Trigonometria circular**. Angle (α). Mesures angulars: angles sexagesimals (°, ', "), centesimals (g, m, s) i radians (rad). Catets contigu i oposat, hipotenusa. Raons trigonomètriques: cosinus (cos), sinus (sin), tangent (tan), secant (sec), cosecant (cosec) i cotangent (cotan). Signes en els diferents quadrants. Propietats de les raons trigonomètriques, prop. fonamental. Relacions entre angles de diferents quadrants: angles complementaris, suplementaris i oposats. Taules trigonomètriques. Altres fórmules.
2) **Funcions circulars.** Funcions principals: sinus, cosinus i tangent. Funcions recíproques: secant, cosecant i cotangent. Gràfica de les funcions circulars o trigonomètriques. F. periòdiques, període. Funcions parelles i imparelles. F. circulars inverses: arc sinus, arc cosinus i arc tangent. Fórmules d'Euler. Equacions trigonomètriques.
3) **Funcions hiperbòliques.** Hipèrbola equilàtera unitat. Argument (α). Raons hiperbòliques: cosinus hiperbòlic (Ch), sinus hiperbòlic (Sh) i tangent hiperbòlic (Th). Propietats. Funcions hiperbòliques. Relacions circular-hiperbòliques i hiperbòlico-exponencials. Gràfica de les funcions hiperbòliques. Func. hiperbòliques inverses.

c) CONCEPTES I EXEMPLES

2.1 FUNCIONS POLINÒMIQUES I RACIONALS

2.1.1 FUNCIONS POLINÒMIQUES. Considerem aquest capítol com un repàs de conceptes ja estudiats i, per tant, donarem únicament una breu idea de les funcions elementals i comentarem algunes de les seves propietats. Com a complement ens serà molt útil l'apartat de formulació matemàtica, on trobarem esquematitzades les principals fórmules i expressions.

Una *funció polinòmica* és una funció on el segon membre és un polinomi d'indeterminada x i de coeficients reals. Serà de la forma

$$f(x)=a_0+a_1.x+a_2.x^2+\ldots+a_n.x^n$$

Com a casos particulars tenim les funcions següents:

1) FUNCIÓ CONSTANT. S'anomena *funció constant* aquella funció on el segon membre és un polinomi de grau zero, és a dir $f(x)=a$. Si la representem gràficament, obtindrem una *recta horitzontal* a l'alçada "a" que, si $a=0$, lògicament és l'eix d'abscisses (eix X).

2) FUNCIÓ RECTILÍNIA. El segon membre d'una *funció rectilínia* és un polinomi de grau 1, $f(x)=a.x+b$. Com indica el seu nom, la gràfica és una *línia recta*.

Del coeficient de la x, a, en diem *pendent*, perquè precisament representa el pendent de la recta, és a dir, el quocient entre la variació d'alçada i la variació de longitud, $\Delta y/\Delta x$, entre dos punts qualssevol de la recta. Si el pendent és positiu, $a>0$, la funció és creixent, mentre que si és negatiu, $a<0$, és decreixent.

El terme independent de la funció rectilínia, b, és l'*ordenada en l'origen*, ja que és igual a l'alçada de la recta sobre l'origen de coordenades. En altres paraules, és el punt on la recta talla l'eix d'ordenades (eix Y), ja que en aquest punt $x=0$ i, per tant, $f(x)=b$.

Una funció rectilínia pot ser expressada de maneres diferents. La que hem exposat, $f(x)=a.x+b$, o també $y=a.x+b$, és la *forma explícita*, ja que la y està aïllada en el primer membre. Si escrivim la recta com a $A.x+B.y+C=0$, direm que és en *forma implícita*.

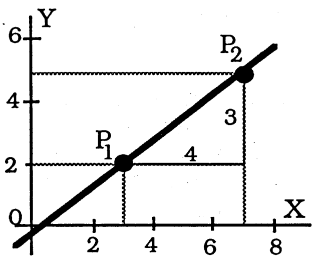
Si coneixem dos punts $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$ de la recta i ens imaginem un altre punt qualsevol P(x, y), com que han de tenir el mateix pendent els segments P_1P i P_1P_2, es verifica que $(y-y_1)/(x-x_1)$ sigui igual a $(y_2-y_1)/(x_2-x_1)$, d'on ens resulta la *forma dos-punts*, és a dir, l'equació de la recta que passa per dos punts:

$$(x-x_1)/(x_2-x_1) = (y-y_1)/(y_2-y_1)$$

Igualant cada costat al paràmetre λ i fent operacions, obtindrem les *equacions paramètriques* o *forma paramètrica* de la recta, de molta utilitat en algunes aplicacions econòmiques:

$$\begin{cases} x=(1-\lambda).x_1+\lambda.x_2 \\ y=(1-\lambda).y_1+\lambda.y_2 \end{cases}$$

Exemple 19. Donats els punts $P_1(3, 2)$ i $P_2(7, 5)$, l'equació de la recta que passa per ells és (x-3)/(7-3)=(y-2)/(5-2). Operant, (x-3)/4=(y-2)/3 , 3.(x-3)=4.(y-2) , 3.x-9=4.y-8 , 3.x-4.y-1=0. Aquesta és la forma implícita de la recta.



Aïllant la y tindrem 4.y=3.x-1 , y=(3/4).x+(-1/4), hem obtingut la forma explícita. El pendent és a=3/4 i l'ordenada en l'origen val b=-1/4. Observem que en la gràfica la recta talla l'eix Y en la seva part negativa.

Com que els punts donats són $P_1(3, 2)$ i $P_2(7, 5)$, les equacions paramètriques vindran donades per $x=(1-\lambda).3+\lambda.7$ i $y=(1-\lambda).2+\lambda.5$.

3) FUNCIÓ QUADRÀTICA. Anomenem *funció quadràtica* a una funció polinòmica el segon membre de la qual és un polinomi de segon grau, $f(x)=a.x^2+b.x+c$, on $a\neq 0$. La seva gràfica és una *paràbola*. Si $a<0$, direm que és una *paràbola invertida.*

Els *zeros* d'una funció quadràtica, que són els punts en què la paràbola talla l'eix X, s'obtenen fent f(x)=0, d'on ens resulta una equació de segon grau. Segons si el *discriminant*, $D=b^2-4.a.c$, és positiu, nul o negatiu, obtindrem dos, un o bé cap zero, respectivament. Els zeros de la funció quadràtica són:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2.a} \quad \text{i} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2.a}$$

El *vèrtex* V d'una funció quadràtica és el seu punt màxim o mínim. Lògicament, ha de passar per l'*eix de simetria* i l'abscissa x_V serà ben bé al mig dels zeros, $x_V=(x_1+x_2)/2$. Substituint, $x_V=-b/(2.a)$.

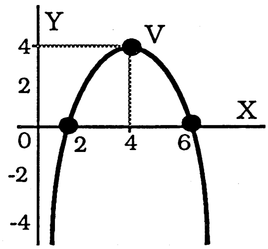
Exemple 20. La funció quadràtica $f(x)=-x^2+8.x-12$ és representada per una paràbola vertical invertida, com indica la figura.

Els zeros de la funció els trobarem resolent l'equació de segon grau

$-x^2+8.x-12=0$ o bé $x^2-8.x+12=0$

que té les solucions $x_1=2$ i $x_2=6$.

L'abscissa del vèrtex és $x_V=(2+6)/2=4$ i l'ordenada l'obtindrem a partir de la funció $y_V=-4^2+8.4-12=-16+32-12=4$. Així el vèrtex és V(4, 4). L'eix de simetria és la recta vertical que passa pel vèrtex.



4) FUNCIÓ CÚBICA. Una *funció cúbica* és una funció polinòmica de tercer grau, $f(x)=a.x^3+b.x^2+c.x+d$, on $a\neq 0$. Dibuixada, ens queda una funció amb dos o cap *extrem* i que talla l'eix X com a màxim en tres punts. (Recordem que diem extrem a un màxim o a un mínim).

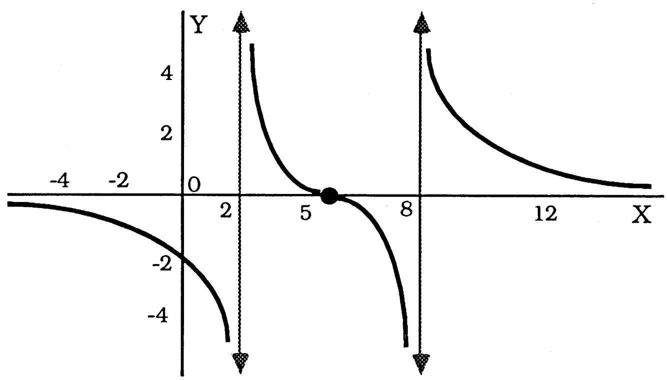
5) FUNCIÓ QUÀRTICA. Una *funció quàrtica* és aquella on el segon membre és un polinomi de quart grau. Té un o tres extrems.

2.1.2 FUNCIONS RACIONALS. Anomenem *funció racional* una funció del tipus $f(x)=P_n(x)/Q_m(x)$, on el numerador i el denominador són polinomis de graus n i m, respectivament.

Com sabem, els zeros són els valors de la x que anul·len la funció, f(x)=0, que, com que $P_n(x)/Q_m(x)=0$, obtindrem $P_n(x)=0$. Així, si suposem la funció f simplificada, els zeros d'una funció racional seran els valors de x que anul·len el numerador.

D'altra banda, els valors de x que anul·len el denominador, $Q_m(x)=0$, faran que la funció es faci infinita, $f(x)=\infty$. En aquests punts dibuixarem unes rectes verticals, anomenades *asímptotes*, on la funció s'aproximarà cada vegada més.

Exemple 21. Per a la funció racional $f(x)=P_1(x)/Q_2(x)$, on $P_1(x)=7.x-35$ i $Q_2(x)=x_2-10.x+16$, els zeros es trobaran resolent 7.x-35=0, que ens dóna x=5.



Les asímptotes les trobarem resolent l'equació de segon grau $Q_2(x)=0$, és a dir, $x^2-10.x+16=0$, que ens donen les solucions $x_1=2$ i $x_2=8$. Observem en la figura anterior que la corba es va aproximant a les asímptotes o bé separant-se 'n.

Com a casos particulars de funcions racionals, podríem posar la funció de proporcionalitat inversa, f(x)=k/x, que té per gràfica una *hipèrbola equilàtera*; la *funció homogràfica*, que és el quocient de dos polinomis de primer grau, f(x)=(a.x+b)/(c.x+d), etc.

2.2 FUNCIONS POTENCIALS, EXPONENCIALS I LOGARÍTMIQUES

2.2.1 FUNCIONS POTENCIALS. De les funcions de la forma $f(x)=x^n$, on l'exponent n és un nombre racional, en direm *funcions potencials*.

Com a casos particulars podem posar la paràbola horitzontal, $f(x)=x^{1/2}$; la *paràbola semicúbica*, $f(x)=x^{3/2}$; la *paràbola de Neil*, $f(x)=x^{2/3}$, etc., les gràfiques de les quals pots trobar en l'apartat de formulació matemàtica.

Tot seguit, i amb l'objectiu didàctic de repassar conceptes que haurem d'utilitzar, apuntem les *propietats de les potències*:

OPERACIONS AMB POTÈNCIES:

$\boxed{x^m.x^n=x^{m+n}}$ Producte de potències de la mateixa base, se sumen els exponents.

$\boxed{x^m/x^n=x^{m-n}}$ Quocient de potències de la mateixa base, se resten els exponents.

$\boxed{(x^m)^n}$ Potència d'una altra potència, es multipliquen els exponents.

TIPUS D'EXPONENT:

$\boxed{x^{-m}=1/x^m}$ Si l'exponent és negatiu, es posa la inversa de la potència amb exponent positiu.

$\boxed{x^{m/n}=\sqrt[n]{x^m}}$ Si l'exponent és fraccionari, el denominador de l'exponent és l'índex de l'arrel.

$\boxed{x^{-m/n}=1/\sqrt[n]{x^m}}$ Si l'exponent és negatiu i fraccionari, s'apliquen els dos apartats anteriors.

EXPONENTS PARTICULARS:

$\boxed{x^1=x}$ Qualsevol valor elevat a la unitat és igual al mateix valor.

$\boxed{x^0=1}$ Qualsevol valor elevat a l'exponent zero és igual a la unitat.

$\boxed{x^{1/2}=\sqrt{x}}$ Qualsevol valor elevat a 1/2 és igual a l'arrel quadrada.

EXPONENTS INFINITS:

$\boxed{\text{Si } x<-1,\ x^{+\infty}=\pm\infty}$ Un valor negatiu més petit que menys 1, elevat al més infinit, és igual a més o menys infinit.

$\boxed{\text{Si } -1<x<1,\ x^{+\infty}=0}$ Un valor comprès entre el -1 i la unitat, elevat a més infinit, és igual a zero.

$\boxed{\text{Si } x>1,\ x^{+\infty}=+\infty}$ Un valor més gran que la unitat, elevat al més infinit, és igual a més infinit.

Repassarem ara la *notació científica dels nombres decimals*. Quan els números són molt grans o molt petits, és difícil manejar-los i, per aquest motiu, emprarem les potències de base 10.

Escriurem el número N amb una sola xifra entera multiplicada per 10 elevat a un exponent que, si N>1, és igual al nombre de xifres enteres menys una, mentre que si N<1, aquest exponent és negatiu i en valor absolut igual al nombre de zeros, més un, que hi ha entre la coma i la primera xifra significativa.

Exemple 22. El número 413698'27 el podem escriure en potències de base 10 com a $4'1369827.10^5$, i el 0'0000005698 el podem posar com a $5'698.10^{-7}$.

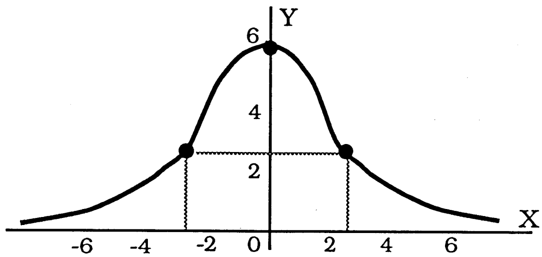
2.2.2 FUNCIONS EXPONENCIALS. En les funcions potencials la base és variable, mentre que l'exponent és constant. Ara, en les *funcions exponencials* la base és constant i l'exponent és variable.

Les escriurem en la forma $f(x)=a^x$, on $a>0$. Si la base és més gran que la unitat, $a>1$, obtindrem una *exponencial creixent*, però si és $0<a<1$, la corba és una *exponencial decreixent*. Les gràfiques d'ambdues corbes es troben a l'apartat de formulació matemàtica.

Un cas particular important és quan la base és el *nombre d'Euler*, e=2'7182..., un nombre irracional de gran importància i que ens trobarem en l'estudi de les successions. De l'exponencial de base e, $f(x)=e^x$, en diem *exponencial euleriana*, que també solem escriure com a $f(x)=\exp(x)$.

Les funcions exponencials que estudiarem en els exercicis tindran base positiva, però l'exponent no sols serà la indeterminada x, sinó una funció d'ella, g(x).

Exemple 23. Sigui la funció $f(x)=2.\exp[(9-x^2)/8]$. Donant valors obtenim f(0)=6'1, f(±1)=5'4, f(±2)=3'7, f(±3)=2, f(±4)=0'8, f(±5)=0'2, etc. Podem ara dibuixar, de manera aproximada, la gràfica,



Aquesta corba es va acostant cada vegada més a l'eix X, que és una asímptota horitzontal. La seva forma és la d'una *campana de Gauss*.

Farem també pràctica d'*equacions exponencials*, que són equacions on la incògnita és en l'exponent.

Exemple 24. L'equació $4.3^{2.x+1}-35.3^{2.x-1}=19683$ és una equació exponencial. Per resoldre-la podem seguir els passos següents:

$$4.(3^{2.x}.3^1)-35.(3^{2.x}.3^{-1})=19683 \quad , \quad (4.3-35.3^{-1}).3^{2.x}=19683 \, ,$$

$$(12-35/3).3^{2.x}=19683 \quad , \quad (1/3).3^{2.x}=19683 \, ,$$

Descomponent en factors, $3^{2.x-1}=3^9$. I com que la funció exponencial és injectiva, $2.x-1=9$, $2.x=10$, $x=5$.

2.2.3 FUNCIONS LOGARÍTMIQUES. Recordem en primer lloc que el *logaritme* en una certa base d'un número és l'exponent a què s'ha d'elevar la base per obtenir aquest número. Escriurem $L_a(x)=y$, que és equivalent a la igualtat $a^y=x$.

Exemple 25. Com que $3^4=81$, podem dir que el logaritme en base 3 de 81 és 4, $L_3(81)=4$, ja que per obtenir 81 s'ha d'elevar la base 3 a l'exponent 4.

Anomenem *funció logarítmica* una funció on la indeterminada està continguda en un logaritme. Serà de la forma $f(x)=L_a(x)$, on $a>0$.

Com a casos particulars destaquem la funció *logaritme decimal*, simbolitzada per $f(x)=Log(x)$, que és aquella funció logarítmica de base $a=10$. Per tant, $Log(x)=L_{10}(x)$.

Més important és la funció *logaritme neperià*, que simbolitzem per $f(x)=Ln(x)$, i que és una funció logarítmica de base el nombre e d'Euler. És a dir, $Ln(x)=L_e(x)$.

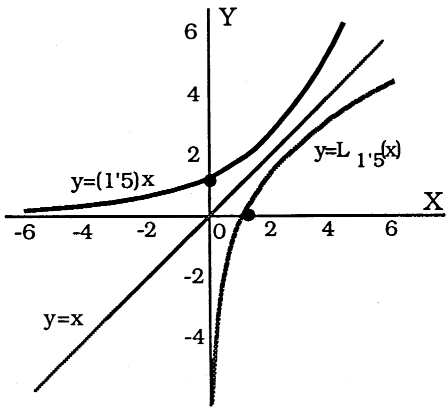
Per construcció, les funcions logarítmiques són les funcions inverses de les funcions exponencials i, per tant, les gràfiques respectives són simètriques respecte a la bisectriu del primer i tercer quadrant, y=x.

Exemple 26. Sigui la funció exponencial $f(x)=(1'5)^x$. Per calcular la seva inversa posem $y=(1'5)^x$ i, si aïllem la x, tindrem $x=L_{1'5}(y)$. Permutant les variables, $y=L_{1'5}(x)$ i posant $f^{-1}(x)$ en comptes de y, tindrem $f^{-1}(x)=L_{1'5}(x)$.

Per dibuixar la funció logarítmica $y=L_{1'5}(x)$, calcularem primer la funció exponencial, aïllant la $x=(1'5)^y$, donarem valors a la y, i obtindrem valors de la x. Així ,si y=2, és $x=1'5^2=2'25$. Donem valors:

x	0'3	0'4	0'6	1	1'5	2'2	3'3	5'0
y	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

Dibuixem ara aproximadament les dues funcions:



Veiem que ambdues són creixents i simètriques respecte a la bisectriu y=x del primer i tercer quadrant.

Aplicant la definició, es poden demostrar fàcilment les següents *propietats dels logaritmes*, que escrivim emprant logaritmes decimals:

OPERACIONS AMB LOGARITMES

$\boxed{Log(x.y)=Log(x)+Log(y)}$ El logaritme d'un producte és igual a la suma dels logaritmes.

$\boxed{Log(x/y)=Log(x)-Log(y)}$ El logaritme d'un quocient és igual a la resta dels logaritmes.

$\boxed{Log(x^n)=n.Log(x)}$ El logaritme d'una potència és igual a l'exponent pel logaritme de la base.

$\boxed{Log(\sqrt[n]{x})=[Log(x)]/n}$ El logaritme d'una arrel és igual al logaritme del radicand, dividit tot per l'índex de l'arrel.

LOGARITMES DE VALORS PARTICULARS

$\boxed{Log(0)=-\infty}$ El logaritme de zero és menys infinit.

$\boxed{Log(1)=0}$ El logaritme de la unitat és zero.

$\boxed{Log(+\infty)=+\infty}$ El logaritme d'infinit és infinit.

$\boxed{Log(10)=1}$ El logaritme de la base és igual a la unitat. També es verifica $\boxed{Ln(e)=1}$ i en general $\boxed{L_a(a)=1}$.

Anàlogament a les equacions exponencials també hi han les *equacions logarítmiques*, on ara la indeterminada estarà continguda en un logaritme.

