CÀLCUL DIFERENCIAL: DERIVADES

Guia didàctica de la Matemàtica universitària

CÀLCUL DIFERENCIAL: DERIVADES

Carles Cassú, Joan Bonet,
Xavier Bertran, J. Carles Ferrer

Universitat de Girona
Departament d'Economia

Dades recomanades per la Biblioteca de la UdG

CIP 517.2 CAL

Càlcul diferencial : derivades / Carles Cassú ... [et al.]. - Girona :
Servei de Publicacions de la Universitat de Girona, 1996. 174 p. ;
cm. - (Guia didàctica de la matemàtica universitària ; 11)
ISBN 84-88762-51-8
I. Cassú, Carles II. Universitat de Girona. Departament
d'Economia
1. Càlcul diferencial - Problemes, exercicis, etc.

CIP 517.2 CAL

Primera edició: maig de 1996
Segona edició: febrer de 1997
Tercera edició: maig de 1998

Amb la col·laboració del Comissionat per a Universitats i Recerca i del Departament de Cultura de la Generalitat de Catalunya

Edita: Servei de Publicacions de la Universitat de Girona

Assessorament lingüístic: Servei de Normalització Lingüística de la UdG

Universitat de Girona
Edifici Les Àligues
Pl. Sant Domènec, 3
17071 Girona
Tel. (972) 41 82 06 - Fax (972) 41 80 31

ISBN: 84-88762-51-8
Dipòsit legal: GI-528-96

Carles Cassú és doctor en Ciències i catedràtic d'Escola Universitària de la UdG. Joan Bonet, Xavier Bertran, i J. Carles Ferrer són llicenciats en Ciències Matemàtiques i professors titulars d'Escola Universitària del Departament d'Economia de la UdG.

PRÒLEG

Oferim als estudiants universitaris i als lectors interessats aquesta guia didàctica de la matemàtica universitària com a fruit dels nostres anys de docència de les matemàtiques a la Universitat. El resultat final ha esdevingut una col.lecció de setze petits volums agrupats en els dos mòduls d'Àlgebra lineal i de Càlcul infinitesimal.

Per raons de contingut, el mòdul d'Àlgebra lineal s'ha subdividit en les tres parts corresponents d'Àlgebra moderna (dos volums: Conjunts i Estructures), Àlgebra matricial (tres volums: Matrius, Determinants i Sistemes d'equacions) i Àlgebra Vectorial (tres volums: Vectors, Endomorfismes i Geometria analítica), i el mòdul de Càlcul infinitesimal agrupa les tres parts corresponents a Càlcul funcional (dos volums: Funcions i Continuïtat), Càlcul diferencial (quatre volums: Derivades, Corbes, Derivades parcials i Optimització) i Càlcul integral (dos volums: Integrals i Equacions diferencials).

En aquest volum iniciem amb l'estudi de les derivades el bloc corresponent al Càlcul diferencial.

Des de l'establiment, a la segona meitat del segle XVII, del Càlcul infinitesimal per Newton i Leibniz de manera independent, amb l'objectiu posat en la determinació de la recta tangent a una corba en un punt donat, el concepte de derivada ha tingut un paper preeminent en l'estudi del ritme de variació d'una funció i ha suposat una eina de gran utilitat en l'estudi de molts problemes de les ciències exactes i experimentals.

Més tard, al segle XIX, el concepte de derivada també va esdevenir útil per al tractament d'alguns problemes de les ciències socials com ara l'economia, on fins i tot ha donat lloc a nous conceptes propis d'aquest camp del coneixement, com ara l'elasticitat d'una funció o la utilització de la derivada en l'anàlisi marginal.

Per aquest motiu, en aquest volum, després de l'estudi genèric de la derivada i del càlcul de derivades, a més d'estudiar alguns problemes i aplicacions clàssiques, hem tingut interès a estudiar algunes de les aplicacions econòmiques més elementals.

Creiem que, en l'estudi de la matemàtica, l'alumne universitari podrà servir-se d'aquesta guia didàctica tant per a la confecció dels seus propis apunts com per a l'estudi dels diferents temes que conformen les assignatures corresponents a les matèries tractades. Per aquest motiu es presenta una breu *Bibliografia escollida* classificada en bàsica i addicional, segons el grau de dificultat que presenta.

