CÀLCUL FUNCIONAL: TOPOLOGIA, SUCCESSIONS I CONTINUÏTAT

Guia didàctica de la Matemàtica universitària

CÀLCUL FUNCIONAL: TOPOLOGIA, SUCCESSIONS I CONTINUÏTAT

Carles Cassú, Joan Bonet,
Xavier Bertran, J. Carles Ferrer

Universitat de Girona
Departament d'Economia

Càlcul funcional : topologia, successions i continuïtat / Carles Cassú ... [et al.]. - Girona : Servei de Publicacions de la Universitat de Girona, 1995. - p. ; cm. - (Guia didàctica de la matemàtica universitària ; 10)
ISBN 84-88762-26-7
I. Cassú, Carles II. Universitat de Girona. Departament d'Economia
1. Anàlisi funcional 2. Anàlisi funcional - Problemes, exercicis, etc.
CIP 517.9 CAL

Primera edició: maig de 1995
Segona edició: febrer de 1996

Amb la col·laboració del Comissionat per a Universitats i Recerca i del Departament de Cultura de la Generalitat de Catalunya

Edita: Servei de Publicacions de la Universitat de Girona

Assessorament lingüístic: Servei de Normalització Lingüística de la UdG

Universitat de Girona
Edifici Les Àligues
Pl. Sant Domènec, 3
17071 Girona
Tel. (972) 41 82 06 - Fax (972) 41 80 31

ISBN: 84-88762-26-7
Dipòsit legal: GI-776-95

Carles Cassú és doctor en Ciències i catedràtic d'Escola Universitària de la UdG. Joan Bonet, Xavier Bertran, i J. Carles Ferrer són llicenciats en Ciències Matemàtiques i professors titulars d'Escola Universitària del Departament d'Economia de la UdG.

PRÒLEG

Oferim als estudiants universitaris i als lectors interessats aquesta guia didàctica de la matemàtica universitària com a fruit dels nostres anys de docència de les matemàtiques a la Universitat. El resultat final ha esdevingut una col.lecció de setze petits volums agrupats en els dos móduls d'Àlgebra Lineal i de Càlcul Infinitesimal.

Per raons de contingut el mòdul d'Àlgebra Lineal s'ha subdividit en les tres parts corresponents d'Àlgebra Moderna (dos volums: Conjunts i Estructures), Àlgebra Matricial (tres volums: Matrius, Determinants i Sistemes d'equacions) i Àlgebra Vectorial (tres volums: Vectors, Endomorfismes i Geometria Analítica), mentre que el mòdul de Càlcul Infinitesimal agrupa les tres parts corresponents a Càlcul Funcional (dos volums: Funcions i Continuïtat), Càlcul Diferencial (quatre volums: Derivades, Corbes, Derivades parcials i Optimització) i Càlcul Integral (dos volums: Integrals i Equacions Diferencials).

El present volum s'inicia amb un estudi de les nocions de la topologia de R^n, que creiem necessari per analitzar amb un mínim de rigor el concepte de continuïtat d'una funció, que tractem en aquest mateix volum, i el concepte de derivabilitat que analitzem en el volum següent. Així mateix, es realitza un estudi de les successions i sèries numèriques, noció que emprarem també per definir el límit d'una funció en un punt. Malgrat que incloem les definicions rigoroses d'alguns conceptes, hem volgut fugir deliberadament del excessiu rigor per donar prioritat a les idees intuitives que ens poden ajudar a entendre la pràctica dels conceptes.

Creiem que, en l'estudi de la Matemàtica, l'alumne universitari podrà servir-se d'aquesta guia didàctica tant per a la confecció dels seus propis apunts com en l'estudi dels diferents temes que conformen les assignatures corresponents a les matèries tractades. Per aquest motiu es presenta una breu *Bibliografia escollida* classificada en bàsica i addicional, segons el grau de dificultat que presenta.