Exemple 27. L'equació $Log(2.x+1)+Log(2.x-1)=Log(35).Log(10)$ és una equació logarítmica. Per resoldre-la aplicarem les propietats,

$$Log[(2.x+1).(2.x-1)]=Log(35).1 \ , \ Log(4.x^2-1)=Log(35) \ ,$$

Com que la funció logaritme és una aplicació injectiva,

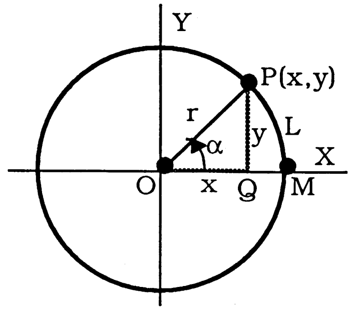
$$4.x^2-1=35 \ , \ 4.x^2=36 \ , \ x^2=9 \ , \ x=3$$

la solució x=-3 no és vàlida perquè si la substituïm en l'equació original, ens queda el logaritme d'un número negatiu, que no existeix.

2.3 FUNCIONS TRIGONOMÈTRIQUES

2.3.1 TRIGONOMETRIA CIRCULAR. Repassem breument tots els conceptes trigonomètrics que ens podran ser útils en l'estudi posterior de les funcions.

Partim d'una circumferència de radi r i centrada en l'origen de coordenades, C(0, 0), que té per equació $x^2+y^2=r^2$.



En ella suposem un punt P(x, y), on l'abscissa x=OQ, l'ordenada y=QP i el radi r=OP determinen un triangle rectangle, OQP.

L'angle α el mesurem a partir de l'eix X i en sentit positiu (el contrari de les agulles del rellotge), fins a arribar al radi r=OP. Sabem que hi ha diferents maneres de mesurar l'angle. Les comentarem tot seguit.

MESURES ANGULARS. Les més comunes són els *angles sexagesimals* i s'originen subdividint la circumferència en 360 graus (1C=360°), cada grau en 60 minuts (1°=60') i cada minut en 60 segons (1'=60").

Més precisió ens donen els *angles centesimals*, on ara una circumferencia es divideix en 400 graus (1C=400g), un grau en 100 minuts (1g=100m) i un minut en 100 segons (1m=100s).

Científicament són més pràctics els *radians*. El nombre de radians que té un angle d'una circumferència es defineix com el quocient entre el seu arc corresponent i el radi, $\alpha_{rad}=L/r$. D'aquesta manera, un radià és la mesura de l'angle determinat per una longitud d'arc igual al radi. També, com que la longitud d'una circumferència és $L=2.\pi.r$, el nombre de radians que tindrà tota una circumferència és $1C=2.\pi$ rad.

Deduïm ara les relacions entre les unitats sexagesimals i els radians. Comparant la relació1C=360° amb $1C=2.\pi$ rad, observem que $2.\pi$ rad=360° i, simplificant, $\boxed{\pi \text{ rad}=180°}$.

RAONS TRIGONOMÈTRIQUES. Fixem-nos en el triangle rectangle OQP i en l'angle α de la figura anterior. De l'abscissa x en diem *catet contigu* (o bé *catet adjacent*) perquè està tocant l'angle; de l'ordenada y, en diem *catet oposat*, ja que està davant mateix de l'angle, i del radi r, en diem, lògicament, *hipotenusa*.

A partir d'aquí definim els sis quocients o *raons trigonomètriques* següents. Les tres principals són:

$\boxed{\cos(\alpha)=x/r}$ El *cosinus* d'un angle és el quocient entre el catet contigu i la hipotenusa.

$\boxed{\sin(\alpha)=y/r}$ El *sinus* d'un angle és el quocient entre el catet oposat i la hipotenusa.

$\boxed{\tan(\alpha)=y/x}$ La *tangent* d'un angle és el quocient entre el catet oposat i el catet contigu.

Les altres tres es defineixen de manera similar.

$\boxed{\sec(\alpha)=r/x}$ La *secant* d'un angle és el quocient entre la hipotenusa i el catet contigu.

$\boxed{\mathrm{cosec}(\alpha)=r/y}$ La *cosecant* d'un angle és el quocient entre la hipotenusa i el catet oposat.

$\boxed{\mathrm{cotan}(\alpha)=x/y}$ La *cotangent* d'un angle és el quocient entre el catet contigu i el catet oposat.

SIGNES EN ELS DIFERENTS QUADRANTS. Com que el radi sempre és positiu, el signe positiu o negatiu d'una raó trigonomètrica vindrà donat pels signes de la x (positiva en el 1r i 4t quadrants i negativa en el 2n i 3r) i de la y (positiva en el 1r i 2n i negativa en el 3r i 4t quadrants. Consulta l'apartat de formulació matemàtica.

PROPIETATS DE LES RAONS TRIGONOMÈTRIQUES. Es dedueixen fàcilment de les seves definicions. Entre elles destaquem

$$\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1 \quad \text{i} \quad \tan(\alpha)=\sin(\alpha)/\cos(\alpha)$$

La primera d'elles es coneix com a *propietat fonamental de la trigonometria*, i la segona es pot emprar per trobar la tangent.

Exemple 28. Una altra propietat és $1+\tan^2(\alpha)=\sec^2(\alpha)$. Si la volem demostrar, només caldrà substituir per la definició i fer operacions:

$$1+\tan^2(\alpha)=1+(y/x)^2=1+(y^2/x^2)=(x^2+y^2)/x^2=r^2/x^2=(r/x)^2=\sec^2(\alpha).$$

RELACIONS ENTRE ANGLES DE DIFERENTS QUADRANTS. Anomenem *angles complementaris* dos angles que, sumats, ens donen un *angle recte* (90°). Per procediments geomètrics podem demostrar que per a dos angles complementaris es verifica

$$\sin(90°-\alpha)=\cos(\alpha) \quad \text{i} \quad \cos(90°-\alpha)=\sin(\alpha)$$

D'altra banda, direm *angles suplementaris* dos angles que, sumats, ens donen un *angle pla* (180°). Per a dos angles suplementaris es verifica

$$\sin(180°-\alpha)=\sin(\alpha) \quad \text{i} \quad \cos(180°-\alpha)=-\cos(\alpha)$$

Finalment, anomenem *angles oposats* dos angles que, sumats, ens donen l'angle nul (0°). Per a dos angles oposats es verifica

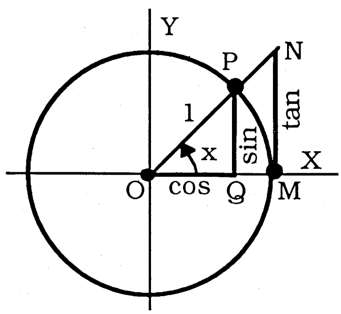
$$\sin(-\alpha)=-\sin(\alpha) \quad \text{i} \quad \cos(-\alpha)=\cos(\alpha)$$

TAULES TRIGONOMÈTRIQUES. És interessant saber les tres raons trigonomètriques principals dels angles de 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, etc. No hi insistirem, ja que normalment calcularem les raons trigonomètriques emprant una calculadora.

ALTRES FÓRMULES. En l'apartat de formulació matemàtica hi hem afegit les fórmules de la suma i diferència d'angles, les de l'angle doble i les de suma i diferència de sinus i cosinus.

2.3.2 FUNCIONS CIRCULARS. Són aquelles funcions on en el segon membre intervé una raó trigonomètrica, i provenen de variar el punt P sobre la circumferència unitat.

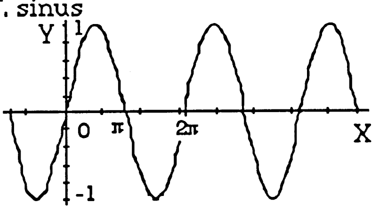
Les tres *funcions circulars* més importants són la *funció sinus*, f(x)=sin(x), la *funció cosinus*, f(x)=cos(x) i la *funció tangent*, f(x)=tan(x). En la pàgina següent tenim aquestes tres funcions dibuixades emprant un programa d'ordinador.



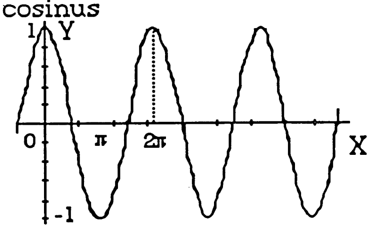
Altres funcions circulars són la *funció secant*, f(x)=sec(x), la *funció cosecant*, f(x)=cosec(x) i la *funció cotangent*, f(x)=cotan(x), que són les recíproques de les anteriors.

Gràfica de les funcions trigonomètriques principals:

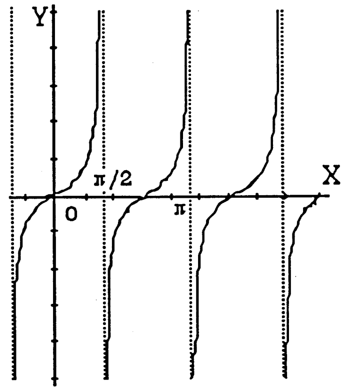
F. sinus



F. cosinus



F. tangent



PERÍODE. Observant les gràfiques anteriors ens adonem que es van repetint a trossos periòdicament. La longitud en l'eix X de l'interval més petit T d'un d'aquests trossos repetits s'anomena *període* de la funció. Matemàticament s'ha de verificar que f(x+T)=f(x).

Els períodes de les funcions sinus i cosinus són ambdós T=2.π o bé 360°, en canvi el període de la funció tangent és de T=π, o 180°.

> *Exemple 29.* Per a les funcions sinus i tangent es verificarà per exemple que:
>
> sin(390°)=sin(30°+360°)=sin(30°)=0'5
>
> tan(225°)=tan(45°+180°)=tan(45°)=1.

FUNCIONS PARELLES I IMPARELLES. Direm que y=f(x) és una *funció parella* si verifica que f(-x)=f(x) per a qualsevol x. Gràficament es tractarà d'una corba simètrica respecte a l'eix Y.

Anomenarem *funció imparella* una funció que verifica f(-x)=-f(x). Gràficament, la corba és simètrica respecte al centre, és a dir, respecte a l'origen de coordenades.

> *Exemple 30.* La funció f(x)=cos(x) és parella perquè es compleix que cos(-x)=cos(x). Les funcions sinus i tangent, però, són imparelles, ja que f(-x)=sin(-x)=-sin(x)=-f(x) i també tan(-x)=-tan(x).

FUNCIONS CIRCULARS INVERSES. Donada la funció sinus, y=sin(x), si volem aïllar la x, escriurem x=arc sin(y), que es llegeix «x és l'arc (o angle) el sinus del qual val y». D'aquesta manera la funció inversa del sinus és la *funció arc sinus* que simbolitzem per f(x)=arc sin(x).

De la mateixa manera, les funcions inverses del cosinus i de la tangent són, respectivament, la *funció arc cosinus*, f(x)=arc cos(x), i la *funció arc tangent*, f(x)=arc tan(x).

Com sabem, les gràfiques d'aquestes funcions trigonomètriques inverses són simètriques a les de les funcions originals, respecte a la bisectriu del primer i tercer quadrant. Fent-ne les gràfiques ens adonarem de seguida que es tracta de funcions multiformes.

Exemple 31. La funció y=arc sin(x) és una funció multiforme ja que, per exemple, si volem calcular la imatge de x=1/2, veurem que té infinites solucions: y=30°, y=150°, y=390°, etc. Només cal comprovar que sin(30°)=1/2, sin(150°)=1/2, sin(390°)=1/2, etc.

El mateix podem dir de les altres dues funcions trigonomètriques inverses, y=arc cos(x) i y=arc tan(x).

FÓRMULES D'EULER. Més endavant, quan estudiem el desenvolupament de funcions en sèries de potències, comprovarem la següent fórmula d'Euler, on $i=\sqrt{-1}$ és la unitat imaginària:

$$e^{i.x}=\cos(x)+i.\sin(x)$$

Canviant la x per -x, i com que el cosinus és funció parella i el sinus, imparella, obtindrem

$$e^{-i.x}=\cos(x)-i.\sin(x)$$

Si sumem i restem les dues fórmules, deduïm les expressions del cosinus i del sinus en funció de les exponencials imaginàries,

$$\cos(x)=\frac{e^{i.x}+e^{-i.x}}{2} \quad \text{i} \quad \sin(x)=\frac{e^{i.x}-e^{-i.x}}{2.i}$$

Com a curiositat, partint de la primera fórmula d'Euler, $e^{i.x}=\cos(x)+i.\sin(x)$, es pot provar que i^i, la unitat imaginària elevada a la unitat imaginària, cosa que sembla el súmmum de la imaginació, és un nombre real! El mateix podem dir de l'arrel i-èsima. Obtindrem

$$i^i=e^{-\pi/2} \quad \text{i} \quad \sqrt[i]{i}=e^{\pi/2}$$

També és curiosa i sorprenent la famosa igualtat $e^{i.\pi}=-1$, que es dedueix de la mateixa fórmula.

Exemple 32. Comprovem que i^i és un nombre real. Particularitzem per $x=\pi/2$ (x=90°) en la primera fórmula d'Euler:

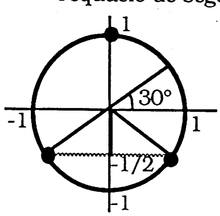
$$e^{i.\pi/2}=\cos(\pi/2)+i.\sin(\pi/2)=0+i.1=i.$$

En conseqüència, $i=e^{i.\pi/2}$. Si elevem cada membre a la i-èsima potència, $i^i=(e^{i.\pi/2})^i=e^{i.i.\pi/2}=e^{-\pi/2}\approx 0'207879$.

EQUACIONS TRIGONOMÈTRIQUES. Són equacions en què intervé alguna funció trigonomètrica: sin(x), cos(x), tan(x), etc. Per resoldre-la podrem emprar les propietats anteriors i ens podrem ajudar de la circumferència unitat.

Exemple 33. Considerem l'equació $[\sin(x)+1].[\sin(x)-1]=\sqrt{1-\cos^2(x)}$. Aplicant la fórmula de la suma per la diferència i la propietat fonamental de la trigonometria, deduïm $\sin^2(x)-1=\sin(x)$.

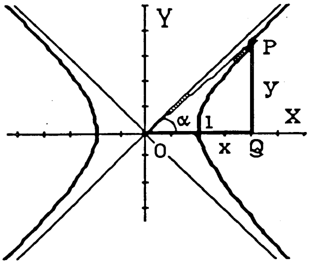
Per tant, $\sin^2(x)-\sin(x)-1=0$, i fent el canvi y=sin(x) ,ens queda l'equació de segon grau $y^2-y-1=0.$, que té per solucions y=1 i y=-1/2.



Per a y=1, i si ens limitem sols a l'interval [0°, 360°], tindrem sin(x)=1, que té per solució x=90°.

Per a y=-1/2 tenim sin(x)=-1/2. Dibuixem la circumferència unitat i el punt y=-1/2 sobre l'eix Y. En el dibuix adjunt observem que s'obtenen dues solucions: x=180°+30°=210 i l'altra x=360°-30°=330°.

2.3.3 FUNCIONS HIPERBÒLIQUES. De manera anàloga a les funcions circulars, que es dedueixen a partir de la circumferència unitat $x^2+y^2=1$, si la corba en estudi és ara la *hipèrbola equilàtera*, que té per equació $x^2-y^2=1$, les funcions que es dedueixen són les anomenades *funcions hiperbòliques*.



Si P(x, y) és un punt de la hipèrbola equilàtera unitat i formem el triangle rectangle OQP, de catets x i y, anomenarem *argument* l'angle α=POQ.

Les *raons hiperbòliques* les definim de manera similar a les circulars en la circumferència unitat:

El *cosinus hiperbòlic* és igual a l'abscissa, $Ch(\alpha)=x$, el *sinus hiperbòlic* és igual a l'ordenada, $Sh(\alpha)=y$, i la *tangent hiperbòlica* és igual al quocient de l'ordenada per l'abscissa, $Th(\alpha)=y/x$.

PROPIETATS. Entre les propietats de les raons hiperbòliques, apuntem les més importants:

1) $Ch^2(\alpha)-Sh^2(\alpha)=1$ 2) $Ch(\alpha)=\sqrt{Sh^2(\alpha)+1}$

3) $Sh(\alpha)=\sqrt{Ch^2(\alpha)-1}$ 4) $Th(\alpha)=Sh(\alpha)/Ch(\alpha)$

FUNCIONS HIPERBÒLIQUES. Si el punt P l'anem movent per l'hipèrbola equilàtera, l'argument α canviarà. Observem que tant la seva abscissa ($x=Ch(\alpha)$) com la seva ordenada ($y=Sh(\alpha)$) i, naturalment, el seu quocient ($y/x=Th(\alpha)$) també seran variables.

Si ara l'argument el simbolitzem per x, obtindrem les *funcions hiperbòliques*, que són les següents:

Funció *cosinus hiperbòlic*, $f(x)=Ch(x)$.

Funció *sinus hiperbòlic*, $f(x)=Sh(x)$.

Funció *tangent hiperbòlica*, $f(x)=Th(x)$

RELACIONS HIPERBÒLIQUES. Tenint en compte que la funció cosinus és parella, $\cos(-x)=\cos(x)$, i les funcions sinus i tangent imparelles, $\sin(-x)=-\sin(x)$ i $\tan(-x)=-\tan(x)$, s'utilitzen també a partir d'aquesta similitud les funcions circulars d'argument complex, donades a partir de les tres *relacions circular-hiperbòliques* següents:

$$\cos(i.x)=Ch(x) \qquad \sin(i.x)=i.Sh(x) \qquad \tan(i.x)=i.Th(x)$$

Si substituïm en les fórmules d'Euler, $e^{i.x}=\cos(x)+i.\sin(x)$ i també $e^{-i.x}=\cos(x)-i.\sin(x)$, la x per i.x, i apliquem les definicions anteriors, obtindrem

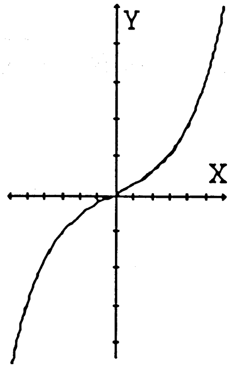
$$e^{-x}=Ch(x)-Sh(x) \qquad i \qquad e^{x}=Ch(x)+Sh(x)$$

Sumant, restant i dividint, ens quedaran les següents *relacions hiperbòlico-exponencials*:

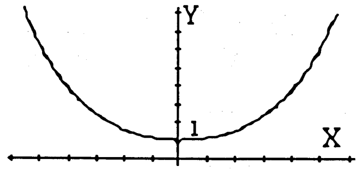
$$Ch(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}, \qquad Sh(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \qquad i \qquad Th(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

Les relacions anteriors són molt importants i ens podien haver servit per a definir les funcions hiperbòliques.

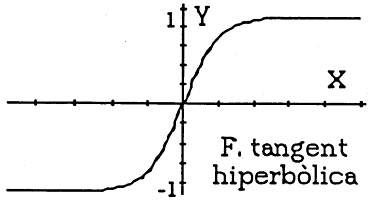
GRÀFICA DE LES FUNCIONS HIPERBÒLIQUES. Construint en primer lloc les funcions exponencials $f_1(x)=ex$ i $f_2(x)=e-x$, i tenint en compte les relacions anteriors, podem deduir fàcilment les gràfiques de les tres funcions hiperbòliques



F. sinus hiperbòlic



F. cosinus hiperbòlic



F. tangent hiperbòlica

FUNCIONS HIPERBÒLIQUES INVERSES. Per acabar l'estudi de les funcions elementals, comentem breument les *funcions hiperbòliques inverses*. Aquestes són la *funció argument sinus hiperbòlic*, $f(x)=\text{Arg Sh}(x)$, la *funció argument cosinus hiperbòlic*, $f(x)=\text{Arg Ch}(x)$ i la *funció argument tangent hiperbòlica*, $f(x)=\text{Arg Th}(x)$.

A partir de les relacions hiperbòlico-exponencials podem deduir les següents *relacions hiperbòlico-logarítmiques*, que ens poden facilitar els càlculs amb les funcions hiperbòliques inverses:

$$\text{Arg Sh}(x)= \text{Ln}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \qquad \text{Arg Ch}(x)= \text{Ln}\left(x\pm\sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\text{Arg Th}(x)= \text{Ln}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Exemple 34 Provem la primera de les relacions anteriors. Sigui la funció $y=\text{Arg Sh}(x)$. Per tant, $x=\text{Sh}(y)$.