Exposem el *Programa* i la *Simbologia*, on indiquem els conceptes que l'integren, conjuntament amb el simbolisme que farem servir al llarg de l'obra. Hem procurat fer un programa racional en què els conceptes es van deduint els uns dels altres de manera lògica.

En cada volum es destaca especialment el contingut en *Conceptes* i *Exemples*, de gran importància per a la comprensió de les matèries tractades, en les quals, sovint, es prescindeix de demostracions formalistes d'acord amb l'esperit de l'obra, que, com el seu títol indica, pretén ser una guia didàctica.

A continuació presentem una *Formulació matemàtica*, expressada en símbols formals dels conceptes estudiats, que ajudaran, sens dubte, a la rigorositat en la resolució de qüestions i problemes.

Continuem el desenvolupament amb la part dedicada a l'estudi de *Problemes resolts*. És important que l'estudiant comprengui fins a l'últim detall aquests problemes, que, en realitat, són una continuïtat en grau de dificultat dels exemples senzills estudiats anteriorment.

Presentem després una col.lecció de *Problemes proposats*, amb la intenció que el lector els resolgui de manera natural mitjançant els coneixements adquirits als apartats anteriors.

A l'apèndix s'inclou una *Prova d'autoavaluació* que consta d'una sèrie de "problemes parametritzats", és a dir, problemes que depenen d'un paràmetre (a=1,2,3,4). Per a cada valor del paràmetre la solució serà diferent i estarà inclosa entre alguna de les vuit possibles. Aquest tipus de problemes es podrà resoldre quatre vegades amb números diferents.

Finalment, a més de la *Bibliografia escollida*, un *Glossari* de tots els conceptes matemàtics exposats al llarg de l'obra en facilita la ràpida localització.

Girona, maig de 1996

Els autors

Derivades

Capítol 1: **Concepte de derivada**

a) BIBLIOGRAFIA ESCOLLIDA

Bàsica:

ALEGRE, P. *Ejercicios resueltos de Matemáticas Empresariales 1.* P270/279, P285/286, P293/315.

DELGADO, M. *Matemáticas: Algebra, Cálculo, Geometría y Probabilidad.* P191/207.

THOMAS ARA, L. *Cálculo.* P78/85.

AYRES, F. *Cálculo Diferencial e Integral.* P22/34.

SAMAMED, O. *Matemáticas 1. Economía y Empresa. Teoría.* P475/498.

REY PASTOR, J. *Análisis Matemático. Tomo I.* P433/441, P446/457.

RODRÍGUEZ, A. *Matemáticas para Economistas (II).* P463/494.

PISKUNOV, N. *Cálculo Diferencial e Integral.* P62/100, P107/118.

BERMAN, G.N. *Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático.* P53/63, P71/75, P83/89.

Addicional:

YAMANE, T. *Matemáticas para Economistas.* P76/114.

DÍAZ HERNANDO, J.A.. *Álgebra, Geometría y Cálculo.* P185/215.

DEMIDOVICH, B. *Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático.* P41/56, P67/77.

TEBAR FLORES, E. *Problemas de Cálculo Infinitesimal. Tomo II.* P33/62.

b) PROGRAMA I SIMBOLOGIA

1.1 DERIVADA EN UN PUNT

1) **Derivades laterals.** Successió d'increments d'abscisses, successió d'increments d'ordenades, successió de quocients incrementals. Successió esquerra d'un punt ($x_n \to a^-$), derivada per l'esquerra ($f'(a^-)$). Successió dreta d'un punt ($x_n \to a^+$), derivada per la dreta ($f'(a^+)$).
2) **Derivada en un punt.** Funció derivable en un punt, derivada ($f'(a)$). Continuïtat i derivabilitat.
3) **Interpretació geomètrica de la derivada.** Rectes secants i recta tangent, pendent de la recta tangent (m_t). Punts angulosos, tangent per l'esquerra (t_e) i tangent per la dreta (t_a).
4) **Operacions amb funcions derivables.** Derivades de les operacions elementals: suma $(f+g)'$, diferència $(f-g)'$, producte $(f.g)'$, quocient $(f/g)'$, producte per un escalar $(\lambda.f)'$, combinació lineal $(\lambda.f+\mu.g)'$, composició $(f \bullet g)'$ i funció inversa $(f^{-1})'$.