Exposem el *Programa* i la *Simbologia*, on indiquem els conceptes que l'integren, conjuntament amb el simbolisme que farem servir al llarg de l'obra. Hem procurat fer un programa racional en què els conceptes es van deduint els uns dels altres de manerà lògica.

En cada volum es destaca especialment el contingut en *Conceptes* i *Exemples*, de gran importància per a la comprensió de les matèries tractades, en les quals, sovint, es prescindeix de demostracions formalistes d'acord amb l'esperit de l'obra, que, com el seu títol indica, pretén ser una guia didàctica.

A continuació presentem una *Formulació matemàtica*, expressada en símbols formals dels conceptes estudiats, que ajudaran, sens dubte, a la rigorositat en la resolució de qüestions i problemes.

Seguim el desenvolupament amb la part dedicada a l'estudi de *Problemes resolts*. És important que l'estudiant comprengui fins a l'últim detall aquests problemes, que, en realitat, són una continuïtat en grau de dificultat dels exemples senzills estudiats anteriorment.

Presentem després una col.lecció de Problemes proposats amb la intenció que el lector els resolgui de manera natural mitjançant els coneixements adquirits als apartats anteriors.

A l'apèndix s'inclou una *Prova d'autoavaluació* que consta d'una sèrie de "problemes parametritzats"; és a dir, problemes que depenen d'un paràmetre (a=1,2,3,4). Per a cada valor del paràmetre la solució serà diferent i estarà inclosa entre alguna de les vuit possibles. Aquest tipus de problemes es podrà resoldre quatre vegades amb números diferents.

Finalment, a més de la *Bibliografia escollida*, un *Glossari* de tots els conceptes matemàtics exposats al llarg de l'obra en facilita la ràpida localització.

Girona, març de 1996

Els autors

Topologia, successions i continuïtat

Capítol 1: **Nocions topològiques**

a) BIBLIOGRAFIA ESCOLLIDA

Bàsica:

DELGADO, M. *Matemáticas: Álgebra, Cálculo, Geometría y Probabilidad.* P152/168.

THOMAS ARA, L. *Cálculo.* P29/37.

SAMAMED, 0. *Matemáticas 1. Economía y Empresa. Teoría.* P325/336.

GARCÍA CASTRO, F. *Cálculo Infinitesimal, I-1.* P11/30.

RODRÍGUEZ, A. *Matemáticas para economistas, II.* P355-366.

Addicional:

ÁLVAREZ, A. *Ejercicios de Cálculo Infinitesimal.* P19/59.

TEBAR FLORES, E. *Problemas de Cálculo Infinitesimal. Tomo I.* P5/16.

LIPSCHUTZ, S. *Topología General.* P47/86.

b) PROGRAMA I SIMBOLOGIA

1.1 L'ESPAI AFÍ EUCLIDIÀ

1) **Estructura d'espai vectorial.** Vectors ($\mathbf{u}$, $\mathbf{x}$,...), suma de vectors (+), producte extern (.). Espai vectorial (V), axiomes de definició, grup abelià. Espai vectorial real.
2) **L'espai vectorial R^n.** Producte d'espais vectorials reals (R^n), n-uples ordenades, operacions amb vectors de R^n.
3) **Norma euclidiana.** Longitud d'un vector del pla o de l'espai (L). Norma euclidiana d'un vector ($\|\mathbf{x}\|$), espai vectorial euclidià (E).
4) **L'espai afí euclidià.** Origen de coordenades (O), vector associat, punt extrem (P). Coordenades d'un punt. Espai afí euclidià (R^n). Distància entre dos punts (d(P,Q)).