Si posem el sinus hiperbòlic en funció de les exponencials,

$$x=(e^y-e^{-y})/2 \ , \ 2.x=e^y - (1/e^y) \ , \ 2.x.e^y=(e^y)^2-1 \ , \ (e^y)^2-2.x.e^y-1=0$$

Fent el canvi de variable $e^y=t$, ens quedarà l'equació de segon grau $t^2-2.x.t-1=0$. Calculem les seves arrels:

$$t=\frac{2.x\pm\sqrt{4.x^2+4}}{2}=x+\sqrt{x^2+1}$$

Hem escollit el signe positiu de l'arrel, perquè, com que $t=e^y$, sempre és positiu. Per tant, $e^y=x+\sqrt{x^2+1}$.

Aïllant la y, $y=\text{Ln}(x+\sqrt{x^2+1}\ )$, i com que $y=\text{Arg Sh}(x)$, obtenim finalment $\text{Arg Sh}(x)=\text{Ln}(x+\sqrt{x^2+1})$.

d) FORMULACIÓ MATEMÀTICA

Funcions polinòmiques

F. polinòmica: $\mathbf{f(x)=a_0+a_1.x+a_2.x^2+\ldots+a_n.x^n}$, $\mathbf{a_i \in R}$ $\mathbf{(i=}0,1,\ldots,\mathbf{n)}$

Casos particulars:

1) F. constant: $\mathbf{f(x)=a}$

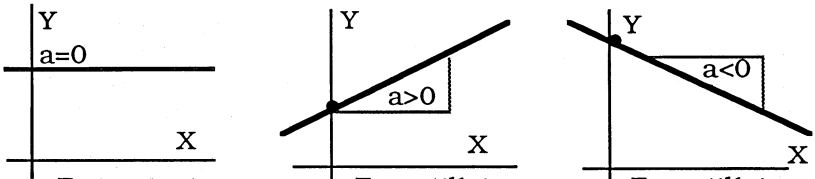
2) F. rectilínia: $\mathbf{f(x)=a.x+b}$

Pendent: **a** Ordenada en l'origen: **b**

Eq. implícita: $\mathbf{A.x+B.y+C=0}$

Eq. dos punts: $\dfrac{\mathbf{x-x_1}}{\mathbf{x_2-x_1}}=\dfrac{\mathbf{y-y_1}}{\mathbf{y_2-y_1}}$

Eq. paramètriques: $\mathbf{x=(1-\lambda).x_1+\lambda.x_2}$, $\mathbf{y=(1-\lambda).y_1+\lambda.y_2}$



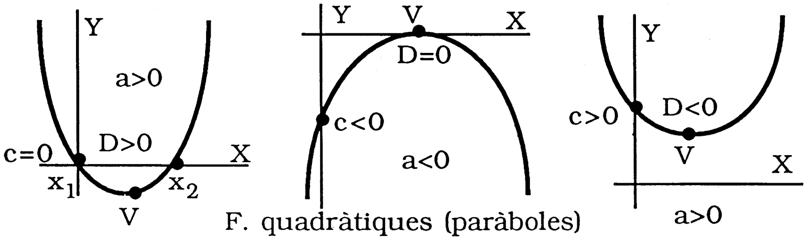
F. constant F. rectilínia creixent F. rectilínia decreixent

3) F. quadràtica: $\mathbf{f(x)=a.x^2+b.x+c}$ $(a\neq 0)$

Discriminant: $\mathbf{D=b^2-4.a.c}$

Zeros: $\mathbf{x_1=(-b+\sqrt{D})/2a}$, $\mathbf{x_2=(-b-\sqrt{D})/2a}$ $(D\geq 0)$

Vèrtex: $\mathbf{V(x_V, y_V)}$, on $\mathbf{x_V=-b/2a}$ $\wedge$ $\mathbf{y_V=-D/4a}$



F. quadràtiques (paràboles)

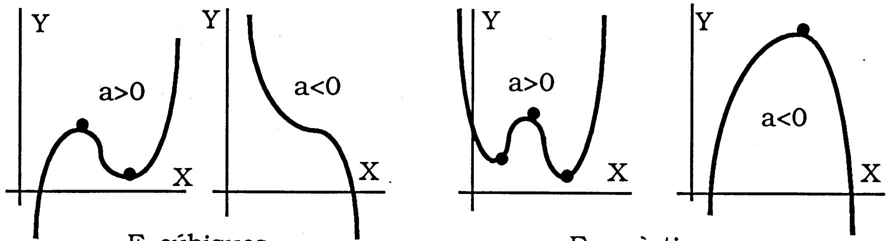
4) F. cúbica: $\mathbf{f(x)=a.x^3+b.x^2+c.x+d}$ $(a\neq 0)$

Extrems (màx. o mín.): **dos o cap**

Funcions polinòmiques (cont.)

5) F. quàrtica: $\mathbf{f(x)=a.x^4+b.x^3+c.x^2+d.x+e}$ $(a\neq 0)$

Extrems (màx. o mín.): **tres o un**



F. cúbiques F. quàrtiques

Funcions racionals

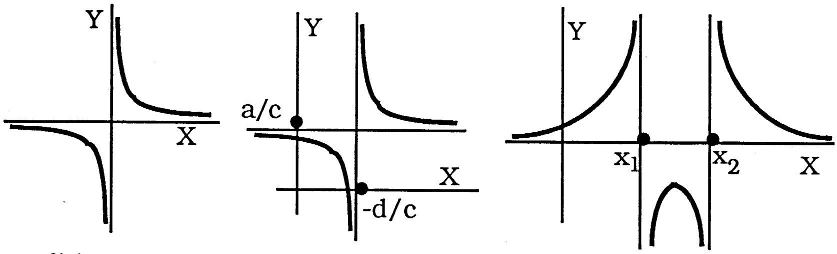
Polinomis: Numerador: $\mathbf{P_n(x)}$ Denominador: $\mathbf{Q_m(x)}$

Funció racional: $\mathbf{f(x)=P_n(x)/Q_m(x)}$ (n,m=graus polinomi)

Casos particulars:

1) Hipèrbola equilàtera: $\mathbf{f(x)=P_0(x)/P_1(x)}$, $\mathbf{f(x)=k/x}$

2) F. homogràfica: $\mathbf{f(x)=P_1(x)/Q_1(x)} \Rightarrow \mathbf{f(x)=(a.x+b)/(c.x+d)}$

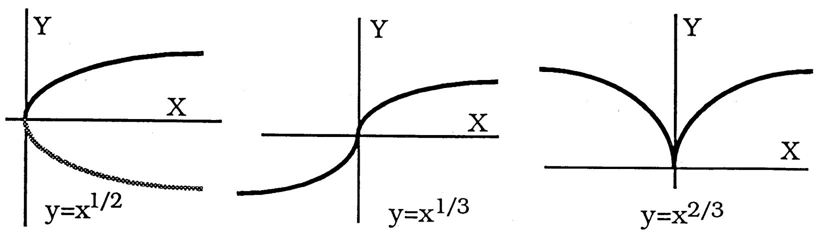


$f(x)=k/x$ $f(x)=(ax+b)/(cx+d)$ $f(x)=k/(ax^2+bx+c)$

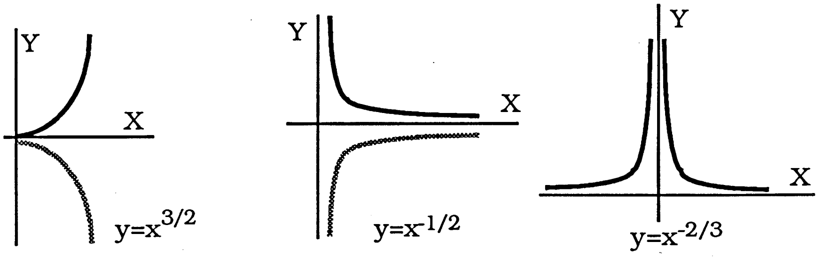
Funcions potencials

Funció potencial: $\mathbf{f(x)=x^n}$ **, on** $\mathbf{n\in Q}$

Casos particulars: $f(x)=x^{1/2}$, $f(x)=x^{1/3}$, $f(x)=x^{2/3}$, $f(x)=x^{-1/2}$, etc.



Funcions potencials (cont.)



Propietats de les potències:

$\mathbf{x^m . x^n = x^{m+n}}$ $\quad$ $\mathbf{x^m / x^n = x^{m-n}}$ $\quad$ $\mathbf{(x^m)^n = x^{m.n}}$

$\mathbf{x^{-m} = 1/x^m}$ $\quad$ $\mathbf{x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}}$ $\quad$ $\mathbf{x^{-m/n} = 1/\sqrt[n]{x^m}}$

$\mathbf{x^1 = 1}$ $\quad$ $\mathbf{x^0 = 1}$ $\quad$ $\mathbf{x^{1/2} = \sqrt{x}}$

$\mathbf{x^{+\infty} = \pm\infty}$ (Si $x<-1$) $\quad$ $\mathbf{x^{+\infty} = 0}$ (Si $-1<x<1$) $\quad$ $\mathbf{x^{+\infty} = \infty}$ (Si $x>1$)

Notació científica dels nombres decimals:

Números més grans que 1:

$\boxed{a_1}\boxed{a_2}\boxed{..}\boxed{a_n} = \boxed{a_1}'\boxed{a_2}\boxed{..}\boxed{a_n}.10^{n-1}$

Números més petits que 1:

$\boxed{0}'\boxed{0_1}\boxed{0_2}\boxed{..}\boxed{0_n}\boxed{a_1}\boxed{a_2}\boxed{..} = \boxed{a_1}'\boxed{a_2}\boxed{..}.10^{-(n+1)}$

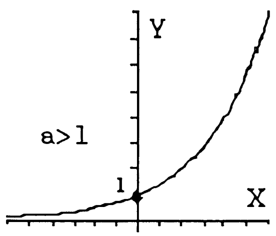
Funcions exponencials

Funció exponencial: $\mathbf{f(x)=a^x}$ $\quad$ $(a>0)$

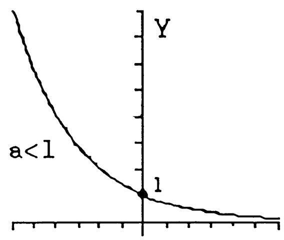
Casos particulars:

Exponencial creixent: **$a>1$** $\quad$ Exp. decreixent: **$0<a<1$**

Exp. euleriana: **$a=e$** $(e=2'7182...)$



F. exponencial creixent



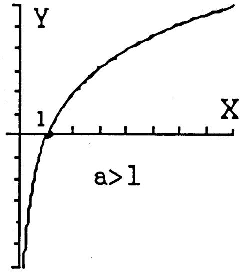
F. exponencial decreixent

Equacions exponencials: $\mathbf{F(a^x)=0 \;\Rightarrow\; x=?}$

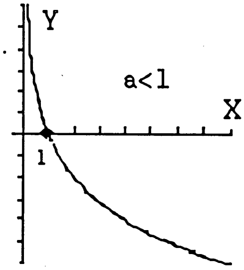
Funcions logarítmiques

Logaritme d'un número: $\mathbf{L_a(x)=y} \Leftrightarrow \mathbf{a^y=x}$

Funció logarítmica: $\mathbf{f(x)=L_a(x)}$ Base: **a>0**



F. logarítmica creixent



F. logarítmica decreixent

Casos particulars:

F. logaritme decimal: **f(x)=Log(x)** $(f(x)=L_{10}(x))$

F. logaritme neperià: **f(x)=Ln(x)** $(f(x)=L_e(x))$

Propietats dels logaritmes:

$\mathbf{Log(x.y)=Log(x)+Log(y)}$ $\mathbf{Log(x/y)=Log(x)-Log(y)}$

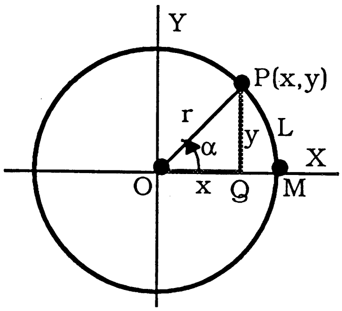
$\mathbf{Log(x^n)=n.Log(x)}$ $\mathbf{Log(\sqrt[n]{x})=\frac{Log(x)}{n}}$

$\mathbf{Log(0)=-\infty}$ $\mathbf{Log(1)=0}$ $\mathbf{Log(+\infty)=+\infty}$

$\mathbf{Log(10)=1}$ $\mathbf{Ln(e)=1}$ $\mathbf{L_a(a)=1}$

Equacions logarítmiques: **F(Log(x))=0** $\Rightarrow$ **x=?**

Trigonometria circular



Circumferència: $x^2+y^2=r^2$

A) Mesures angulars:

1) Angles sexagesimals:

1C=360° **1°=60'** **1'=60"**

2) Angles centesimals:

1C=400g **1g=100m** **1m=100s**

3) Radians:

$\alpha_{\mathbf{rad}}\mathbf{=L/r}$ $\mathbf{\pi\ rad=180°}$

B) Raons trigonomètriques: Triangle rectangle: OQP

Catet contigu: **x** Catet oposat: **y** Hipotenusa: **r**

Trigonometria circular (cont.)

Definicions de les raons trigonomètriques:

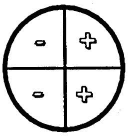
Cosinus: $\boxed{\cos(\alpha)=x/r}$ Secant: $\boxed{\sec(\alpha)=r/x}$

Sinus: $\boxed{\sin(\alpha)=y/r}$ Cosecant: $\boxed{\mathrm{cosec}(\alpha)=r/y}$

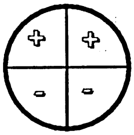
Tangent: $\boxed{\tan(\alpha)=y/x}$ Cotangent: $\boxed{\mathrm{cotan}(\alpha)=x/y}$

C) Signes en els diferents quadrants:

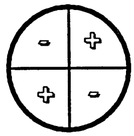
cos(α)
sec(α)



sin(α)
cosec(α)



tan(α)
cotan(α)



D) Propietats:

1) $\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1$

2) $\cos(\alpha)=\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}$

3) $\sin(\alpha)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}$

4) $\tan(\alpha)=\sin(\alpha)/\cos(\alpha)$

5) $\mathrm{cotan}(\alpha)=\cos(\alpha)/\sin(\alpha)$

6) $\sec(\alpha)=1/\cos(\alpha)$

7) $\mathrm{cosec}(\alpha)=1/\sin(\alpha)$

8) $\mathrm{cotan}(\alpha)=1/\tan(\alpha)$

9) $1+\tan^2(\alpha)=\sec^2(\alpha)$

10) $1+\mathrm{cotan}^2(\alpha)=\mathrm{cosec}^2(\alpha)$

E) Relacions entre angles de diferents quadrants:

1) Angles complementaris: $\sin(90°-\alpha)=\cos(\alpha)$
$\cos(90°-\alpha)=\sin(\alpha)$ $\tan(90°-\alpha)=\mathrm{cotan}(\alpha)$

2) Angles suplementaris: $\sin(180°-\alpha)=\sin(\alpha)$
$\cos(180°-\alpha)=-\cos(\alpha)$ $\tan(180°-\alpha)=-\tan(\alpha)$

3) Angles oposats: $\sin(-\alpha)=-\sin(\alpha)$
$\cos(-\alpha)=\cos(\alpha)$ $\tan(-\alpha)=-\tan(\alpha)$

F) Taules trigonomètriques:

α / Raó	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin(α)	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
cos(α)	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1	0	1
tan(α)	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0

Trigonometria circular (cont.)

G) Fórmules de la suma i diferència d'angles:

Sinus: $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha).\cos(\beta) + \cos(\alpha).\sin(\beta)$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha).\cos(\beta) - \cos(\alpha).\sin(\beta)$

Cosinus: $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha).\cos(\beta) - \sin(\alpha).\sin(\beta)$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha).\cos(\beta) + \sin(\alpha).\sin(\beta)$

Tangent:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha).\tan(\beta)} \qquad \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha).\tan(\beta)}$$

H) Fórmules de l'angle doble:

$\sin(2\alpha) = 2.\sin(\alpha).\cos(\alpha)$ $\qquad$ $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2.\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$$

I) Suma i diferència de sinus i cosinus:

Sinus: $\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2.\sin(\frac{\alpha+\beta}{2}).\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$

$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2.\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$

Cosinus: $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2.\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$

$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2.\sin(\frac{\alpha+\beta}{2}).\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$

Funcions circulars

A) Funcions circulars directes:

F. sinus: $f(x)=\sin(x)$ $\qquad$ F. cosinus: $f(x)=\cos(x)$

F. tangent: $f(x)=\tan(x)$

B) Període: $\mathrm{Min}(T)\ ,\ T\in R \ \ /\ \ f(x+T)=f(x)$

Sinus: $T=2\pi$ $\qquad$ Cosinus: $T=2\pi$ $\qquad$ Tangent: $T=\pi$

C) Funcions parelles i imparelles:

F. parella: $f(-x)=f(x)$ $\qquad$ F. imparella: $f(-x)=-f(x)$

D) Funcions circulars inverses: (F. multiformes)

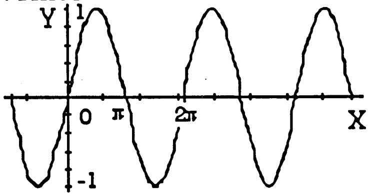
F. arc sinus: $f(x)=\mathrm{arc}\ \sin(x)$ $\qquad$ F. arc cosinus: $f(x)=\mathrm{arc}\ \cos(x)$

F. arc tangent: $f(x)=\mathrm{arc}\ \tan(x)$

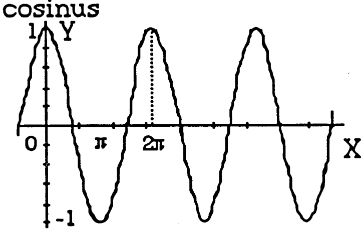
Funcions circulars (cont.)

Gràfiques de les funcions circulars:

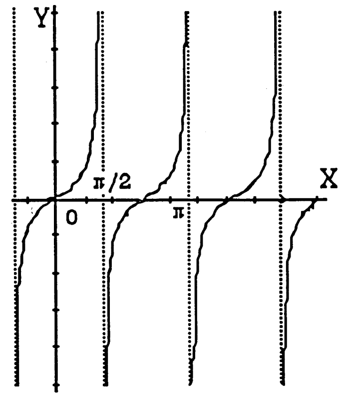
F. sinus



F. cosinus



F. tangent



E) Fórmules d'Euler: ($i=\sqrt{-1}$ unitat imaginària)

$$e^{ix}=\cos(x)+i.\sin(x) \qquad e^{-ix}=\cos(x)-i.\sin(x)$$

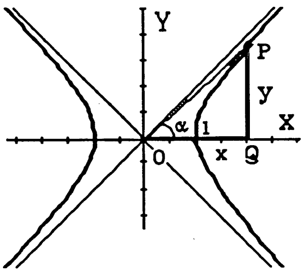
Fórmules del sinus i cosinus:

$$\cos(x)=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad \sin(x)=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2.i}$$

Propietat de la unitat imaginària: $i^i=e^{-\pi/2}$, $\sqrt[i]{i}=e^{\pi/2}$

F) Equacions trigonomètriques: $F(\sin(x),\cos(x))=0 \Rightarrow x=?$

Funcions hiperbòliques



Hipèrbola: $x^2-y^2=1$

A) Raons hiperbòliques:

Argument: α

Cosinus hiperbòlic: $Ch(\alpha)=x$

Sinus hiperbòlic: $Sh(\alpha)=y$

Tangent hiperbòlica: $Th(\alpha)=y/x$

B) Propietats:

1) $Ch^2(\alpha)-Sh^2(\alpha)=1$

2) $Ch(\alpha)=\sqrt{Sh^2(\alpha)+1}$

3) $Sh(\alpha)=\sqrt{Ch^2(\alpha)-1}$

4) $Th(\alpha)=Sh(\alpha)/Ch(\alpha)$

Funcions hiperbòliques (cont.)