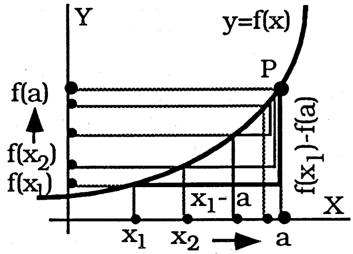
1.2 DERIVACIÓ DE FUNCIONS

1) **Funció derivada.** Conjunt derivable (A). Increments de l'abscissa (Δx) i de l'ordenada (Δy), quocient incremental ($\Delta y/\Delta x$), funció derivada ($y'=f'(x)$). Derivades successives (y'', y''', $y^{(4}$, ..., $y^{(n)}$).
2) **Regles de derivació.** Operacions elementals. Funcions potencials, exponencials i logarítmiques. Funcions trigonomètriques circulars i hiperbòliques. Taula de derivades. Derivació logarítmica.
3) **Diferencial d'una funció.** Diferencial de la variable independent (dx), diferencial de la funció (dy). Interpretació geomètrica. Increments vertader (Δy) i aproximat (dy) de la variació d'una funció. Errors absolut (ε_A) i relatiu (ε_R).

c) CONCEPTES I EXEMPLES

1.1 DERIVADA D'UNA FUNCIÓ EN UN PUNT

1.1.1 DERIVADES LATERALS. Sigui P(a, f(a)) un punt de la gràfica d'una funció y=f(x) de domini D(f). Recordem que una *successió esquerra de a* és una successió (x_n) de punts de l'eix X a l'esquerra del punt x=a i que tendeix a a. Ho indicarem per $x_n \to a^-$.



Sigui ara (x_n) una successió esquerra qualsevol de *a*. Formem la *successió d'increments d'abscisses* (x_n-a), la *successió d'increments d'ordenades* $(f(x_n)-f(a))$ i la *successió de quocients incrementals* $((f(x_n)-f(a))/(x_n-a))$.

Si aquesta última successió, quan (x_n) tendeix a *a* per l'esquerra, és convergent al mateix valor, sigui quina sigui la successió esquerra (x_n) de "a", direm que aquest únic límit és la *derivada per l'esquerra* de la funció y=f(x) en el punt x=a. La simbolitzem per $f'(a^-)$ i, tot observant la gràfica, veiem que la podem escriure com el límit funcional següent:

$$f'(a^-)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Exemple 1. Donada la funció $f(x)=(3/4).x^2+1$ i el punt P(2, 4) podem prendre, per exemple, la successió esquerra de a=2, $(x_n)=(0,\ 1,\ 1'5,\ 1'9,\ 1'99,...)$, on tots els termes són a l'esquerra del 2 i s'acosten a 2.

Formem la successió d'increments d'abscisses (x_n-a), la successió imatge $(f(x_n))$ i la successió d'increments d'ordenades $(f(x_n)-f(a))$. La successió de quocients incrementals serà $((f(x_n)-f(a))/(x_n-a))$.

Aquestes successions les podem expressar a la taula següent:

x_n	x_n-2	$f(x_n)$	$f(x_n)-4$	$(f(x_n)-4)/(x_n-2)$
0	-2	1	-3	1'5
1	-1	1'75	-2'25	2'25
1'5	-0'5	2'6875	-1'3125	2'625
1'9	-0'1	3'7075	-0'2925	2'925
1'99	-0'01	3'970075	-0'029925	2'9925
↓		↓		↓
2^-		4^-		3^-

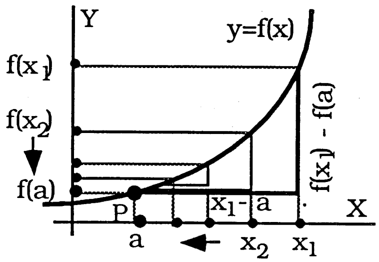
Observem que aquesta successió tendeix a 3 per l'esquerra. Es pot comprovar que per qualsevol altra successió esquerra de a s'obté el mateix límit, de manera que podem escriure $f'(2^-)=3$. Així la derivada per l'esquerra de la funció $f(x)=(3/4).x^2+1$ en el punt x=2 és igual a 3.