1.2 PUNTS I CONJUNTS NOTABLES

1) **Boles obertes.** Bola oberta ($B_r(\mathbf{x}_0)$), centre ($\mathbf{x}_0$), radi (r). Bola oberta reduïda ($B'_r(\mathbf{x}_0)$). Casos particulars: recta afí (R), interval obert; pla afí (R^2), cercle obert; espai afí (R^3), esfera oberta.
2) **Punts interiors, frontera i exteriors.** Conjunt (A), relació de definició. Punt interior, conjunt interior (In(A)). Punt frontera, conjunt frontera (Fr(A)). Punt exterior, conjunt exterior (Ex(A)). Propietat de partició.
3) **Punts adherents, d'acumulació i aïllats.** Punt adherent, conjunt adherent (Ad(A)). Punt d'acumulació, conjunt d'acumulació (Ac(A)). Punt aïllat, conjunt aïllat (Aï(A)). Propietat.
4) **Altres conjunts notables.** Definicions de conjunt obert, tancat, acotat i compacte.

c) CONCEPTES I EXEMPLES

1.1 L'ESPAI AFÍ EUCLIDIÀ

1.1.1 ESTRUCTURA D'ESPAI VECTORIAL. Sigui V un conjunt, on anomenem *vectors* als seus elements i sigui K un cos commutatiu, on els seus elements els anomenem *escalars*. Considerm a més dues operacions, la primera definida entre els elements de V, que la designem per (+) i li diem *suma de vectors*, i la segona definida entre els elements de K i els de V, que la designem per (.) i li diem *producte extern*.

Amb els dos conjunts de vectors i d'escalars i les dues operacions esmentades de suma de vectors i de producte extern, vam definir en el llibre d'Àlgebra Vectorial l'estructura algebraica d'Espai vectorial.

Recordem, doncs, que la terna (V, +, .) té l'*estructura d'espai vectorial* sobre K si i sols si es verifiquen els deu *axiomes de definició* següents, on cinc són per a l'operació de suma i els altres cinc pel producte.

PER A LA SUMA. El parell (V, +), és a dir el conjunt V amb l'operació de suma de vectors, ha de tenir l'estructura de *grup abelià*. Per tant, s'hauran de complir els axiomes:

(I) *Operació interna.* La suma de dos vectors ha de ser un altre vector.

(II) *Commutativa.* L'ordre dels sumands no altera el resultat de la suma.

(III) *Associativa.* Si s'han de sumar tres vectors, és indiferent l'ordre en que es fan les operacions: la suma dels dos primers amb l'últim és igual a la suma del primer amb la suma dels dos últims.

(IV) *Element neutre.* Hi ha un vector, el **0**, anomenat *vector nul*, tal que si el sumem amb qualsevol altre vector dóna com a resultat aquest mateix vector.

(V) *Element oposat.* Cada vector **U** té un altre vector **-U**, anomenat *vector oposat*, tals que si els sumem donen com a resultat el vector nul.

PEL PRODUCTE EXTERN. Perquè **V**=(V, +, .) sigui un espai vectorial sobre K, s'ha de verificar a més que el producte extern compleixi els cinc axiomes següents:

(VI) *Operació externa.* El producte d'un escalar per un vector és un altre vector.

(VII) *Associativitat escalar.* Si es multiplica un vector per un escalar i el resultat per un altre escalar, seria igual el multiplicar primer els dos escalars i després el resultat multiplicar-ho pel vector.

(VIII) *Distributivitat escalar.* La suma de dos escalars multiplicada per un vector és igual a la suma dels productes de cada escalar pel vector.

(IX) *Distributivitat vectorial.* El producte d'un escalar per la suma de dos vectors és igual a la suma dels productes de l'escalar per cadascun dels vectors.

(X) *Element unitat.* En el cos K hi ha un escalar, e, que en diem *escalar unitat*, que si el multipliquem per qualsevol vector dóna com a resultat el mateix vector.