C) Funcions hiperbòliques:

F. cosinus hip.: $\mathbf{f(x)=Ch(x)}$ F. sinus hip.: $\mathbf{f(x)=Sh(x)}$

F. tangent hip.: $\mathbf{f(x)=Th(x)}$

D) Relacions circular-hiperbòliques:

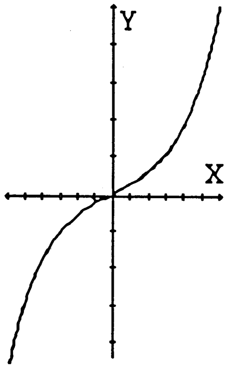
$\cos(i.x)=Ch(x) \qquad \sin(i.x)=i.Sh(x) \qquad \tan(i.x)=i.Th(x)$

E) Relacions hiperbòlico-exponencials:

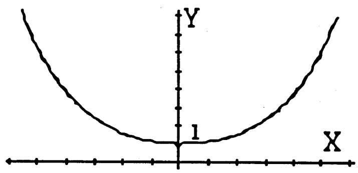
$$e^x=Ch(x)+Sh(x) \qquad e^{-x}=Ch(x)-Sh(x)$$

$$Ch(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad Sh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad Th(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

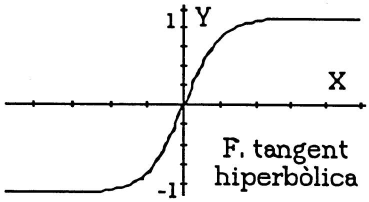
F) Gràfica de les funcions hiperbòliques:



F. sinus hiperbòlic



F. cosinus hiperbòlic



F. tangent hiperbòlica

G) Funcions hiperbòliques inverses:

Argument sinus hiperbòlic: $\mathbf{f(x)= Arg\ Sh(x)}$

Argument cosinus hiperbòlic: $\mathbf{f(x)= Arg\ Ch(x)}$

Argument tangent hiperbòlica: $\mathbf{f(x)= Arg\ Th(x)}$

H) Relacions hiperbòlico-logarítmiques:

$$Arg\ Sh(x)= Ln(x+\sqrt{x^2+1}) \qquad Arg\ Ch(x)= Ln(x\pm\sqrt{x^2-1})$$

$$Arg\ Th(x)= Ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

e) PROBLEMES RESOLTS

2.1 FUNCIONS POLINÒMIQUES I RACIONALS

Funcions polinòmiques

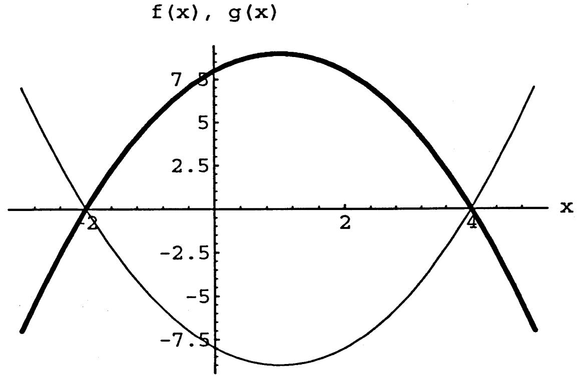
41. Estudia el tipus de paràbola i troba els zeros de la funció quadràtica $f(x)=x.(2-x)+8$ i també el seu vèrtex. Fes-ne la gràfica. Calcula després l'equació d'una nova paràbola que tingui els mateixos zeros i que el nou vèrtex sigui simètric al vell respecte a l'eix X. Quins són els dos recorreguts?

Solució. Multiplicant, $f(x)=2.x-x^2+8=-x^2+2.x+8$, observem que aquesta funció quadràtica té per coeficients $a=-1$, $b=2$ i $c=8$, per la qual cosa, com que $a<0$, és una paràbola invertida.

Els zeros de la funció, que són els punts en què la corba talla l'eix X, els trobem fent $f(x)=0$, i ens resulta l'equació de segon grau $-x^2+2.x+8=0$, $x^2-2.x-8=0$, que té per arrels $x_1=-2$ i $x_2=4$.

Sabem que l'abscissa del vèrtex estarà ben bé al mig d'aquests dos punts i, per tant, $x_V=(x_1+x_2)/2=(-2+4)/2=1$. La seva ordenada és: $y_V=f(x_V)=1.(2-1)+8=9$. Així el vèrtex és V(1, 9).

Amb els zeros, el vèrtex i algun altre valor, com per exemple $f(0)=8$, ja podem dibuixar aproximadament la funció donada, que és la de traç gruixut.



La nova paràbola ha de tenir els mateixos zeros, $x_1=-2$ i $x_2=4$, però com que el vèrtex ha de ser simètric respecte a l'eix X, en lloc del V(1, 9) haurà de ser el V'(1, -9).

Evidentment, sense fer cap tipus de càlcul, veiem que la funció demanada és l'oposada de l'anterior $g(x)=-f(x)=x^2-2.x-8$, que és la paràbola dibuixada amb traç fi.

Quant als recorreguts, o conjunts imatges, podem veure, a partir dels dos vèrtexs i de la gràfica anterior, que són $R(f)=(-\infty, 9]$ i $R(g)=[-9, +\infty)$.

42. Determina l'equació d'una funció quadràtica sabent que passa pels punts $P_1(-1,-2)$, $P_2(3,-6)$ i $P_3(4,3)$. Quina és la imatge de $x=-2$? I les antiimatges de $y=16$?

Solució. Una funció quadràtica té la forma $f(x)=a.x^2+b.x+c$. Per a determinar-la necessitarem saber els tres coeficients a, b i c, i això ho farem a partir d'un sistema de tres equacions, imposades per les condicions que la funció passi pels tres punts donats.

Com que la corba passa per $P_1(-1, -2)$ és $f(-1)=-2$ i, per tant,

$$f(-1)=a.(-1)^2+b.(-1)+c=-2 \text{ , és a dir, } a-b+c=-2$$

De la mateixa manera, per passar per $P_2(3, -6)$ i $P_3(4, 3)$,

$$f(3)=a.3^2+b.3+c=-6 \quad , \quad 9.a+3.b+c=-6$$
$$f(4)=a.4^2+b.4+c=3 \quad , \quad 16.a+4.b+c=3$$

Tenim, doncs, el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} a \quad -b+c=-2 \\ 9.a+3.b+c=-6 \\ 16.a+4.b+c= 3 \end{cases}$$

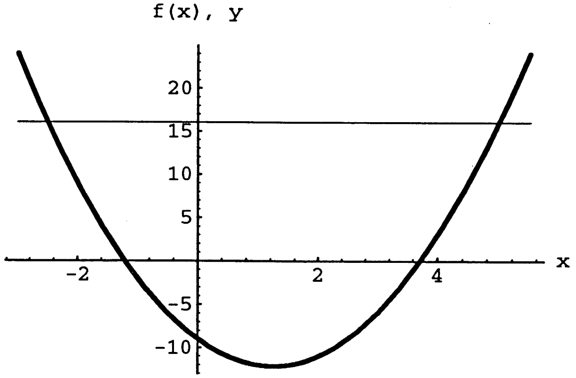
Restant (2a)-(1a), $8.a+4.b=-4$ i simplificant, $2.a+b=-1$.

Restant (3a)-(2a), $7.a+b=9$.

Restant les dues equacions obtingudes, $5.a=10$, d'on $a=2$.

Substituint, $b=-1-2.a=-1-2.2=-5$, $c=-2-a+b=-2-2-5=-9$

Per tant, la funció demanada és $\boxed{f(x)=2.x^2-5.x-9}$. Amb els punts donats, i algun altre que pugui fer falta, dibuixem la funció:



La imatge de $x=-2$ és $f(-2)=2.(-2)^2-5.(-2)-9=8+10-9=9$. En canvi, les antiimatges de $y=16$ les trobarem igualant $f(x)=16$, és a dir, $2.x^2-5.x-9=16$, $2.x^2-5.x-25=0$. Si resolem aquesta equació de segon grau obtenim

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4.2.(-25)}}{2.2}=\frac{5\pm\sqrt{25+200}}{4}=\frac{5\pm 15}{4}$$

Obtenim dues solucions, $x_1=(5+15)/4=5$ i $x_2=(5-15)/4=-5/2$. De la gràfica anterior, veiem que els punts $P_1(5, 16)$ i $P_2(-2'5, 16)$ són els de tall de la funció amb la recta horitzontal $y=16$.

43. El cost de fabricació d'un producte és de 250 PTA i sabem que, si es ven a x PTA/unitat, els consumidors compraran 750-x unitats a la setmana. Expressa el benefici setmanal del fabricant en funció del preu x, dibuixa la funció i estima el preu òptim x_M de venda. Quin és el benefici setmanal obtingut?

Solució. El benefici d'un sol producte és igual a la diferència entre el preu de venda i el cost de fabricació, x-250. Per tant, si es venen 750-x unitats, voldrà dir que el benefici és (x-250).(750-x).

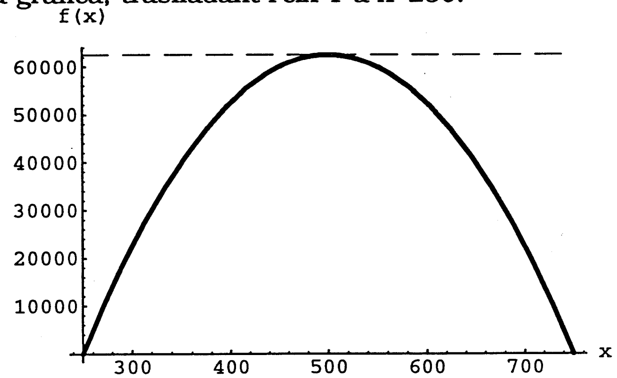
Segons l'enunciat, la funció f(x)=(x-250).(750-x) representarà el benefici setmanal segons el preu x. Multiplicant, ens adonarem que és una funció quadràtica,

$$f(x)=750.x-x^2-187500+250.x= -x^2+1000.x-187500$$

Fem una taula de valors per a la funció f(x)=(x-250).(750-x) en l'interval [250, 750], que conté els valors que donen un benefici positiu, i prenent els valors de la f(x) en milers de pessetes, tindrem:

x	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750
f(x)	0	22'5	40	52'5	60	62'5	60	52'5	40	22'5	0

Fem la gràfica, traslladant l'eix Y a x=250:



Veiem que el preu òptim de venda és x_M=500 PTA/unitat, i que per aquest valor s'obté un benefici de 62.500 PTA setmanals.

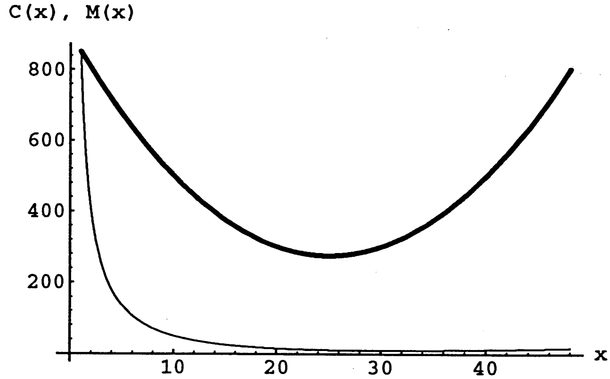
44. El cost total de fabricació de x unitats d'un producte ens ve donat per $C(x)=x^2-50x+900$. Sabent que el cost mitjà M(x) és igual al cost total dividit pel nombre d'unitats produïdes, dibuixa les gràfiques de C(x) i M(x), i assenyala també els seus punts mínims respectius. És M(x) una funció polinòmica?

Solució. Veiem de seguida que la funció de cost total, C(x), té per gràfica una paràbola, ja que és una funció quadràtica. Quant a la funció de cost mitjà, $M(x)=C(x)/x=(x^2-50+900)/x$, si la volem dibuixar, haurem de construir una taula de valors.

Fem, doncs, una taula de valors conjunta de les dues funcions:

x	0	5	10	15	20	**25**	**30**	35	40
C(x)	900	675	500	375	300	**275**	300	375	500
M(x)	∞	135	50	25	15	11	**10**	10'7	12'5

Dibuixem a continuació les dues corbes,



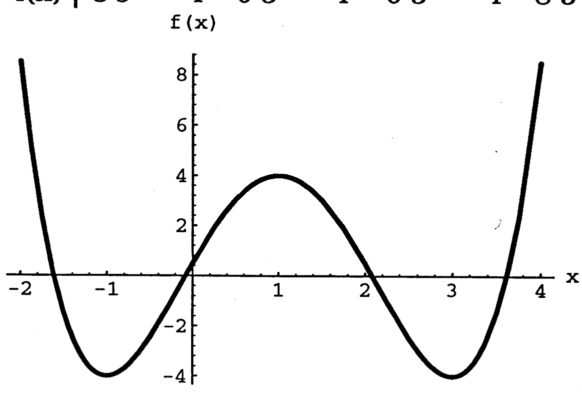
De la gràfica anterior, i més precisament de la taula de valors, veiem que la funció de costos total, C(x), té un mínim en el punt P(25, 275) i que la funció de costos mitjà, M(x), té també un mínim en el nou punt Q(30, 10).

Diem, finalment, que M(x) no és una funció polinòmica, ja que $M(x)=x-50+(900/x)$ no és cap polinomi, sinó una funció racional.

45. Donada la funció quàrtica $f(x)=(x^4-4x^3-2x^2+12x+1)/2$, fes-ne la gràfica en l'interval [-2,4]. Indica els intervals de creixement, decreixement, el màxim i els mínims. Quin és el recorregut?

Solució. Fem en primer lloc la gràfica en l'interval donat, per mitjà de la taula de valors següent:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	8'5	-4	0'5	4	0'5	-4	8'5



De la gràfica de la plana anterior veiem que la corba té un màxim en el punt P(1, 4) i dos mínims en $Q_1(-1, -4)$ i $Q_2(3, -4)$. Aquests punts separen els intervals de monotonia, que són

Creix.: $I_C=(-1, 1)\cup(3, +\infty)$ Decreix.: $I_D=(-\infty, -1)\cup(1, 3)$

Quant al recorregut, que s'ha de mirar en l'eix Y, partirà del punt mínim i serà $R(f)=[-4, +\infty)$.

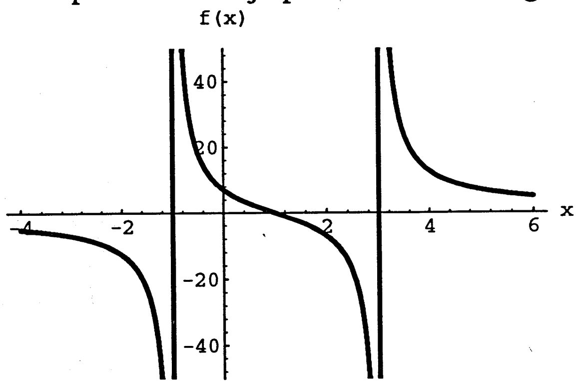
Funcions racionals

46. Donant valors en l'interval [-4, 6] fes la gràfica de la funció $f(x)=21.(x-1)/(x^2-2x-3)$. Apunta els zeros de la funció, els valors de x en què la funció es fa infinita i els intervals de creixement i de decreixement.

Solució. Fem la taula de valors en l'interval donat

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	-5	-7	-12'6	∞	7	0	-7	∞	12'6	7	5

Amb aquests punts trobats ja podem dibuixar la gràfica,



Veiem que l'únic zero de la funció és x=1, i que hi han dos valors de x, $x_1=-1$ i $x_2=3$, on la funció es fa infinita.

Aquestes abscisses també es podien haver trobat analíticament. En efecte, donada la funció $f(x)=21.(x-1)/(x^2-2.x-3)$, els zeros són els valors de x que anul·len el polinomi numerador, $P(x)=21.(x-1)$, d'on resulta x=1. Les asímptotes les trobarem anul·lant el polinomi denominador i comprovant que la funció es fa infinita. Així, resulta $Q(x)=x^2-2.x-3=0$, que té per arrels $x_1=-1$ i $x_2=3$.

Observem que la funció donada és sempre decreixent, és a dir,

$I_C=\emptyset$ i $I_D=(-\infty, -1)\cup(-1, 3)\cup(3, +\infty)$

També podíem haver posat $I_D=R-\{-1, 3\}$, ja que l'interval de decreixement coincideix en aquest cas amb el domini de la funció.

47. Siguin les funcions $f(x)=x^2-8.x+12$ i $g(x)=9.x/(x-5)$. Troba la funció composta g•f i estudia el domini i els zeros. Fes-ne després la gràfica. Quin és el punt màxim? I el recorregut?

Fes ara el mateix estudi per a la funció composta f•g, però indicant en aquest cas el punt mínim.

Solució. Calculem en primer lloc la funció composta g•f

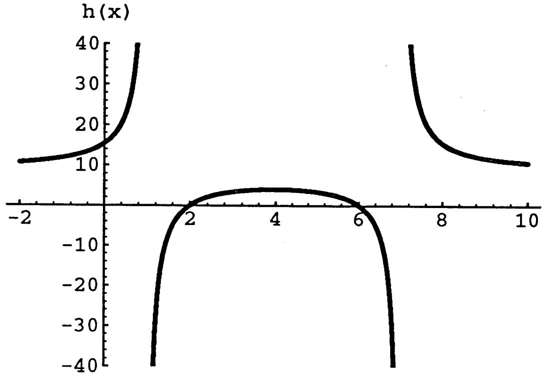
$$(g\bullet f)(x)=g[f(x)]=\frac{9.f(x)}{f(x)-5}=\frac{9.(x^2-8.x+12)}{(x^2-8.x+12)-5}=\frac{9.(x^2-8.x+12)}{x^2-8.x+7}$$

Els zeros els trobarem anul·lant el numerador, $x^2-8.x+12=0$, que té per arrels $x_1=2$ i $x_2=6$. El domini i les asímptotes verticals els determinarem anul·lant el polinomi denominador, $x^2-8.x+7=0$, que té per arrels $x_3=1$ i $x_4=7$. Per tant, $D(g\bullet f)=R-\{1, 7\}$.

Fem una taula de valors per a la funció composta h=g•f,

x	-2	-1	0	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	10
hx)	10'6	11'8	15'4	∞	0	3'3	**4**	3'3	0	∞	15'4	11'8	10'6

Ara podrem dibuixar la gràfica



El punt màxim és el P(4, 4). Trobem el recorregut determinant abans l'alçada en què s'estabilitza la corba. Per exemple, per x=30 tenim h(30)=9'06 i així, tant per la dreta com per l'esquerra, la corba anirà baixant i aproximant-se cada vegada més a l'alçada y=9.

En conseqüència, el recorregut és $R(h)=(-\infty, 4]\cup(9, +\infty)$. Calculem ara la nova funció composta k=f•g

$$(f\bullet g)(x)=f[g(x)]= [g(x)]^2-8.g(x)+12=\frac{81.x^2}{(x-5)^2}-8.\left(\frac{9.x}{x-5}\right)+12$$

Reduint a comú denominador,

$$(f\bullet g)(x)=\frac{81.x^2-72.x.(x-5)+12.(x-5)^2}{(x-5)^2}=...=\frac{3.(7.x^2+80.x+100)}{(x-5)^2}$$

Trobarem els zeros d'aquesta funció k=f•g anul·lant el polinomi numerador, $7.x^2+80.x+100=0$:

$$x=\frac{-80\pm\sqrt{80^2-4.7.100}}{2.7}=\frac{-80\pm\sqrt{3600}}{14}=\frac{-80\pm60}{14}=\frac{-40\pm30}{7}$$

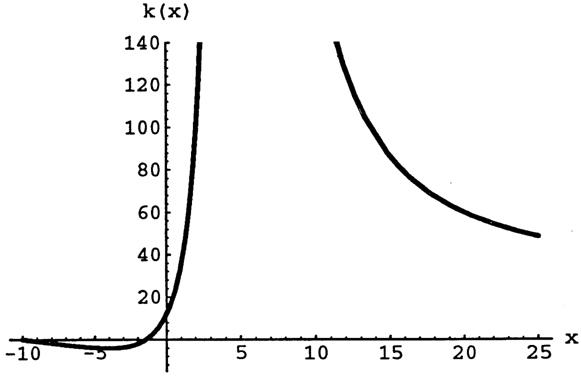
Obtenim els dos zeros $x_1=(-40+30)/7\approx-1'4$ i $x_2=-10$.

El domini i les asímptotes verticals les determinarem igualant el polinomi denominador a zero, $(x-5)^2=0$, que ens dóna x=5. És a dir, per a x=5 la funció es farà infinita. Per tant, D(f•g)=R-{5}.

Fem una taula de valors per a $k(x)=3.(7.x^2+80.x+100)/(x-5)^2$,

x	-12	-10	-8	-6	**-4**	-2	0	2	4	6	8	10
k(x)	1'5	0	-1'6	-3'1	**-4**	-1'9	12	96	1596	2496	396	192

Dibuixem ja la funció



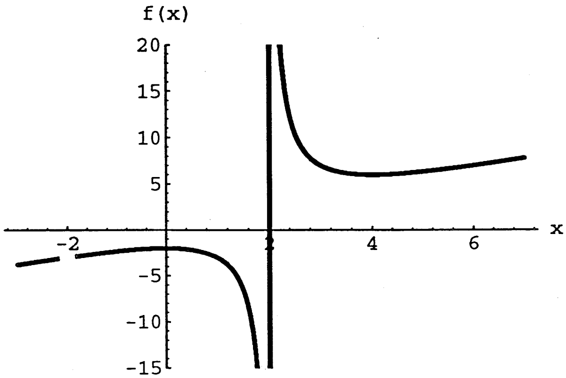
Veiem que un punt mínim és el P(-4, -4). D'aquesta manera el recorregut és R(k)=[-4, +∞).