Com a exercici es pot comprovar amb la successió $(x_n)=(2\ -1/n)$, d'on s'obtenen les successions d'increments:

$$(x_n-a)=\left(\frac{-1}{n}\right) \quad \text{i} \quad (f(x_n)-f(a))=\left(\frac{-3}{n}.\left(1-\frac{1}{4n}\right)\right)$$

La successió de quocients incrementals serà (3- 3/4n), que, evidentment, té per límit 3.

De manera similar, recordem que una *successió dreta de a* és una successió (x_n) de punts de l'eix X a la dreta del punt x=a i que tendeix a a. Ho indicarem per $x_n \to a^+$.



Sigui (x_n) qualsevol successió dreta de a, i formem la successió d'increments d'abscisses (x_n-a), la d'ordenades $(f(x_n)-f(a))$ i també la successió de quocients incrementals $((f(x_n)-f(a))/(x_n-a))$.

Si aquesta última successió, quan (x_n) tendeix a *a* per la dreta, és convergent al mateix valor, sigui quina sigui la successió dreta (xn) de "a", direm que aquest únic límit és la *derivada per la dreta* de la funció y=f(x) en el punt x=a. Designem aquesta derivada per $f'(a^+)$ i, a partir de la gràfica anterior, observem que

$$f'(a^+)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Exemple 2. Amb la funció $f(x)=(3/4).x^2+1$ de l'exemple anterior i el punt P(2, 4) prenem la successió dreta de a=2, $(x_n)=(4,\ 3,\ 2'5,\ 2'1,\ 2'01,\dots)$, on tots els termes són a la dreta del 2 i s'acosten a 2.

Formem les successions d'increments d'abscisses, ordenades i de quocients com es mostren a la taula següent:

x_n	x_n-2	$f(x_n)$	$f(x_n)-4$	$(f(x_n)-4)/(x_n-2)$
4	2	13	9	4'5
3	2	7'75	3'75	1'875
2'5	0'5	5'6875	1'6875	3'375
2'1	0'1	4'3075	0'3075	3'075
2'01	0'01	4'030075	0'030075	3'0075
↓		↓		↓
2^+		4^+		3^+

S'observa, doncs, que la successió de quocients incrementals tendeix a 3 per la dreta. Per a qualsevol altra successió a la dreta de a també obtindríem el mateix, i, per tant, podem escriure $f'(2^+)=3$.

El lector pot prendre per exemple la successió $(x_n)=(2+1/n)$, i comprovar que s'obtenen les successions d'increments:

$$(x_n+a)=\left(\frac{1}{n}\right) \quad i \quad (f(x_n)-f(a))=\left(\frac{3}{n}\cdot\left(1+\frac{1}{4n}\right)\right)$$

La successió de quocients incrementals resultant és (3+ 3/4n) que convergeix a 3. Això confirma que $f'(2^+)=3$.

1.1.2 DERIVADA EN UN PUNT. Suposem que en un punt P(a, f(a)) de la gràfica de la funció y=f(x) de domini D(f) existeixen les derivades laterals: la derivada per l'esquerra $f'(a^-)$ i la derivada per la dreta $f'(a^+)$. Si resulta que són iguals, $f'(a^-)=f'(a^+)$, direm que y=f(x) és una *funció derivable* en el punt P(a, f(a)) i que el valor comú que representarem per $f'(a)$ és igual a la *derivada en el punt*.

Exemple 3. Per a la funció $f(x)=(3/4).x^2+1$ i el punt P(2, 4) hem trobat les derivades laterals per l'esquerra, $f'(2^-)=3$ i per la dreta $f'(2^+)=3$. Com que són iguals, $f'(2^-)=f'(2^+)$, podem assegurar que la derivada de $f(x)=(3/4).x^2+1$ en el punt P(2, 4) és $f'(2)=3$.

En conseqüència, direm que $f'(a)$ és la derivada de la funció $y=f(x)$ en $x=a$, si per a tota successió (x_n) de l'eix X, a l'esquerra o a la dreta de a, i que té per límit a, el límit de la successió del quocient incremental donada per $([f(x_n)-f(a)]/[x-a])$ és igual a $f'(a)$.