Si no s'especifica res en contra, a partir d'ara prendrem el cos K=R, i, per tant, la terna **V**=(V, +, .) es considerarà un espai vectorial sobre R i es dirà que és un *espai vectorial real.*

Exemple 1. Comprovarem amb exemples numèrics que els vectors del pla amb les operacions de suma de vectors i producte d'un número real per un vector, (V_2, +, .) , compleixen les condicions de la definició d'espai vectorial real. Prenem com a exemple els vectors $\mathbf{v}_1$=(4, 5), $\mathbf{v}_2$=(6, 7) i $\mathbf{v}_3$=(8, 9), on els primers termes representen les respectives components horitzontals, i els segons, les verticals; i els escalars α=2 i β=3.

PER A LA SUMA.

Operació interna: (4, 5)+(6, 7) = (10, 12) vector
Commutativa: (4, 5)+(6, 7) = (6, 7)+(4, 5) = (10, 12)
Associativa: [(4, 5)+(6, 7)]+(8, 9) = (4, 5)+[(6, 7)+(8, 9)] = (18, 21)
Element neutre: (0, 0) , (4, 5)+(0, 0) = (4, 5)
Element oposat de (4, 5): (-4, -5) , (4, 5)+(-4, -5) = (0, 0)

PER AL PRODUCTE.

Operació externa: 2.(4, 5)= (8, 10) vector
Associativitat escalar: 2.[3.(4, 5)] = (2.3).(4, 5) = (24, 30)
Distributivitat escalar: (2+3).(4, 5) = 2.(4, 5)+3.(4, 5) =(20, 25)
Distributivitat vectorial: 2.[(4, 5)+(6, 7)] = 2.(4, 5)+2.(6, 7) =(20, 24)
Element unitat: 1 , 1.(4, 5) = (4, 5).

Els espais vectorials no són únicament els de tipus geomètric, com ara els vectors del pla (R^2) i de l'espai (R^3), sinó que també tenen l'estructura d'espai vectorial, per exemple, els nombres complexos, C; el conjunt P_n dels polinomis de grau més petit o igual que n; el conjunt de les matrius de m files i n columnes, $M_{m\times n}$, etc.

1.1.2 L'ESPAI VECTORIAL R^n. Com a generalització de l'exemple del conjunt de vectors del pla, que constitueixen l'espai vectorial R^2 ja que estan formats per dues components, podem considerar l'*espai vectorial R^n*, definit per:

$$R^n = R \times R \times \overset{n}{\ldots} \times R$$

on els seus elements són vectors que tenen n *components* i que poden escriure's com a *n-uples ordenades* de nombres reals:

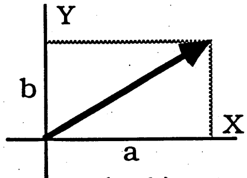
$$\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Per tal de dotar R^n d'estructura d'espai vectorial, es defineixen les *operacions* de suma de vectors i de producte extern de manera anàloga a com fem amb els vectors del pla: la primera operació, sumant les components corresponents, i la segona, multiplicant el nombre real per cadascuna de les components del vector.

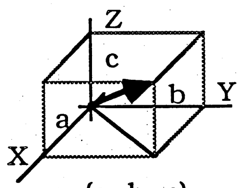
Exemple 2. L'espai vectorial R^4 constarà del conjunt R×R×R×R i de les dues operacions de suma de vectors i de producte extern, que indiquem a partir d'un cas particular:

$$(1, 2, 3, 4) + (6, 7, 8, 9) = (7, 9, 11, 13)$$
$$5.(1, 2, 3, 4) = (5, 10, 15, 20)$$

1.1.3 NORMA EUCLIDIANA. Com indiquem a la figura següent, podem representar gràficament els vectors del pla, fixant un sistema de coordenades, i el mateix podem fer amb els vectors de l'espai, tot i que la representació no és tan senzilla, ja que en aquest cas hem de menester tres dimensions.



$\mathbf{v}$=(a, b)



$\mathbf{v}$=(a, b, c)

A partir de la figura observem que podem determinar la *longitud d'un vector*, cosa que podem fer aplicant el teorema de Pitàgores. D'aquesta manera, les longituds dels vectors anteriors seran expressades respectivament per

$$L=\sqrt{a^2+b^2} \quad i \quad L=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

on considerem òbviament el signe positiu de l'arrel quadrada.