48. Donada la funció $f(x)=(x^3+8)/(x^2-4)$, fes la gràfica en [-3, 6]. Estudia el domini i indica els punts màxim i mínim. Quin és el recorregut? Apunta els intervals de creixement i decreixement.

Solució. Fem en primer lloc una taula de valors

x	-3	-2	-1	**0**	1	2	3	**4**	5	6
f(x)	-3'8	0/0	-2'3	**-2**	-3	∞	7	**6**	6'3	7

Dibuixem la gràfica,



Observem que, per a x=-2, ens ha quedat de la forma f(-2)=0/0, perquè tant el numerador com el denominador contenen el factor x+2. D'altra banda, per a x=2 la funció es fa infinita.

Així, doncs, D(f)=R-{-2, 2}.

De la taula de valors i la gràfica podem determinar els punts màxim relatiu $P_M(0, -2)$ i mínim relatiu $P_m(4, 6)$.

El recorregut és

$$R(f)=(-\infty, -2]\cup[6, +\infty)$$

També, a partir de la gràfica, veiem que els intervals de creixement i de decreixement són

$$I_C=(-\infty, 0)\cup(4, +\infty) \quad \text{i} \quad I_D=(0, 2)\cup(2, 4)$$

2.2 F. POTENCIALS, EXPONENCIALS I LOGARÍTMIQUES

Funcions potencials

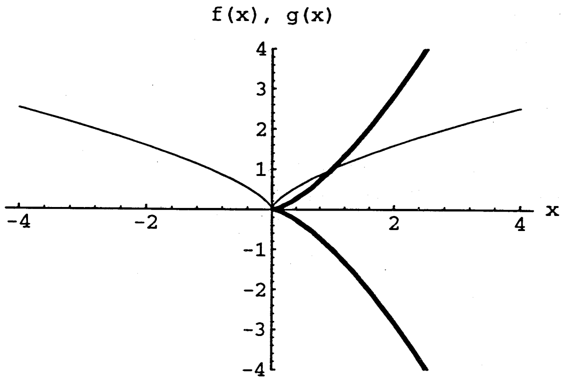
49. Estudia el domini i el recorregut de la "paràbola semicúbica" $f(x)=x^{3/2}$ i de la "paràbola de Neil" $g(x)=x^{2/3}$. En quins punts es tallen? Comprova-ho tot gràficament.

Solució. Tenim $f(x)=\sqrt[2]{x^3}$ i $g(x)=\sqrt[3]{x^2}$. Fem una taula de valors per a aquestes dues funcions:

x	0	1	2	3	4
f(x)	0	±1	±2'8	±5'2	±8

x	0	±1	±2	±3	±4
g(x)	0	1	1'6	2'0	2'5

Dibuixem les dues funcions, on la f és la de traç gruixut i g la de traç prim:



Observem que els dominis són D(f)=[0, +∞) i D(g)=(-∞, +∞). Els recorreguts són R(f)=(-∞, +∞) i R(g)=[0, +∞).

No és casualitat que el domini d'una sigui el recorregut de l'altra, ja que les dues funcions són inverses, $f(x)=x^{3/2}$ i $g(x)=x^{2/3}$.

A més, fixem-nos que les gràfiques són simètriques respecte a la bisectriu del primer i tercer quadrant, $y=x$.

Els punts en què es tallen són òbviament $P_1(0,\ 0)$ i $P_2(1,\ 1)$, com podem veure gràficament. També els podíem haver trobat resolent el sistema $y=x^{3/2}$ i $y=x^{2/3}$.

Igualant, $x^{3/2}=x^{2/3}$. Elevant cada membre a la sisena potència, $(x^{3/2})^6=(x^{2/3})^6$. Per tant, $x^9=x^4$, $x^9-x^4=0$, $x^4.(x^5-1)=0$, d'on ens resulten dues possibilitats, $x^4=0$, d'on $x=0$, i $x^5-1=0$, d'on $x^5=1$ i, per tant, $x=1$, que originen els punts $P_1(0,\ 0)$ i $P_2(1,\ 1)$.

50. Troba la funció potencial definida per $f(x)=[(P^{1/6}+Q^6)/2]^{1/2}$ i també la imatge de 16, on P i Q vénen donades per:

$$P=\frac{(x^{-2})^{-3}.(x^{-1/3})^9}{(x^{1/2})^{-3}.(x^{-3/2})^5} \quad \wedge \quad Q=\frac{(x^{2/3}.x^{1/6})^{3/4}}{(x^{3/4}.x^{1/2})^{1/3}}$$

Calcula després una antiimatge de la unitat.

Solució. Simplifiquem en primer lloc la P,

$$P=\frac{(x^{-2})^{-3}.(x^{-1/3})^9}{(x^{1/2})^{-3}.(x^{-3/2})^5}=\frac{x^6.x^{-3}}{x^{-3/2}.x^{-15/2}}=\frac{x^{6+(-3)}}{x^{(-3/2)+(-15/2)}}=\frac{x^3}{x^{-9}}=x^{3-(-9)}=x^{12}$$

Simplifiquem ara l'altra expressió Q,

$$Q=\frac{(x^{2/3}.x^{1/6})^{3/4}}{(x^{3/4}.x^{1/2})^{1/3}}=\frac{(x^{2/3})^{3/4}.(x^{1/6})^{3/4}}{(x^{3/4})^{1/3}.(x^{1/2})^{1/3}}=\frac{x^{1/2}.x^{1/8}}{x^{1/4}.x^{1/6}}=\frac{x^{(4+1)/8}}{x^{(3+2)/12}}$$

Per tant, $Q=x^{(5/8)-(5/12)}=x^{(15-10)/24}=x^{5/24}$.

Substituint en la funció donada, $\boxed{f(x)=[(x^2+x^{5/4})/2]^{1/2}}$.

Per trobar la imatge de $x=16$, només caldrà substituir. Podem emprar potències d'exponents racionals, o bé arrels

$$f(16)=\sqrt{\frac{16^2+(\sqrt[4]{16})^5}{2}}=\sqrt{\frac{16^2+(\sqrt{\sqrt{16}})^5}{2}}=\sqrt{\frac{256+32}{2}}=\sqrt{144}=12$$

Calculem finalment una antiimatge de la unitat. Haurem de trobar un valor de x de manera que $f(x)=1$, és a dir,

$$[(x^2+x^{5/4})/2]^{1/2}=1$$

Elevant al quadrat, $(x^2+x^{5/4})/2=1$, $x^2+x^{5/4}=2$.

No cal fer cap operació per veure que una solució és $x=1$, ja que 1^2 i $1^{5/4}=1$.

Per trobar altres arrels es podia haver posat $x^{5/4}=2-x^2$ o bé $x^5=(2-x^2)^4$. Desenvolupant aquesta potència ens quedaria un polinomi de 8è grau, on estudiaríem per Ruffini les seves arrels aproximades.

51. Expressa en primer lloc en potències de base 10 i simplifica les quantitats següents:

$$P=\left[\frac{(70)^3.(0'000.006.3).(0'006)^2}{(0'03)^4}\right]^{1/2} \qquad Q=\left[\frac{(6.160).(0'03)^4.(150)^2}{(0'05)^2.(7.700)}\right]^{1/3}$$

Calcula després la mitjana aritmètica, $m_a=(P+Q)/2$, i la mitjana geomètrica, $m_g=\sqrt{P.Q}$.

Solució. Resolem primer P, posant cadascun dels factors en potències de base 10,

$(70)^3=(7.10)^3=7^3.10^3=343.10^3$ $\qquad$ $0'000.006.3=6'3.10^{-6}$

$(0'006)^2=(6.10^{-3})^2=36.10^{-6}$ $\qquad$ $(0'03)^4=(3.10^{-2})^4=81.10^{-8}$

Substituint,

$$P=\left[\frac{343.10^3.6'3.10^{-6}.36.10^{-6}}{81.10^{-8}}\right]^{1/2}=\left(\frac{343.6'3.36}{81}.10^{3-6-6+8}\right)^{1/2}$$

Operant, $P=(960'4.10^{-1})^{1/2}=\sqrt{96'04}=9'8$

Simplifiquem ara l'expressió Q, posant-la també en potències de base 10,

$6160=6'16.10^3$ $\qquad$ $(0'03)^4=(3.10^{-2})^4=81.10^{-8}$

$(150)^2=(1'5.10^2)^2=2'25.10^4$ $\qquad$ $(0'05)^2=(5.10^{-2})^2=25.10^{-4}$

$7700=7'7.10^3$

Substituint,

$$Q=\left[\frac{6'16.10^3.81.10^{-8}.2'25.10^4}{25.10^{-4}.7'7.10^3}\right]^{1/3}=\left(\frac{6'16.81.2'25}{25.7'7}.10^{3-8+4+4-3}\right)^{1/3}$$

Multiplicant i sumant,

$$Q=(5'832.10^0)^{1/3}=(5'832)^{1/3}=\sqrt[3]{5'832}=1'8.$$

La mitjana aritmètica de les dues quantitats $P=9'8$ i $Q=1'8$ és $m_a=(P+Q)/2=(9'8+1'8)/2=11'6/2=5'8$.

La mitjana geomètrica és $m_g=\sqrt{P.Q}=\sqrt{9'8.1'8}=\sqrt{17'64}=4'2$. Observem que $m_g<m_a$ i això sempre passa en general: «La mitjana geomètrica sempre és més petita (o igual) que l'aritmètica».

Funcions exponencials

52. Donada la funció exponencial $f(x)=(1/3)^x$, troba les antiimatges de $f(x_1)=9$, $f(x_2)=1/3$, $f(x_3)=\sqrt{3}/3$ i $f(x_4)=1$. Fes-ne la gràfica, indicant si es tracta d'una exponencial creixent o decreixent. En quin punt es tallarà amb qualsevol altra corba exponencial?

Solució. Trobem les antiimatges dels valors donats.

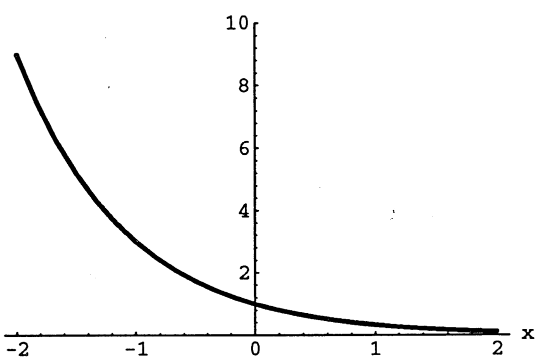
Veiem que la funció es pot escriure com a $f(x)=3^{-x}$, ja que $1/3=3^{-1}$. Per tant, si $f(x_1)=9$, igualant $9=3^{-x}$, $3^2=3^{-x}$. D'aquí deduïm que, $2=-x$, $x=-2$. Així, $x_1=-2$.

També $f(x_2)=1/3=3^{-1}$ i com que $f(x)=3^{-x}$, igualant, $3^{-1}=3^{-x}$, i per tant, $x_2=1$.

Si $f(x_3)=\sqrt{3}/3=3^{1/2}/3^1=3^{1/2-1}=3^{-1/2}$ i com que $f(x)=3^{-x}$, si igualem tindrem $3^{-1/2}=3^{-x}$, és a dir, $x_3=1/2$.

Finalment, si $f(x_4)=1=3^0$, serà $3^0=3^{-x}$, d'on $x_4=0$.

Amb els punts obtinguts, $P_1(-2, 9)$, $P_2(1, 1/3)$, $P_3(1/2, \sqrt{3}/3)$ i $P_4(0, 1)$, fem el gràfic de la funció:



Veiem que es tracta d'una exponencial decreixent, la qual cosa és deguda al fet que la base, 1/3, està compresa entre 0 i 1.

Naturalment, qualsevol altra funció exponencial a^x tallarà l'anterior en el punt P(0, 1), ja que $a^0=1$.

53. De dues funcions relacionades es verifica que $y=8-(1/2)^t$ i que $t=x^2-6.x+5$. Escriu la funció composta $y=f(x)$ i determina els seus zeros. Fes la gràfica en l'interval [0, 6] i indica el punt mínim i el recorregut.

Solució. Per escriure la funció composta $y=f(x)$, només caldrà substituir la t en la primera funció,

$$f(x)=8 - (1/2)^{x^2-6.x+5}$$

Trobarem els seus zeros, igualant la funció a zero i calculant els valors de la x que siguin solució de l'equació:

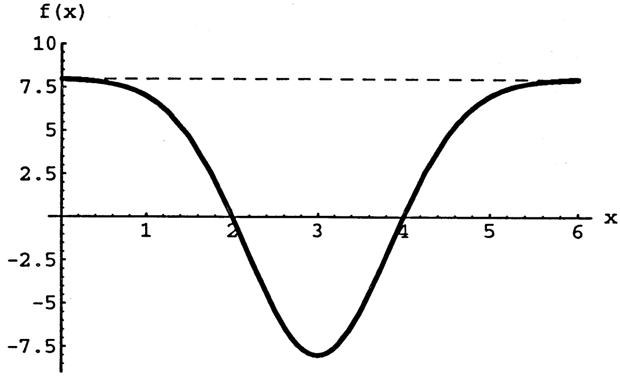
$$0=8 - (1/2)^{x^2-6.x+5} \ , \ (1/2)^{x^2-6.x+5}=8 \ , \ (2^{-1})^{x^2-6.x+5}=2^3$$

Multiplicant i igualant exponents, $-x^2+6.x-5=3$, $x^2-6.x+8=0$. Si resolem aquesta equació de segon grau obtindrem d'arrels $x_1=2$ i $x_2=4$, i aquests són precisament els zeros de la funció. És a dir, els punts on la corba talla l'eix X.

Fem a continuació una petita taula de valors,

x	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	7'96	7	0	-8	0	7	7'96

Dibuixem tot seguit la gràfica de la funció donada,



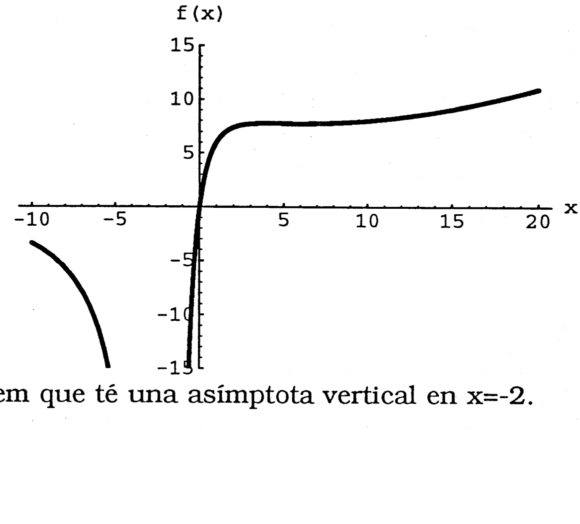
Clarament, el punt mínim és el P(3, -8). Observem també que la corba es va estabilitzant a l'alçada y=8 (només per x=6 ja és y=7'96), i així, en conseqüència, el recorregut és R(f)=[-8, 8).

54. Dibuixa la corba f(x)=g(x).h(x), producte de la funció racional $g(x)=50.x/(x+2)^2$ i la funció exponencial $h(x)=e^{x/12}$, realitzant primer una taula de valors en l'interval [-6, 10]. Hi ha un interval en què la funció és constant? Estudia els punts màxim i mínim i també els intervals de creixement i de decreixement.

Solució. Amb una calculadora científica fem una taula de valors

x	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10
f(x)	-11'3	-35'8	$-\infty$	0	7'3	7'7	7'7	7'7	7'9

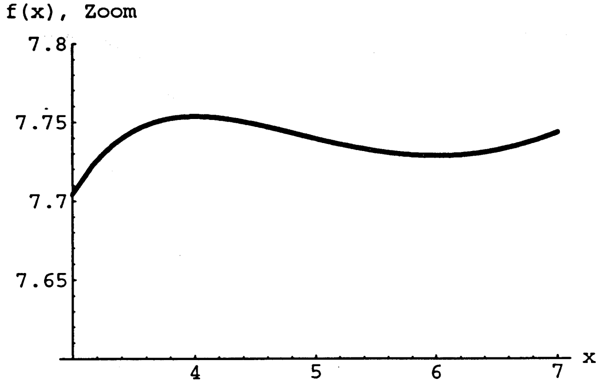
Dibuixem ara la corba,



Observem que té una asímptota vertical en x=-2.

Aparentment, sembla que la corba té un tram constant, però no pot ser així, ja que és una corba racional-exponencial. Veiem-ho calculant amb més precisió decimal les imatges dels valors de l'interval [2, 9]:

x	2	3	**4**	5	**6**	7	8	9
f(x)	7'383	7'704	**7'753**	7'739	**7'728**	7'743	7'790	7'873



Després de fer aquest "zoom", es veu clarament que la funció donada no és constant en aquest interval, sinó que té un màxim en el punt P(4, 7'753) i un mínim en Q(6, 7'728).

Els intervals de creixement i decreixement de la corba donada són, respectivament,

$$I_C=(-2,\ 4)\cup(6,\ +\infty) \quad \text{i} \quad I_D=(-\infty,\ -2)\cup(4,\ 6)$$

Resol les equacions exponencials següents:

55. $3^{x+1}+3^x+3^{x-1}=117$

Solució. Si apliquem les propietats de les potències, tindrem

$$3^x.3^1+3^x+3^x.3^{-1}=117$$

Perquè ens quedi més senzill, farem el canvi $3^x=y$,

$$y.3+y+(y/3)=117 \ ,\ 4.y+(y/3)=117 \ ,\ 13.y/3=117$$

$$13.y=351 \ ,\ y=351/13 \ ,\ y=27$$

Desfent el canvi, $3^x=27$, $3^x=3^3$, $\boxed{x=3}$.

56. $5^{2x+1}-5^{x+2}=2500$

Solució. Com que la suma d'exponents és igual al producte de potències de la mateixa base, podem escriure $5^{2.x}.5^1 - 5^x.5^2=2500$.

A més, com que el producte d'exponents és igual a la potència d'una altra potència, tenim $(5^x)^2.5 - 5^x.25=2500$.

Si fem el canvi $5^x=y$ quedarà $5.y^2-25.y=2500$, d'on resulta, simplificant l'equació de segon grau, $y^2-5.y-500=0$. Les arrels són:

$$y=\frac{-(-5)\pm\sqrt{5^2-4.1.(-500)}}{2.1}=\frac{5\pm\sqrt{25+2000}}{2}=\frac{5\pm45}{2}$$

Per al signe positiu tenim $y=25$ i, desfent el canvi, $5^x=25$, $5^x=5^2$, d'on $\boxed{x=2}$.

Per al signe negatiu, $x=-20$, $5^x=-20$, la qual cosa és impossible ja que les funcions exponencials sempre tenen imatges positives.

57. $\dfrac{4^{x-1}}{10}+\dfrac{32}{5}=2^x$

Solució. Eliminem primer els denominadors, multiplicant tot per 10, $4^{x-1}+64=10.2^x$.

Com que una diferència d'exponents és igual al quocient de potències de la mateixa base, $(4^x)/4+64=10.2^x$, $4^x+256=40.2^x$.

Ara bé, podem posar $4^x=(2^2)^x=2^{2.x}=(2^x)^2$. Per tant, obtindrem $(2^x)^2+256=40.2^x$.

Fent el canvi $2^x=y$, resulta l'equació de segon grau $y^2+256=40.y$, $y^2-40.y+256=0$, que té per arrels:

$$y=\frac{-(-40)\pm\sqrt{40^2-4.1.(256)}}{2.1}=\frac{40\pm\sqrt{1600-1024}}{2}=\frac{40\pm\sqrt{576}}{2}=\frac{40\pm24}{2}$$

Amb el signe positiu, $y=(40+24)/2=64/2=32$. Desfent el canvi, $2^x=32$, $2^x=2^5$, $\boxed{x=5}$.

Amb el signe menys, $y=(40-24)/2=16/2=8$, $2^x=8$, $2^x=2^3$ i així tindrem una altra solució, $\boxed{x=3}$.