Exemple 3. La longitud del vector de l'espai que té per components 3, 4 i 12, és a dir $\mathbf{v}$=(3, 4, 12), és

$$L=\sqrt{3^2+4^2+12^2}= \sqrt{9+16+144}= \sqrt{169}= 13$$

A partir d'aquesta idea, generalitzem el concepte de longitud per a un vector qualsevol de l'espai R^n. Així, anomenem *norma euclidiana* d'un vector de R^n a l'arrel quadrada positiva de la suma dels quadrats de les seves components; és a dir, si el vector és $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i si la norma euclídea la simbolitzem per $\|\mathbf{x}\|$, tenim:

$$\|\mathbf{x}\|= \sqrt{(x_1)^2+(x_2)^2+\ldots+(x_n)^2}$$

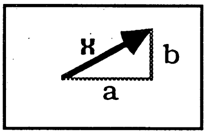
L'espai vectorial R^n, proveït de la norma euclidiana, l'anomenem *espai vectorial euclidià*, i el simbolitzem per E. Per tant, E=(R^n, $\|\mathbf{x}\|$).

1.1.4 L'ESPAI AFÍ EUCLIDIÀ. Sabem que els vectors del pla i de l'espai es poden representar geomètricament com a "fletxes" que tenen un origen i un extrem. Si fem que tots aquests vectors tinguin com a origen l'origen de coordenades, llavors a cada vector li correspondrà un únic punt, el seu extrem.

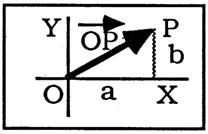
Generalitzant aquesta idea, si tenim l'espai vectorial euclidià $E=(R^n, \|\mathbf{x}\|)$ i també un vector $\mathbf{x}$ de R^n que té com a components $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, aleshores aquest vector el podem interpretar geomètricament com una "fletxa" de l'espai R^n, anomenada *vector associat*, que comença a l'*origen de coordenades*, O(0, 0,..., 0), i acaba al que en diem *punt extrem*, $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Diem també que $\mathbf{x}=\mathbf{OP}$.

Els números reals $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a més de ser les components del vector $\mathbf{x}$, diem també que representen les *coordenades del punt* extrem P.

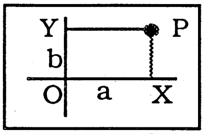
Així, hem partit d'un espai vectorial euclidià, format només per vectors, i a cadascun d'ells li hem fet correspondre el seu vector associat, que té per origen l'origen de coordenades. Després, a cada vector associat li hem fet correspondre el seu punt extrem, de manera que ara obtenim un nou espai que està format només per punts. Aquest nou espai de punts l'anomenem *espai afí euclidià.*



E. vectorial



E. v. associat



Espai afí

En el conjunt R, que podem considerar un espai afí euclidià, es defineix la distància euclidiana entre dos reals x i y com el valor absolut de la seva diferència, $d(x,y)=|x-y|$.

Exemple 4. La distància entre els dos números reals $x=-3$ i $y=+4$ és $d(x,y)=|(-3)-(+4)|=|-7|=7$, com pots comprovar dibuixant aquests dos punts en la recta real i observant que la seva separació és 7 unitats.

A causa de la introducció de la norma euclidiana, podem generalitzar el concepte de *distància entre dos punts* determinats de l'espai afí euclidià $E=(R^n, \|\mathbf{x}\|)$, de coordenades $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $Q(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, definint-la com la norma del vector diferència dels vectors associats $\mathbf{x}=\mathbf{OP}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $\mathbf{y}=\mathbf{OQ}=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Així, la distància de P a Q, que notem d(P, Q), es determina a partir de l'expressió:

$$d(P, Q)=\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}$$

Exemple 5. La distància entre els punts P(1, 2, 3, 4) i Q(6, 7, 8 ,9) de l'espai afí euclidià R^4, que poden considerar-se com els extrems dels vectors associats $\mathbf{x}=(1, 2, 3, 4)$ i $\mathbf{y}=(6, 7, 8, 9)$, és

$$d(P, Q)=\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\sqrt{(1-6)^2+(2-7)^2+(3-8)^2+(4-9)^2}=\sqrt{100}=10$$

1.2 PUNTS I CONJUNTS NOTABLES

1.2.1 BOLES OBERTES. En tot el que continua ens referirem a un espai afí euclidià $E=R^n$ que, com sabem, és un espai de punts on, utilitzant la norma euclidiana, es pot determinar la distància entre dos punts qualssevol.

Si r és un real positiu i $\mathbf{x}_0$ un punt de R^n, definim el concepte de *bola oberta*, $B_r(\mathbf{x}_0)$, com el conjunt de punts de R^n que tenen una distància inferior a r del punt $\mathbf{x}_0$. A r se li diu *radi* i al $\mathbf{x}_0$, *centre*.

Simbòlicament, podem escriure $B_r(\mathbf{x}_0)=\{\mathbf{x}\in R^n \ / \ d(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)<r\}$.

A vegades ens serà més útil que no s'anul·li aquesta distància i parlarem llavors de *bola oberta reduïda*. Si la simbolitzem per $B'_r(\mathbf{x}_0)$, tenim:

$$B'_r(\mathbf{x}_0)=\{\mathbf{x}\in R^n \ / \ 0<d(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)<r\}$$

Observem que el centre no pot estar inclòs en una bola oberta reduïda. Per tant,

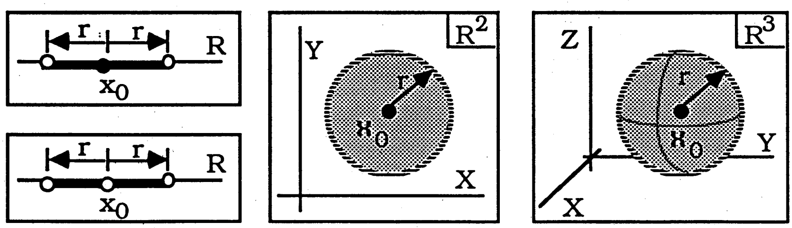
$$B'_r(\mathbf{x}_0)= B_r(\mathbf{x}_0) - \{\mathbf{x}_0\}$$

A la pràctica, i per comprendre-ho millor, analitzem els *casos particulars* de R, R^2 i R^3:

RECTA AFÍ (R). Per als punts de la recta real, una bola oberta és un *interval obert.* Tenim

$$B_r(x_0)=\{x\in R \ / \ |x-x_0|<r\}$$

Quant a la bola oberta reduïda, haurem d'excloure el centre de l'interval, com s'observa a la figura següent.



PLA AFÍ (R^2). Donat el centre $\mathbf{x}_0=(x_0, y_0)$, una bola oberta serà constituïda pels punts de l'interior d'un cercle: *cercle obert.*

$$B_r(\mathbf{x}_0)=\{(x,y)\in R^2 \ / \ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r^2\}$$

ESPAI AFÍ (R^3). Si el centre és $\mathbf{x}_0=(x_0, y_0, z_0)$, una bola oberta serà formada pels punts de l'interior d'una esfera: *esfera oberta.*

$$B_r(\mathbf{x}_0)=\{(x,y,z)\in R^3 \ / \ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2<r^2\}$$

Exemple 6. En R^3 considerem la bola oberta de centre $\mathbf{x}_0=(1, 2, 3)$ i radi r=13. Vindrà determinada per

$$B_r(\mathbf{x}_0)=\{(x,y,z)\in R^3 \ / \ (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2<13^2\}$$

Així, els punts de la bola oberta són els que verifiquen la inequació $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2<169$.