58. $\begin{cases} 5.2^x+4.3^y=964 \\ 7.2^x-5.3^y=491 \end{cases}$

Solució. Si fem $2^x=z$ i $3^y=t$, s'obté el sistema lineal

$$5.z+4.t=964 \quad \text{i} \quad 7.z-5.t=491$$

Si multipliquem la 1a equació per 5 i la 2a per 4 resulta:

$$25.z+20.t=4820 \quad \text{i} \quad 28.z-20.t=1964$$

Sumant aquestes equacions podem eliminar la incògnita t i resulta $53.z=6784$, $z=6784/53=128$.

És a dir, $2^x=128$, $2^x=2^7$, $\boxed{x=7}$.

D'altra banda, si z=128, substituint a la 1a equació del sistema inicial tenim:

$5.128+4.t=964$, $640+4.t=964$, $4.t=324$, $t=81$.

Per tant, $3^y=81$, $3^y=3^4$, $\boxed{y=4}$.

Funcions logarítmiques

59. Calcula, aplicant la definició de logaritme, el valor de

$$z=L_{1'5}\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{on} \quad x=L_{0'75}\left(\frac{19683}{262144}\right) \ \text{i} \ y=L_{1'8}\left(\frac{6561}{625}\right)$$

Solució. Recordem que el logaritme d'un número és el valor de l'exponent a què s'ha d'elevar la base perquè ens doni el número. Aplicant aquesta definició obtindrem

$$1'5^z=\frac{x}{y} \ , \quad 0'75^x=\frac{19683}{262144} \quad \text{i} \quad 1'8^y=\frac{6561}{625}$$

Si volem deduir els valors de x, y i z sense utilitzar calculadora, haurem de descompondre en factors primers. Així obtenim,

$$19683=3^9 \ , \ 262144=2^{18} \ , \ 6561=3^8 \ \text{i} \ 625=5^4$$

Calculem en primer lloc el valor de x. Com que 0'75=3/4, tenim

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x=\frac{3^9}{2^{18}}=\frac{3^9}{2^{2.9}}=\frac{3^9}{4^9}=\left(\frac{3}{4}\right)^9 \quad \text{Per tant, } \boxed{x=9}.$$

Procedim anàlogament amb la y i substituïm 1'8=18/10=9/5,

$$\left(\frac{9}{5}\right)^y=\frac{3^8}{5^4}=\frac{3^{2.4}}{5^4}=\frac{9^4}{5^4}=\left(\frac{9}{5}\right)^4 \quad \text{Per tant, } \boxed{y=4}.$$

Només ens falta calcular la z. Com que 1'5=3/2, tindrem

$$\left(\frac{3}{2}\right)^z=\frac{x}{y}=\frac{9}{4}=\frac{3^2}{2^2}=\left(\frac{3}{2}\right)^2 \quad \text{Així, doncs, } \boxed{z=2}.$$

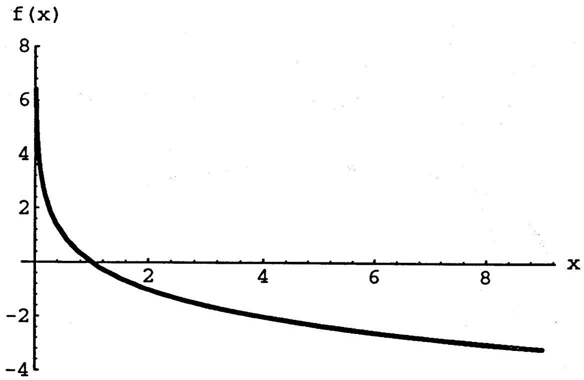
60. Fes la gràfica de la funció logarítmica $f(x)=L_{0'5}(x)$. És una funció creixent o decreixent? Quina és la imatge de la unitat? I la antiimatge de -3?

Solució. Partim de $y=L_{0'5}(x)$. Si apliquem la definició de logaritme, $0'5^y=x$. També podem posar $(1/2)^y=x$, $1/2^y=x$, $2^{-y}=x$.

Per dibuixar la funció logarítmica donada, farem una taula de valors per a la funció $x=2^{-y}$, donant valors a la y. Obtindrem

x	8	4	2	1	0'5	0'25	0'125
y	-3	-2	-1	0	1	2	3

La gràfica de la funció $f(x)=L_{0'5}(x)$ és, doncs,



Observem que és una funció decreixent, a causa del fet que la base, 0'5, està compresa entre 0 i 1. La imatge de la unitat és $f(1)=0$ i això passa sempre, independentment de la base, ja que $L_a(1)=0$ per ser $a^0=1$. De la taula de valors veiem que la antiimatge de -3 és 8, $f^{-1}(-3)=8$.

Aquest resultat el podem trobar també analíticament, igualant la funció logarítmica a -3. Ens quedaria $L_{0'5}(x)=-3$. Operant,

$$x=0'5^{-3}=(1/2)^{-3}=(2^{-1})^{-3}=2^3=8.$$

61. Estudia el domini de la funció logarítmica $f(x)=Ln(20+8.x-x^2)$, fes una taula de valors i dibuixa la gràfica, assenyalant el màxim i el recorregut.

Solució. Sabem que no existeixen els logaritmes dels números que no són positius. Per tant, la condició d'existència és que es verifiqui $20+8.x-x^2>0$.

Estudiem la inequació de segon grau, trobant primer els punts frontera, que són les arrels de $20+8.x-x^2=0$, o bé $x^2-8.x-20=0$.

$$x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4.1.(-20)}}{2.1}=\frac{8\pm\sqrt{144}}{2}=\frac{8\pm12}{2}$$

Per al signe positiu, $x=20/2=10$, i per al negatiu, $x=-4/2=-2$. Aquests dos punts frontera ens determinaran el domini.

Per $x<-2$, p. e. $x=-3$, $f(-3)=Ln(20-24-9)=Ln(-13)$, no existeix.

Per $x=-2$, $f(-2)=Ln(20-16-4)=Ln(0)=-\infty$, no existeix.

Per $-2<x<10$, p. e. $x=0$, $f(0)=Ln(20+0-0)=Ln(20)$, existeix.

Per $x=10$, $f(10)=Ln(20+80-100)=Ln(0)=-\infty$, no existeix.

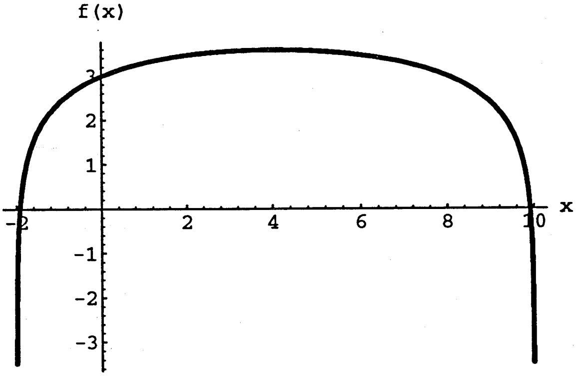
Per $x>10$, p.e. $x=11$, $f(11)=Ln(20+88-121)=Ln(-13)$, no existeix.

Així, doncs, el domini de la funció és $D(f)=(-2, 10)$.

Construirem ara una taula de valors:

x	-1	1	3	**4**	5	7	9
f(x)	2'39	3'29	3'55	**3'58**	3'55	3'29	2'39

Dibuixem a continuació la gràfica d'aquesta funció logarítmica,



Observem que realment la funció és $-\infty$ per a les abscisses x=-2 i x=10. A més, el màxim es troba en el punt P(4, 3'58).

Finalment, veiem que $R(f)=(-\infty, Ln(36)]$, on $Ln(36)=f(4)\approx 3'58$.

Aplicant les propietats dels logaritmes i emprant la calculadora, troba els resultats de les operacions següents:

62. $A=\dfrac{(53'25)^4.(3'478)^5}{(965'1)^3}$

Solució. Calculem el logaritme de l'expressió anterior i apliquem tot seguit les propietats dels logaritmes. En primer lloc, com que el logaritme d'un quocient és igual a la resta dels logaritmes,

$$Log(A)=Log[(53'25)^4.(3'478)^5]-Log(965'1)^3$$

Pel fet que el logaritme d'un producte és igual a la suma dels logaritmes, tindrem

$$Log(A)=Log(53'25)^4+Log(3'478)^5-Log(965'1)^3$$

Apliquem ara el fet que el logaritme d'una potència és igual a l'exponent multiplicat pel logaritme de la base,

$$Log(A)=4.Log(53'25)+5.Log(3'478)-3.Log(965'1)$$

Calculem els valors dels logaritmes, amb 6 decimals,

$$Log(A)=4.(1'726319)+5.(0'541329)-3.(2'984572)$$

Operant, Log(A)=0'658205.

Com que són logaritmes decimals, tindrem $A=10^{0'658205}$, que ens dóna el valor de $\boxed{A=4'552}$.

63. $D=\sqrt[29]{\dfrac{(12'56+11'42)^2}{\sqrt[3]{157'8}}}$

Solució. Abans d'aplicar logaritmes haurem de sumar 12'56+11'42=23'98. A més, com que el logaritme d'una arrel és igual al radicand dividit per l'índex de l'arrel,

$$\mathrm{Log}(D)=\mathrm{Log}\sqrt[29]{\frac{23'98^2}{\sqrt[3]{157'8}}}=\frac{1}{29}.\mathrm{Log}\left(\frac{23'98^2}{\sqrt[3]{157'8}}\right)$$

Aplicant les propietats del logaritme d'un quocient, una potència i una arrel,

$$\mathrm{Log}(D)=\frac{\mathrm{Log}\ 23'98^2-\mathrm{Log}\sqrt[3]{157'8}}{29}=\frac{2.\mathrm{Log}(23'98)-[\mathrm{Log}(157'8)]/3}{29}$$

Agafem la calculadora, trobem aquests logaritmes i operem,

$$\mathrm{Log}(D)=\frac{2.(1'379849)-2'198107/3}{29}=\ldots=0'069896$$

Aplicant la definició de logaritme decimal, $D=10^{0'069896}$, resulta

$\boxed{D=1'174}$.

Resol les equacions logarítmiques següents:

64. $\mathrm{Log}(3x+5)^2-2.\mathrm{Log}(2x+1)=2-\mathrm{Log}(25)$

Solució. Per les propietats del logaritme d'una potència i com que $25=5^2$, tenim

$$2.\mathrm{Log}(3.x+5)-2.\mathrm{Log}(2.x+1)=2-2.\mathrm{Log}(5)$$

Simplificant per 2,

$$\mathrm{Log}(3.x+5)-\mathrm{Log}(2.x+1)=1-\mathrm{Log}(5)$$

Com que $1=\mathrm{Log}(10)$ i pel fet que la resta de logaritmes és el logaritme del quocient,

$$\mathrm{Log}[(3.x+5)/(2.x+1)]=\mathrm{Log}(10/5)$$

D'on s'obté $(3.x+5)/(2.x+1)=2$, $3.x+5=4.x+2$, $-x=-3$ i $\boxed{x=3}$.

65. $L_x(100)-L_x(25)=2.L_x(x)$

Solució. Directament, $L_x(100/25)=L_x(x^2)$. Per tant, $x^2=4$. De les dues possiblitats, x=2 i x=-2, només és vàlida la primera, ja que no té sentit que la base dels logaritmes sigui negativa.

En conseqüència, $\boxed{x=2}$.

66. $Log(8^{Log(x)})-Log(2^{Log(x)})=Log(x^x)$

Solució. Apliquem en primer lloc la propietat del logaritme d'una potència,

$$Log(x).Log(8)-Log(x).Log(2)=x.Log(x)$$

Traient factor comú Log(x),

$$Log(x).[Log(8)-Log(2)]=x.Log(x)$$

Com que $Log(8)-Log(2)=Log(8/2)=Log(4)$, substituint,

$$Log(x).Log(4)=x.Log(x)$$

Passant al primer membre i traient de nou factor comú Log(x),

$$Log(x).[Log(4)-x]=0$$

Tenim dues possibilitats. La primera és $Log(x)=0$, d'on $\boxed{x=1}$ i la segona $Log(4)-x=0$, $x=Log(4)$, $\boxed{x=0'602}$.

Resol els sistemes d'equacions logarítmiques següents:

67. $Log(x^2)+Log(y^3)=12 \quad \wedge \quad Log(x^5/\sqrt{y})=14$

Solució. Resolem les dues equacions, tot aplicant les propietats dels logaritmes,

$$2.Log(x)+3.Log(y)=12 \quad \wedge \quad 5.Log(x)-(1/2).Log(y)=14$$

Fixem-nos que ens ha quedat un sistema d'equacions lineals en les incògnites Log(x) i Log(y). Multipliquem per 6 la segona, $30.Log(x)-3.Log(y)=84$. Sumant-la amb la primera,

$$32.Log(x)=96 \ , \ Log(x)=3 \ , \ x=10^3 \ , \ \boxed{x=1000}.$$

Substituint en la primera equació,

$$2.3+3.Log(y)=12 \ , \ 3.Log(y)=6 \ , \ Log(y)=2 \ , \ y=10^2 \ , \ \boxed{y=100}.$$

68. $Ln(x)=Ln(5.y)+0'693147 \quad \wedge \quad L_y(x^2-15.x-20)-L_y(20)=2$

Solució. Resolem la primera equació, tot veient que 0'693147 l'hem de posar com un logaritme neperià, $Ln(m)=0'693147$, d'on $m=e^{0'693147}=2$. Per tant,

$$Ln(x)=Ln(5.y)+Ln(2) \ , \ Ln(x)=Ln(5.y.2) \ , \ x=10.y$$

Per a la segona,

$$L_y[(x^2-15.x-20)/20]=2 \ , \ (x^2-15.x-20)/20=y^2 \ , \ x^2-15.x-20=20.y^2$$

Substituint $x=10.y$ en l'equació anterior,

$$100.y^2-150.y-20=20.y^2 \ , \ 80.y^2-150.y-20=0 \ , \ 8.y^2-15.y-2=0$$

Resolem l'equació de segon grau anterior,

$$y=\frac{-(-15)\pm\sqrt{(-15)^2-4.8.(-2)}}{2.8}=\frac{15\pm\sqrt{225+64}}{16}=\frac{15\pm 17}{16}$$

Per al signe positiu, y=(15+17)/16=32/16=2, d'on x=10.2=20. Per tant, $\boxed{x=20}$ i $\boxed{y=2}$.

Per al signe negatiu, y=(15-17)/16=-2/16=-1/8, que no és vàlida, ja que no es pot calcular Ln(5.y) donat al començament.

2.3 FUNCIONS TRIGONOMÈTRIQUES

Trigonometria circular

69. Expressa en unitats angulars sexagesimals els angles següents donats en radians: α=0'2435 rad i β=1'3273 rad. Què succeeix amb la seva suma? Comprova-ho.

Solució. Sabem que π radians és el mateix que 180°. Passem α a graus, minuts i segons sexagesimals.

$$\alpha=0'2435 \text{ rad. } (180°/3'1416 \text{ rad})=13'95149°$$

Per tant, són 13° enters més 0'95149° que passarem a minuts, multiplicant per 60, ja que 1°=60', 0'95149.60=57'0894 min.

Així són 57 minuts enters més 0'0894 minuts, que tornarem a multiplicar per 60 per passar-los a segons, 0'0894.60=5'364.

Han quedat 5 segons enters més 0'364 segons, que negligim. En resum, tenim $\boxed{\alpha=13°\ 57'\ 5''}$.

Fem el mateix amb l'angle β=1'3273 rad. Multipliquem per 180° i dividim per 3'1416 rad. Ens donarà 76'04851°.

Trobem els minuts, restant la part entera i multiplicant per 60, tindrem 2'9106 min. Per tant, 2' enters.

Ens queden 0'9106 min que passem a segons, tot multiplicant per 60, 54'636. Negligint els decimals, resulten 54".

En resum, tenim $\boxed{\beta=76°\ 2'\ 54''}$

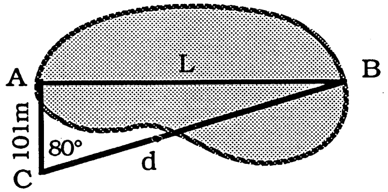
La suma dels dos angles és $\alpha+\beta$=(13° 57' 5")+(76° 2' 54"), és a dir, 89° 59' 59", que és en realitat un angle recte (90°), com hauriem obtingut si no haguéssim negligit els decimals dels segons.

Ho podem comprovar fent la suma en radians

$$\alpha+\beta=0'2435+1'3273=1'5708=(3'1416)/2=\pi/2 \text{ radians}$$

70. Per trobar la longitud AB d'un llac, un topògraf traça una recta AC perpendicular a AB. Després mesura el segment AC que resulta ser de 101 m. També mesura l'angle en C, que és de 80°. Quina longitud té el llac? Calcula també per trigonometria la distància BC i comprova-la pel teorema de Pitàgores.

Solució. Fem un esquema, on indiquem les dades AC=101m i l'angle C=80° i les distàncies que hem de trobar L=AB i d=CB.



De l'angle C=80° sabem el catet contigu AC=101m i volem trobar el catet oposat L=AB. La raó trigonomètrica que haurem d'emprar és la tangent,

$$\tan(80°)=L/101$$

Per tant, $L=101.\tan(80°)$

Emprant una calculadora, podrem trobar aproximadament la longitud del llac, $L=101.5'671281 \approx 572'80$m

Per trobar la distància d=AB, la hipotenusa, com que de l'angle C=80° sabem el catet contigu, AC=101m, la raó trigonomètrica que emprarem serà la del cosinus,

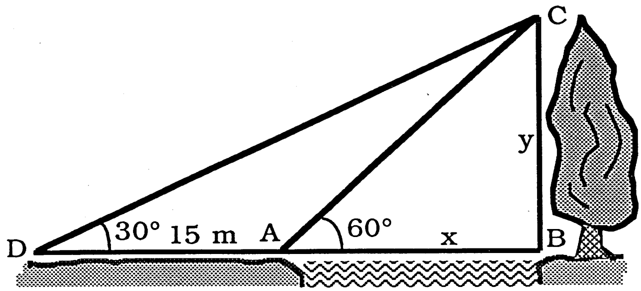
$\cos(80°)=101/d$, $d=101/\cos(80°)=101/0'173648 \approx 581'63$m

Comprovem-ho pel teorema de Pitàgores,

$$d=\sqrt{101^2+572'80^2}=\sqrt{338300'84}\approx 581'63\text{m}.$$

71. Una persona a la vora del riu mira el cim d'un xiprer, que està davant seu i a l'altra vora del riu, amb un angle d'elevació de 60°. Allunyant-se enrera uns 15 m, el veu amb un angle de 30°. Quines són l'amplada del riu i l'altura del xiprer?

Solució. Fem un esquema, i observem que ens han resultat dos triangles rectangles



Com que les seves hipotenuses no ens interessen, haurem de fer servir la raó tangent. En els triangles ABC i DBC, tenim

$$\tan(60°)=y/x \quad \text{i} \quad \tan(30°)=y/(15+x)$$

Resolem aquest sistema d'equacions amb les dues incògnites, que són l'amplada del riu, x, i l'alçada del xiprer, y. Tenim

$$y=x.\tan(60°) \quad i \quad y=(15+x).\tan(30°)$$

Substituint las tangents pels seus valors,

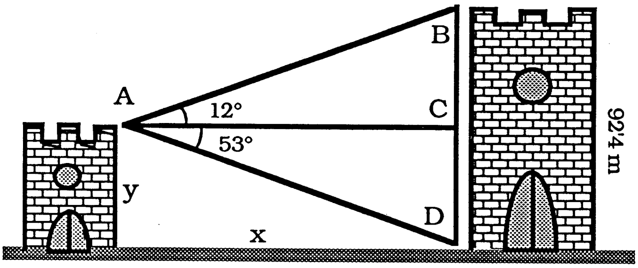
$$y=x.1'732050 \quad i \quad y=(15+x).0'577350$$

Igualant, 1'732050.x=0'577350.(15+x) , 3.x=15+x , 2.x=15 i, per tant, l'amplada del riu és $\boxed{x=7'5\ m}$.

Substituint, y=7'5.1'732050=12'99m i, aproximadament, podem dir que l'alçada del xiprer és $\boxed{y=13\ m}$.

72. L'alçada d'una torre és de 92'4 m. Des de dalt de tot d'una torre més petita, que és a la seva esquerra, l'angle d'elevació del cim de la primera és de 12° i l'angle de depressió de la seva base és de 53°. Troba la distància entre les dues torres i l'alçada de la petita.

Solució. El problema és molt similar a l'anterior, perquè també ens resulten dos triangles rectangles, ACB i ACD.



Observem que AC=x, CD=y i BC=92'4-y. També hem d'aplicar la tangent,

$$\tan(12°)=BC/AC=(92'4-y)/x \quad i \quad \tan(53°)=CD/AC=y/x$$

Per tant,

$$92'4-y=x.\tan(12°) \quad i \quad y=x.\tan(53°)$$

Substituint la segona en la primera,

$$92'4-x.\tan(53°)=x.\tan(12°)$$

Calculem les respectives tangents amb una calculadora,

92'4-1'327044.x=0'212556.x , 92'4=1'5396.x , x=92'4/1'5396

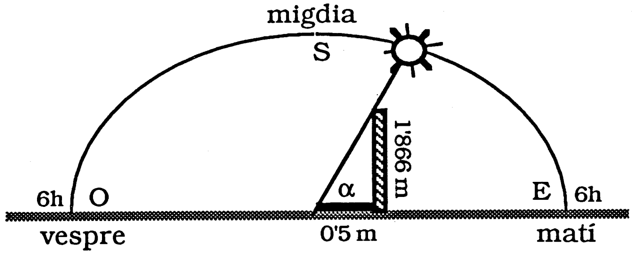
D'aquí obtenim la distància entre les torres, $\boxed{x=60\ m}$.

Substituint en y=x.tan(53°), obtenim y=60.1'327044=79'62 m.

Per tant, l'alçada de la torre petita és de $\boxed{y=79'62\ m}$.

73. En un lloc de l'equador terrestre el sol surt a les 6 del matí i es pon a les 6 de la tarda. Un nadiu col.loca verticalment la seva llança de 1'866 m de longitud i observa que projecta una ombra de 0'5 m cap a l'oest. Quin és l'angle d'elevació del sol? Quina hora és?

Solució. Per comprendre bé el problema cal fer primer una figura, indicant-hi totes les dades,



Fàcilment podem calcular l'angle α d'elevació del sol. Aplicant la tangent, tindrem

$$\tan(\alpha)=1'866/0'5=3'732 \quad , \quad \alpha=\text{arc } \tan(3'732)=75^\circ$$

Des de les 6h del matí fins a les 6h del vespre (en total 12h) l'angle d'elevació haurà variat de 0° a l'est a 180° a l'oest. Per tant, cada hora equival a 180°/12=15°.

En conseqüència, les hores passades des de la sortida del sol, en el moment que el negret vol calcular l'hora, són 75°/15°=5h.

Sumant, 6h+5h=11h. És clar, doncs, que si tingués un rellotge, aquest li marcaria les $\boxed{\text{11h del matí}}$.

Funcions circulars

74. Calcula f(15°) per a la funció que primer s'ha de simplificar:

$$f(x)=\frac{[1+\tan(x)]^2}{1+\tan^2(x)}-1$$

Solució. Reduïm la funció anterior a comú denominador,

$$f(x)=\frac{[1+\tan(x)]^2-1.[1+\tan^2(x)]}{1+\tan^2(x)}=\frac{1+2.\tan(x)+\tan^2(x)-1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}$$

Simplificant, i posant la tangent en funció del sinus i cosinus,

$$f(x)=\frac{2.\tan(x)}{1+\tan^2(x)}=\frac{2.\sin(x)/\cos(x)}{1+\sin^2(x)/\cos^2(x)}$$

Multiplicant numerador i denominador per $\cos^2(x)$ i tenint en compte la propietat fonamental i les fórmules de l'angle doble,

$$f(x)=\frac{2.\sin(x).\cos(x)}{\cos^2(x)+\sin^2(x)}=\frac{\sin(2.x)}{1}=\sin(2.x)$$

Pel valor de l'angle x=15° tindrem,

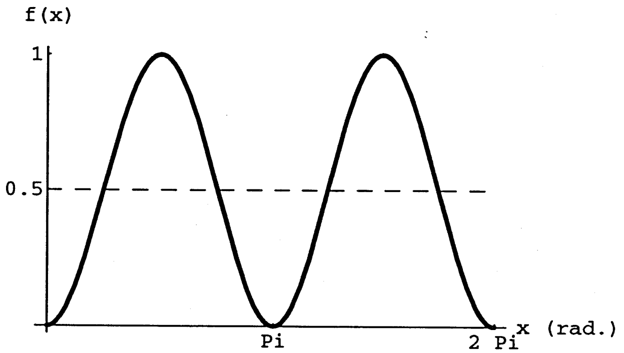
$$f(15°)=\sin(2.15°)=\sin(30°)=\boxed{0'5}.$$

75. Dibuixa la gràfica de la funció circular $f(x)=\sin^2(x)$, en l'interval [0°, 360°], donant a la x valors que siguin múltiples de 45°. Quin és el seu recorregut? I el període d'aquesta funció? I les infinites antiimatges de f(x)=1/2?

Solució. Comencem fent la taula de valors corresponent:

x	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
f(x)	0	0'5	1	0'5	0	0.5	1	0'5	0

Dibuixem ara la funció $f(x)=\sin^2(x)$,



El recorregut és, evidentment, R(f)=[0, 1] i el període T=π rad o bé T=180°, ja que és la longitud de l'interval on hi ha el mínim tros que sempre s'anirà repetint.

També de la taula de valors veiem que les infinites antiimatges de f(x)=0'5 són 45°, 135°, 225°, 315°, i, en general, x=45°+90°.k, on k és un nombre enter qualsevol.

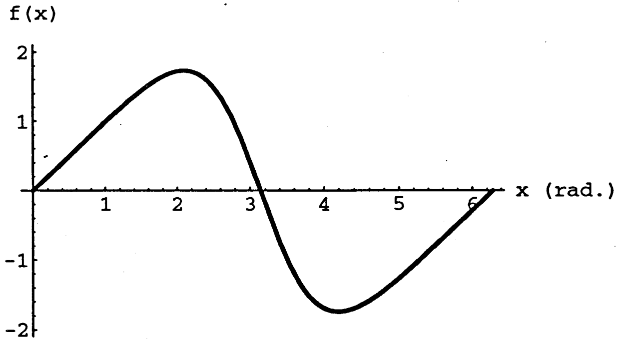
76. Dibuixa la funció trigonomètrica f(x)=3.sin(x)/[2+cos(x)] en l'interval [0°, 360°], donant valors de 30° en 30°. Quin és el domini? I el recorregut? Assenyala els punts màxim i mínim.

Solució. Escrivim primer la taula de valors,

x	0°	30°	60°	90°	**120°**	150°	180°	210°	**240°**	270°
f(x)	0	0'52	1'03	1'5	**1'73**	1'32	0	-1'32	**-1'73**	-1'5

I també, f(300°)=-1'03, f(330°)=-0'52 i f(360°)=0.

Amb aquests valors ja podrem dibuixar la corba,



El domini és tot l'interval real, ja que perquè la funció no existís hauria de passar que 2+cos(x)=0 , cos(x)=-2, la qual cosa és impossible, ja que $-1 \le \cos(x) \le 1$.

El recorregut és R(f)=[-1'73, 1'73] o, en realitat, si prenéssim tots els decimals, R(f)=[$-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$], ja que $\sqrt{3} \approx 1'73$.

També veiem que el punt màxim és P(120°, 1'73) i que el punt mínin és Q(240°, -1'73).

Estudia les solucions de les següents equacions trigonomètriques en l'interval [0°,360°]:

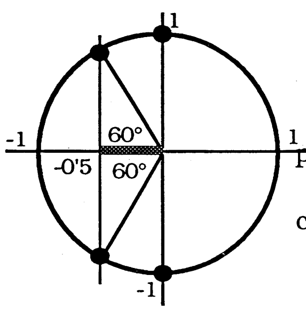
77. cos(2x)+cos(-x)=-1

Solució. Si per a la funció cosinus tenim en compte la fórmula de l'angle doble i que és una funció parella, ens queda

$$\cos^2(x)-\sin^2(x)+\cos(x)=-1$$

Posem-ho tot en funció del cosinus,

$$\cos^2(x)-[1-\cos^2(x)]+\cos(x)=-1 \quad , \quad \cos^2(x)-1+\cos^2(x)+\cos(x)+1=0$$



Simplificant, $2.\cos^2(x)+\cos(x)=0$

Traient factor comú cos(x),

$$\cos(x).[2.\cos(x)+1]=0$$

La primera possibilitat, cos(x)=0, té per solucions x=$\boxed{90°}$ i x=$\boxed{270°}$.

La segona, 2.cos(x)+1=0, o també cos(x)=-1/2, dóna com a resultats

$$x=180°-60°=\boxed{120°}$$

$$x=180°+60°=\boxed{240°}$$

78. $3.\tan(x)=2.\sqrt{1-\sin^2(x)}$

Solució. Posem la tangent en funció del sinus i cosinus, i fem servir la propietat fonamental

$$3.\sin(x)/\cos(x)=2.\cos(x) \quad , \quad 3.\sin(x)=2.\cos^2(x)$$

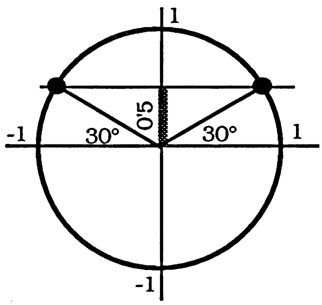
Posem-ho tot en funció del sinus, $3.\sin(x)=2.[1-\sin^2(x)]$

Operant, $3.\sin(x)=2-2.\sin^2(x)$, $2.\sin^2(x)+3.\sin(x)-2=0$

Si anomenem $y=\sin(x)$, resulta l'equació $2.y^2+3.y-2=0$

Trobem les seves arrels,

$$y=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{-3\pm5}{4}$$



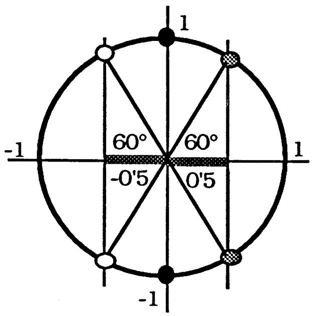
Amb el signe més, $y=2/4=1/2$, o bé $\sin(x)=1/2$, que té per solucions $x=\boxed{30°}$ i $x=180°-30°=\boxed{150°}$.

Amb el signe negatiu, $y=-8/4=-2$, $\sin(x)=-2$, la qual cosa és impossible ja que $-1\leq\sin(x)\leq1$.

79. Resol el sistema d'equacions trigonomètriques següent, i troba únicament les solucions en l'interval [0°,360°]:

$$\sin^2(x)+\cos^2(y)=1'25 \quad \wedge \quad \sin^2(x)-\cos^2(y)=0'75$$

Solució. Sumant ambdues equacions, $2.\sin^2(x)=2$, $\sin^2(x)=1$. Per tant, $\sin(x)=\pm1$, que té per solucions $\boxed{x=90°}$ i $\boxed{x=270°}$. Són simbolitzades pels punts negres de la figura.



Restant les equacions donades,

$$2.\cos^2(y)=0'50 \ , \ \cos^2(y)=0'25$$

Per tant, $\cos(y)=\pm0'5$.

Amb el signe positiu, $\cos(y)=0'5$, tenim dues solucions, marcades en gris, $y=\boxed{60°}$ i $y=360°-60°=\boxed{300°}$.

Amb el signe negatiu, $\cos(y)=-0'5$, ens resulten dues noves solucions, (en blanc), $y=180°-60°=\boxed{120°}$ i $y=180°+60°=\boxed{240°}$.

En conseqüència, el sistema tindrà en total 2×4=8 solucions, que són les següents:

$P_1(90°, 60°)$ $P_2(90°, 120°)$ $P_3(90°, 240°)$ $P_4(90°, 300°)$
$P_5(270°, 60°)$ $P_6(270°, 120°)$ $P_7(270°, 240°)$ $P_8(270°, 300°)$

Funcions hiperbòliques

80. Expressa la funció $f(x)=21.Ch(x/2)-19.Sh(x/2)-17$ en funció de les exponencials e^x i e^{-x}, i dibuixa-la en l'interval [-1, 7]. Quin és el punt mínim? Troba també, analíticament, els punts en què la corba talla els eixos i comprova-ho gràficament.

Solució. Per posar les funcions hiperbòliques en funció de les exponencials, emprarem les relacions

$$Ch(x)=(e^x+e^{-x})/2 \quad \text{i} \quad Sh(x)=(e^x-e^{-x})/2$$

En el nostre cas, tindrem

$$y=21.\frac{e^{x/2}+e^{-x/2}}{2}-19.\frac{e^{x/2}-e^{-x/2}}{2}-17$$

Reduint a comú denominador,

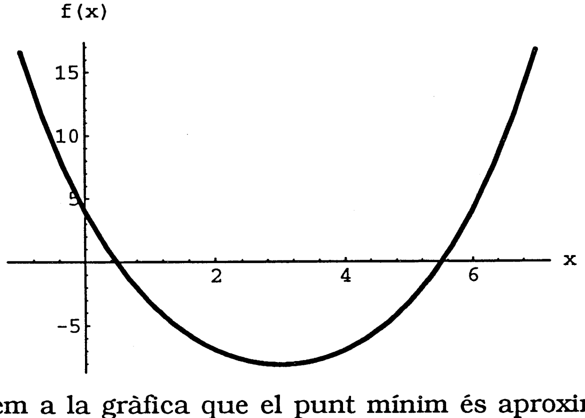
$$y=\frac{21.e^{x/2}+21.e^{-x/2}-19.e^{x/2}+19.e^{-x/2}-34}{2}=\frac{2.e^{x/2}+40.e^{-x/2}-34}{2}$$

Simplificant, $\boxed{y=e^{x/2}+20.e^{-x/2}-17}$.

Fem tot seguit una taula de valors en l'interval [-1, 7],

x	-1	0	1	2	**3**	4	5	6	7
y	16'58	4	-3'22	-6'92	**-8'05**	-6'90	-3'17	4'08	16'71

Amb aquests punts ja podrem dibuixar la corba,



Observem a la gràfica que el punt mínim és aproximadament el P(3, -8'05). En realitat és el que té per abscissa $x=Ln(20)$.

Calculem ara de manera analítica els punts en què la corba talla els eixos. El punt de tall amb l'eix Y és, evidentment, Q(0, 4). Trobem tot seguit els punts de tall amb l'eix X, $y=0$.

Tenim $e^{x/2}+20.e^{-x/2}-17=0$, $e^{x/2}+20/e^{x/2}-17=0$.

Fent el canvi de variable $e^{x/2}=t$ ens queda

$$t+20/t-17=0 \quad , \quad t^2+20-17.t=0$$

Resolem l'equació de segon grau, $t^2-17.t+20=0$.

$$t=\frac{-(-17)\pm\sqrt{(-17)^2-4.1.20}}{2}=\frac{17\pm\sqrt{289-80}}{2}=\frac{17\pm 14'4568}{2}$$

Amb el signe més, $t=15'7284$ i, per tant, $e^{x/2}=15'7284$.

Emprant logaritmes neperians, $x/2=\mathrm{Ln}(15'7284)=2'755468$ i, per tant, $x=2.2'755468=5'510936$.

Amb el signe menys, $t=1'2716$ i així $e^{x/2}=1'2716$. Si també fem servir logaritmes neperians, $x=2.\mathrm{Ln}(1'2716)=0'4805519$.

En resum, els punts de tall de la corba amb l'eix X són

$$P_1(0'48,\ 0) \quad \text{i} \quad P_2(5'51,\ 0)$$

Si observem la gràfica, trobarem que aproximadament aquests són els dos punts de tall.

f) PROBLEMES PROPOSATS

2.1 FUNCIONS POLINÒMIQUES I RACIONALS

Funcions polinòmiques

81. Calcula els zeros de la funció quadràtica $f(x)=x^2-8x+12$ i després determina'n el vèrtex. És una paràbola dreta o invertida? Dibuixa-la mitjançant una taula de valors en l'interval [0, 8]. Quin és el recorregut?

Sol. $x_1=2 \wedge x_2=6$, V(4,-4) , P. dreta , $R(f)=[-4, +\infty)$.

82. Quin és el vèrtex de la funció quadràtica $f(x)=x^2+2x-4$? Fes la gràfica i assenyala els intervals de creixement i de decreixement. Quines seran les antiimatges de f(x)=4? Troba també el recorregut.

Sol. V(-1,-5) , $I_D=(-\infty,-1)$, $I_C=(-1,+\infty)$, 2 i -4 , $R(f)=[-5, +\infty)$.

83. Un article d'alimentació té un ritme de comanda donat per la fórmula C(p)=1500-250.p unitats diàries quan el preu és de p PTA/unitat. Si la despesa per consum, D(p), és igual al producte de la comanda de l'article pel seu preu respectiu, dibuixa la funció de comanda i la funció de despesa. A quin preu es verifica la major despesa per consum de l'article? Quines seran aquestes despeses?

Sol. C(p)=F. rectilínia , $D(p)=-250.p^2+1500.p$ P. invertida
$p_M=3$ PTA/unitat , D(3)=2250 PTA.

84. Dibuixa la funció cúbica $f(x)=(1/4).x^3-3x$, i apunta els intervals de creixement i de decreixement. Quins són els punts màxim i mínim? I els zeros d'aquesta funció?

Sol. $I_C=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$, $I_D=(-2,2)$, $P_M(-2,4)$, $P_m(2,-4)$
$f(x)=0 \Rightarrow x_1=0$, $x_2=2.\sqrt{3}$, $x_3=-2.\sqrt{3}$.

85. Determina per Ruffini els zeros de la funció de cinquè grau $f(x)=2x^5-10x^4-30x^3+130x^2+148x-240$, i després expressa aquesta funció com a producte de cinc factors.

Sol. $f(x)=0 \Rightarrow x_1=1,\ x_2=-2,\ x_3=-3,\ x_4=4 \wedge x_5=5$
$f(x)=2.(x-1)(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)$.

Funcions racionals

86. Se sap que una funció racional de la forma $f(x)=(a.x+b)/(x+c)$ talla l'eix X en l'abscissa unitat i que les asímptotes horitzontals i verticals són $y=3$ i $x=2$, respectivament. Determina'n l'equació i dibuixa la gràfica en l'interval [--4, 8].

Sol. $P_1(1,0)$, $P_2(2,\infty)$ i $P_3(\infty,3)$ $\Rightarrow$ $f(x)=(3x-3)/(x-2)$.

87. Per a fabricar uns components electrònics es pot disposar de diverses màquines, i se sap que per a x màquines es generen unes despeses de producció de $D(x)=(3x^2+147)/x$ PTA pel total de components fabricats. Dibuixa la funció i dedueix gràficament el nombre x de màquines que minimitzen les despeses de producció. Troba també el valor unitari de les despeses.

Sol. Branca d'hipèrbola , $x_m=7$ màquines , $D(7)=42$ PTA
$V_u=D(7)/7=6$ PTA/unitat.

88. Per a la funció $f(x)=18.(4-x)/(x^2+9)$, calcula els punts de tall amb els eixos. Representa gràficament la funció donant valors en l'interval [-4, 12] i assenyala quin és el domini. I els punts màxim i mínim? I el recorregut? Assenyala també els intervals de creixement i de decreixement.

Sol. $P_1(4, 0)$, $P_2(0, 8)$, $D(f)=R$, $P_M(-1, 9)$, $P_m(9, -1)$,
$R(f)=[-1, 9]$, $I_C=(-\infty, -1)\cup(9, +\infty)$, $I_D=(-1, 9)$.

Funcions potencials

89. Dibuixa la funció potencial $f(x)=(4x)^{1/3}$, i calcula les imatges de $x=0$, ±0'25, ±2 i ±6'75. Quina és la antiimatge de $y=6$? I la antiimatge de $y=-8$?

Sol. $f(x)=0$, ±1, ±2 i ±3 , $f(x)=6 \Rightarrow x=54$, $f(x)=-8 \Rightarrow x=-128$.

90. La funció potencial $y=f(x)$ es pot simplificar i es redueix a un altre tipus de funció. Com s'anomena aquesta funció simplificada? La funció donada és:

$$f(x)=\left(\frac{x^{m-n}}{1-x^{m-n}}+\frac{1}{1+x^{n-m}}\right).(x^{n-m}-x^{m-n})$$

Sol. $f(x)=2$, F. constant.

91. Expressa cadascuna de les potències següents en forma de notació científica i calcula després el seu producte N=P.Q.R:

$$P=\left(\frac{(0'004)^4.(0'003.6)^1}{(120.000)^2}\right)^{1/3} \qquad Q=\frac{(60.000)^3.(0'000.02)^4}{(1.000)^2.(720.000.000)^1.(0'000.2)^5}$$

$$R=\left(\frac{(80.000.000)^2.(0'000.06)}{(60.000.000).(0'000.2)^4}\right)^{1/2}$$

Sol. $P=4.10^{-8}$, $Q=1'5.10^{-1}$, $R=2.10^{9}$, N=12.

2.2 FUNCIONS EXPONENCIALS I LOGARÍTMIQUES

Funcions exponencials

92. Representa en l'interval [-4,4] la funció exponencial $f(x)=(3/2)^x$. Quin és el seu recorregut? Quina és la imatge de 0? I l'antiimatge de -1?

Sol. Exp. creixent , $R(f)=(0,+\infty)$, f(0)=1 , f(x)=-1 $\Rightarrow$ x=No exist.

93. Dibuixa en l'interval [-3,3] la funció exponencial de base 2 i exponent $3-x^2$. Quina forma té? Quin és el seu punt màxim?

Sol. Campana de Gauss , $P_M(0,8)$.

94. Donada la funció $f(x)=(x^2-6x+9).e^x$ fes-ne la gràfica en l'interval [-2,6]. Determina segons el dibuix el seus punts màxim i mínim relatius. En quins punts talla aquesta corba els eixos coordenats?

Sol. $P_M(1,10'8)$, $P_m(3,0)$, A(3,0) , B(0,9).

Resol les equacions exponencials següents:

95. $8^{x-1}=4^{2x+1}$ — *Sol.* x=-5.

96. $2^x+4^x=272$ — *Sol.* $2^x=y$, x=4.

97. $\sqrt[x-1]{5^{5-x}}=\sqrt[x+1]{5^{2x+5}}$ — *Sol.* x=2.

98. $\sqrt[3]{7^{x-2}}\,.\,\sqrt[24]{7^{x-20}}=\sqrt[6]{7^{2x-3}}$ — *Sol.* x=24

Funcions logarítmiques

99. Aplicant logaritmes, calcula el valor de $N_1=L_{1'4}(2401/625)$ i també $N_2=L_3(1/243)$. Si $N=N_1-N_2$, quant valdrà $y=L_N(6561)$?

Sol. $N_1=4$, $N_2=-5$, $N=9$, $y=4$.

100. Dibuixa la funció logarítmica $f(x)=L_3(x)$ ajudant-te de la seva funció exponencial associada. És creixent o decreixent? Quin és el seu domini?

Sol. $x=3^y$, F. creixent , $D(f)=(0,+\infty)$.

101. Donada la funció logarítmica $f(x)=Log(5.x^2-35.x+60)$, estudia el seu domini. Per a quins valors de x la imatge serà $f(x)=2$? Dibuixa la gràfica en l'interval [-2, 9], i indica els intervals de creixement i de decreixement.

Sol. $D(f)=(-\infty, 3)\cup(4, +\infty)$, $x=-1$ i $x=8$, $I_C=(4, +\infty)$, $I_D=(-\infty, 3)$.

Per les propietats dels logaritmes i emprant la calculadora, troba els resultats de les operacions següents:

102. $x=\sqrt[13]{431'6}\,.\,\sqrt[16]{2'785}\,.\,\sqrt[23]{0'03594}$ *Sol.* $x=1'471$.

103. $x=\dfrac{(1'6104-1'3758)^2.\sqrt[3]{772'7}}{(1'245)^3.\sqrt{0'000382}}$ *Sol.* $x=13'39$.

Resol les equacions logarítmiques següents:

104. $Log(10/x)=3-2.Log(x)$ *Sol.* $x=100$.

105. $Ln(x^2+3x+2)-Ln(4-x)=Ln(2)$ *Sol.* $x_1=1$, $x_2=-6$.

106. $Log(x-1)-Log(\sqrt{5+x})-Log(\sqrt{5-x})=0$ *Sol.* $x=4$.

Resol els sistemes d'equacions logarítmiques següents:

107. $L_x(y-72)=2 \;\wedge\; L_y(x+6)=1/2$ *Sol.* $x=3$, $y=81$.

108. $Log(x+y)+Log(x-y)=Log(33) \;\wedge\; e^x=e^{11}/e^y$ *Sol.* $x=7$, $y=4$.

2.3 FUNCIONS TRIGONOMÈTRIQUES

Trigonometria circular

109. Escriu en radians els angles següents: α=30°, β=45°, γ=120° i δ=135°.

Sol. $\alpha=\pi/6$ rad, $\beta=\pi/4$ rad, $\gamma=2\pi/3$ rad, $\delta=3\pi/4$ rad.

110. Se sap que l'angle central d'una circumferència de radi 30 cm és de 11°27'33". Quin és el valor d'aquest angle expressat en radians? Quina és la longitud de l'arc corresponent?

Sol. α=0'2 rad, L=6 cm.

111. Des d'un avió a una alçada de 1.730 m, l'angle de depressió d'un helicòpter, que és a una altura de 458 m, és de 58°. A quina distància es troben ambdós aparells?

Sol. d=1500 m.

112. Un pal de bandera de 3m de longitud està col·locat al teulat d'una casa acabada de construir. Els angles d'elevació de la bandera i del teulat, mirats des d'un balcó, d'altura 3'68 m, de la casa del davant, són de 37° i 29°, respectivament. Quina és la distància entre les dues cases? Quina és l'altura de la casa acabada d'edificar?

Sol. L=15 m , h=12 m.

113. Una persona de 1'81m d'alçada observa un monument col·locat sobre un pedestal i està situada a 5m de distància d'ell. Si vol mirar el cap de l'històric personatge, ha d'aixecar el cap un angle de 26°, mentre que si vol mirar-li els peus, l'angle d'elevació és només de 5°. Quant fan les alçades del personatge i del pedestal?

Sol. h=2m , p=2'25m.

Funcions circulars

114. Simplifica la funció trigonomètrica següent i troba després la imatge de $x_0=7.\pi/6$ rad. La funció és:

$$f(x)=1-\frac{\cos^2(x)}{1+\sin(x)}$$

Sol. $f(x)=\sin(x)$, $x_0=210°$, $f(x_0)=-0'5$.

115. Troba la imatge de x_0=22°30' en la funció trigonomètrica que prèviament hauràs de simplificar

$$f(x)=\frac{\cos(x)+\sin(x)}{\cos(x)-\sin(x)}-\frac{\cos(x)-\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}$$

És una funció parella o imparella?

Sol. f(x)=2.tan(2x), f(x_0)=2, F. imparella.

116. En l'interval [0°,360°], troba gràficament el punt màxim, el mínim i el recorregut de la funció trigonomètrica f(x)=sin(x)+cos(x).

Sol. $P_M(45°,\sqrt{2})$, $Pm(225°,-\sqrt{2})$, $R(f)=(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

Estudia les solucions de les equacions trigonomètriques següents en l'interval [0°,360°].

117. sin(x)-sin(2x)=0 — *Sol.* 0°, 60°, 180°, 360°.

118. $3.\cos^2(x)=\sin^2(x)$ — *Sol.* 60°, 120°, 240°, 300°.

119. Resol el següent sistema d'equacions trigonomètriques, i dóna la solució en l'interval [0°,360°]:

$$\begin{cases} \sec(x)+\operatorname{cosec}(y)=2.\sqrt{2} \\ \cos(x)+\sin(y)=\sqrt{2} \end{cases}$$

Sol. x=45°, 315° , y=45°, 135°.

Funcions hiperbòliques

120. Donada la corba f(x)=5.ArgTh(x/5), transforma-la en una funció logarítmica i determina'n el domini. Fes-ne la gràfica i estudia la monotonia. Quina és l'antiimatge de y=15?

Sol. f(x)=(5/2).Ln[(5+x)/(5-x)] , D(f)=(-5, 5) , Creix. , x=4'975.

APÈNDIX

A) Prova d'autoavaluació

B) Bibliografia escollida

C) Glossari de conceptes

PROVA D'AUTOAVALUACIÓ

PROBLEMES PARAMETRITZATS

Presentem a continuació una sèrie de dotze problemes que, com és lògic, no abasten la totalitat de l'àmplia gamma d'exercicis que es podrien proposar. Tots aquests problemes de funcions depenen d'un *paràmetre* "a", que pot valer 1, 2, 3 o 4. Per a cadascun dels valors anteriors s'obté una resposta diferent entre les vuit possibles donades.

En els següents *problemes parametritzats*, substitueix en primer lloc el paràmetre a pel valor que desitgis entre 1, 2, 3 o 4, resol el problema, escull l'opció correcta i després fes una creu en el quadre de respostes:

Funcions de R en R

1. El cost C de fabricació d'un producte és suma d'un cost fix $C_1=1140$ PTA i d'un cost variable que depèn de les fluctuacions del preu de les primeres matèries, $C_2=13860.(t+a-1)/(t+a+1)$, on t és el temps mesurat en mesos (gener, t=1; febrer, t=2, etc.). Quant valdrà el cost total del producte en el mes de maig? I en el mes de juny? L'augment de cost ΔC entre aquests dos mesos és de:

A) $\Delta C=417$ B) $\Delta C=495$ C) $\Delta C=308$ D) $\Delta C=252$
E) $\Delta C=126$ F) $\Delta C=564$ G) $\Delta C=231$ H) $\Delta C=385$

2. Una funció té la forma $f(x)=+\sqrt{|x^2-2.(2.a+1).x+(2.a-3).(2.a+5)|}$. Calcula els seus zeros i fes un esquema de la corba. Veuràs que té un punt màxim en:

A) $P_M(7,\ 4)$ B) $P_M(9,\ 4)$ C) $P_M(4,\ 5)$ D) $P_M(6,\ 5)$
E) $P_M(2,\ 5)$ F) $P_M(5,\ 4)$ G) $P_M(3,\ 4)$ H) $P_M(8,\ 5)$

3. Determina el domini de la funció $f(x)=\sqrt{P/Q}$, on el numerador i el denominador són $P=x^2-(2.a+1).x+(a^2+a-6)$ i $Q=(-1)^a.(x-2.a+9)$. Veuràs que la funció només pot existir en:

A) $D(f)=(-\infty,\ -1)\cup[2,\ 7]$ B) $D(f)=(-3,\ 1]\cup[6,\ +\infty)$
C) $D(f)=(-\infty,\ -7)\cup[-1,\ 4]$ D) $D(f)=(-1,\ 2]\cup[7,\ +\infty)$
E) $D(f)=(-\infty,\ -5)\cup[0,\ 5]$ F) $D(f)=(-\infty,\ -3)\cup[1,\ 6]$
G) $D(f)=(-7,\ -1]\cup[4,\ +\infty)$ H) $D(f)=(-5,\ 0)\cup[5,\ +\infty)$

4. Donada la funció $f(x)=a.x^3+m.x^2+n.x+p$, on tenim $m=-3.(3.a+4)$, $n=a^2.(3-a)+18.(a+6)$ i $p=12.(a^2-3.a-17)$, calcula el conjunt de les antiimatges de $f(x)=12$. Trobaràs tres valors de x, que són:

A) {2, 3, 12} B) {4, 5, 6} C) {5, 7, 10} D) {4, 5, 12}
E) {6, 7, 10} F) {2, 3, 7} G) {3, 4, 6} H) {2, 10, 12}

5. Calcula la inversa f^{-1} de la funció $f(x)=(a+4).x^2-(a+3).x$. En quins punts es tallen les dues funcions anteriors? La suma S de totes les abscisses d'aquests punts és:

A) S=3/8 B) S=8/5 C) S=4/9 D) S=12/7
E) S=7/4 F) S=9/4 G) S=5/3 H) S=7/12

Funcions elementals

6. Per a la funció cúbica $y=x^3-3.x^2-3.(a^2+4.a+3).x+1$, fes-ne la gràfica i estudia la monotonia. L'interval en què és decreixent és:

A) I=(-1, 3) B) I=(0, 2) C) I=(-3, 5) D) I=(1, 7)
E) I=(-2, 4) F) I=(-5, 7) G) I=(-4, 6) H) I=(2, 8)

7. Sigui la funció potencial $f(x)=x^{2/3}+(7-2.a).x^{1/3}+12$. Fes la seva gràfica i també la de la recta horitzontal $y=a.(7-a)$. En quins punts es tallen? Les abscisses d'aquests punts són:

A) {-27, -8} B) {0, 8} C) {-1, 0} D) {8, 27}
E) {-8, 0} F) {0, 1} G) {1, 8} H) {-8, -1}

8. La funció $f(x)=[a.x^2+12.(a-2)].e^{mx}$, on $m=-2.a/[(a-1)^2+11]$ és una corba exponencial. Dibuixa-la per mitjà d'una taula de valors i troba les abscisses x_1 i x_2 dels seus punts màxim i mínim. El producte $P=x_1.x_2$ valdrà:

A) P=12 B) P=4 C) P=-12 D) P=48
E) P=-2 F) P=6 G) P=0 H) P=3

9. Resol el sistema logarítmic

$$\mathrm{Log}(x^2)-5.\mathrm{Log}(y)=\mathrm{Log}(a) \quad \text{i} \quad 3.\mathrm{Log}(x)+\mathrm{Log}(1/y^7)=\mathrm{Log}(2.a)$$

Després calcula $z=L_b(N)$ on $b=6-a$ i $N=(24-26.a+99.a^2-22.a^3)/3$. Amb les incògnites x, y i z anteriors, l'expressió $M=27.x.y.z$ val:

A) M=1728 B) M=2514 C) M=512 D) M=6912
E) M=1024 F) M=1296 G) M=784 H) M=270

10. L'angle central α d'una circumferència de radi r=315/(2.a+1) val α=m° n' p", on m=5.(2.a^2-7.a+1)^2, n=12.(a+1)/a i p=6.(10-a). Per a aquests angle i radi, la longitud L de l'arc corresponent és:

A) L≈112'35	B) L≈24'79	C) L≈137'78	D) L≈182'26
E) L≈147'36	F) L≈76'51	G) L≈15'92	H) L≈214'03

11. Som en una vall situada entre dues muntanyes a una distància de 123 m de la primera i 456 m de la segona. Si mirem cap a la dreta veiem el cim de la primera muntanya amb un angle d'elevació de α_1=45°+5.a, mentre que si mirem cap a l'esquerra veiem el cim de la segona muntanya amb un angle d'elevació de α_2=60°-3.a.

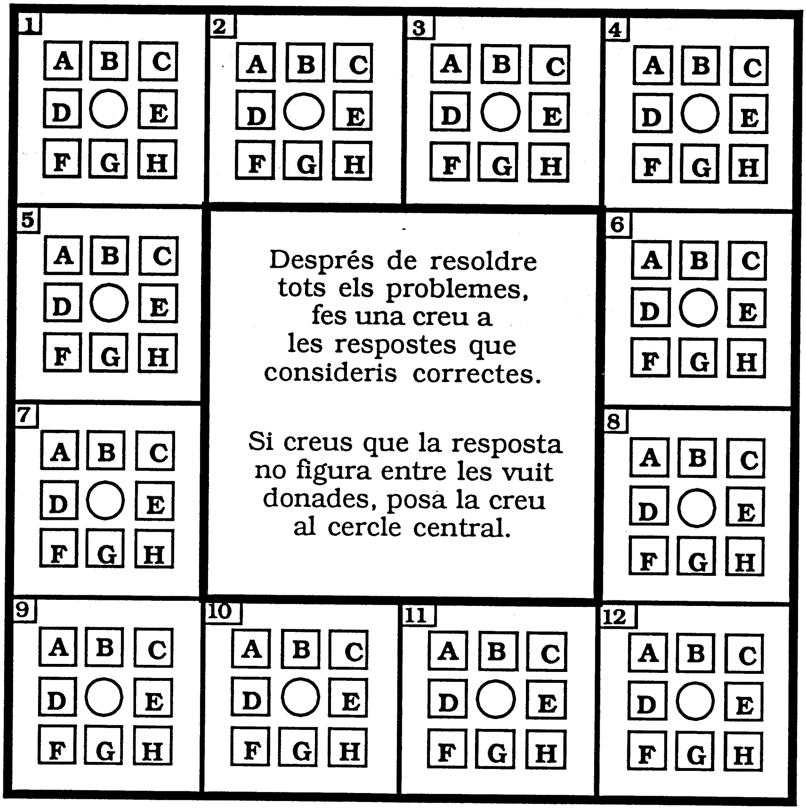
Quina és l'alçada de les dues muntanyes? Si entre els dos cims hi ha un telefèric, l'espai en metres que recorrerà és de:

A) e≈568'13	B) e≈891'46	C) e≈734'51	D) e≈792'64
E) e≈802'44	F) e≈676'60	G) e≈627'79	H) e≈504'39

12. Sigui la funció hiperbòlica f(x)=4.Ch(x/2)-2.ArgSh(x)+3. Posa-la en funció de funcions exponencials i logarítmiques. Troba la imatge aproximada de x=a/6.

A) y≈42'16	B) y≈23'45	C) y≈5'78	D) y≈6'29
E) y≈38'29	F) y≈8'77	G) y≈12'46	H) y≈18'37

QUADRE DE RESPOSTES:



Puntuació:

Respostes encertades: ☐ Punts positius (×4): ☐

equivocades: ☐ negatius (×(-1)): ☐

Puntuació total: ☐

Respostes correctes en funció del paràmetre:

(a=1, 2, 3 i 4, respectivament)

P_1: B-H-C-D	P_2: G-F-A-B	P_3: C-H-F-D	P_4: D-B-G-F
P_5: B-G-D-E	P_6: E-C-G-F	P_7: A-H-C-F	P_8: C-G-B-F
P_9: D-F-C-H	P_{10}: E-C-G-F	P_{11}: E-C-F-G	P_{12}: E-F-D-C

Qualificació:

Per obtenir la nota N farem servir la "Part entera", on prendrem l'enter inferior a la puntuació donada. Així, E(5'3)=5. Quant a la qualificació, ens basarem en el barem següent:

Susp.($N<5$) Apr.($5\leq N<7$) Not.($7\leq N<9$) Exc.($N\geq 9$)

Nota [$N=(E(P+3)/5)$]: $\boxed{}$ Qualificació: $\boxed{}$

Si la puntuació no ha estat prou alta, es pot tornar a resoldre la prova, repassant abans els conceptes i exemples, però ara emprant un valor diferent pel paràmetre "a" que ha de ser 1, 2, 3 o 4.

BIBLIOGRAFIA ESCOLLIDA

ALEGRE, P. *Ejercicios resueltos de Matemáticas Empresariales.* Ed. A. C. Madrid. 1990.

AYRES, F. *Fundamentos de Matemáticas Superiores.* Ed. McGraw-Hill. México. 1969.

BERMAN, G.N. *Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático.* Ed. Mir. Moscú. 1977.

CHIANG, A.C. *Métodos Fundamentales de Economía Matemàtica.* Ed.Mc-Graw-Hill. Madrid. 1987.

DELGADO, M. *Matemáticas: Álgebra, Cálculo, Geometría y Probabilidad.* Ed. Mc-Graw-Hill. Madrid. 1989.

DIAZ HERNANDO, J.A. *Álgebra, Geometría y Cálculo. Tomo IV.* Ed. Tebar Flores. Madrid.

FERNANDEZ VIÑA, J.A. *Ejercicios y complementos de Análisis Matemático.* Ed. Tecnos. Madrid. 1979.

GARCIA CASTRO, F. *Cálculo Infinitesimal, I-1.* Ed. Pirámide. Madrid. 1980.

PISKUNOV, N. *Cálculo Dieferencial e Integral.* Ed. Montaner y Simón. Barcelona. 1978.

REY PASTOR, J. *Análisis Matemático. Tomo I.* Ed. Kapelusz. Buenos Aires. 1969.

RODRIGUEZ, A. *Matemáticas para Economistas. Tomo II.* Ed. Romargraf. Barcelona. 1978.

SAMAMED, 0. *Matemáticas 1. Economía y Empresa. Teoría.* Ed. Centro de Estudios Ramón Areces. Madrid. 1988.

SPIEGEL, M. *Cálculo Superior.* Ed. Mc-Graw-Hill. Madrid. 1985.

THOMAS ARA, L.. *Cálculo.* Ed. Los autores. Santander. 1972.

GLOSSARI DE CONCEPTES

Exposem a continuació un recull dels termes matemàtics emprats, seguits de la plana en què es poden trobar. Els números en negreta indiquen que la paraula està a la part de "Formulació matemàtica". En cas contrari, estan a la part de "Conceptes i exemples":

A

B

C

D

- P -

- Q -

- R -

- S -

- T -

- U -

- V -

- Z -

ÍNDEX