Així, doncs, la derivada de la funció $y=f(x)$ en el punt P(a, f(a)) pot ser expressada pel valor del límit funcional:

$$\boxed{f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

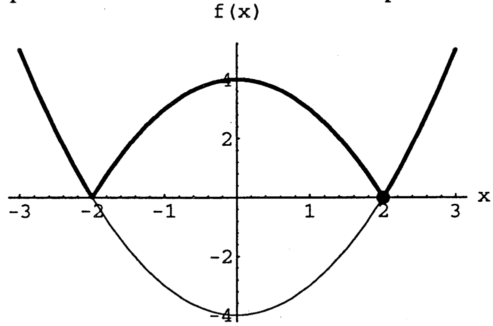
Exemple 4. Trobem la derivada de la funció $y=x^2-4$ en el punt P(1,-3) de la seva gràfica. Tenim $f(x)=x^2-4$, a=1 i f(a)=-3. Substituint,

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-4)-(-3)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=1+1=2$$

A partir de la definició anterior de derivada en un punt es pot provar fàcilment que "tota funció derivable en un punt és contínua en aquest punt" i, per tant, "si una funció no és contínua en un punt, tampoc no és derivable en aquest punt".

Hem de fer notar, no obstant això, que, en general, no es verifica el recíproc, és a dir, que "no tota funció contínua en un punt és derivable en aquest punt".

Exemple 5. Amb la funció valor absolut de la de l'exemple anterior, $f(x)=|x^2-4|$, volem trobar, si existeix, la derivada en el punt P(2, 0). Podem representar la funció gràficament, partint de la paràbola $y=x^2-4$ i fent una simetria respecte de l'eix X a la part negativa. Veiem a la gràfica que la funció és contínua en tots els punts:



Notem que la funció de l'enunciat la podem expressar com una funció definida per intervals:

$f(x)=x^2-4$ si $x\leq-2$, $f(x)=-x^2+4$ si $-2<x<2$ i $f(x)=x^2-4$ si $x\geq2$

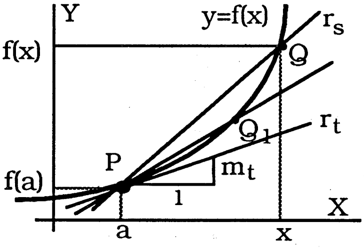
Calculem les derivades laterals en a=2:

$$f'(2^-)=\lim_{x\to 2^-}\frac{(-x^2+4)-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}(-x-2)=-4$$

$$f'(2^+)=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x^2-4)-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}(x+2)=+4$$

Com que els límits laterals donen resultats diferents, $f(2^-)\neq f(2^+)$, la funció $f(x)=|x^2-4|$, tot i ser contínua en $x=2$, no és derivable en aquest punt.

1.1.3 INTERPRETACIÓ GEOMÈTRICA DE LA DERIVADA. Per comprendre el significat geomètric de la derivada $f'(a)$ de la funció $y=f(x)$ en el punt $P(a, f(a))$, podem prendre un altre punt $Q(x, f(x))$ i construir la recta secant $r_s=PQ$, com es mostra a la figura següent.



El pendent d'aquesta recta secant és $m_s=(f(x)-f(a))/(x-a)$.

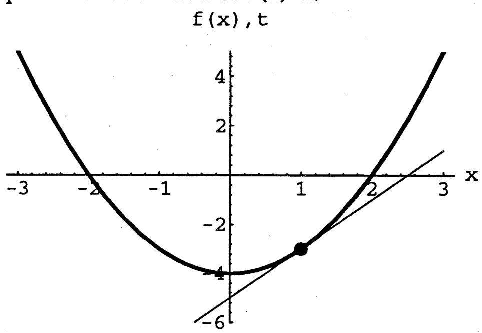
Si prenem un nou punt $Q_1(x_1,f(x_1))$, més pròxim al P, ens determinarà la secant PQ_1. Considerant altres punts $Q_2, Q_3,\dots Q_n$, cada vegada més pròxims al P, obtindrem noves secants que en el límit es confondran amb la *recta tangent* en el punt P.

En conseqüència, el *pendent de la recta tangent*, m_t, serà expressat pel límit $m_t=\text{Lim}(m_s)$ quan $Q\to P$, és a dir,

$$m_t=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Ara bé, aquesta expressió és precisament el valor de la derivada de la funció en el punt, $f'(a)$. Concloem, doncs, que, geomètricament, "el valor de la derivada en un punt representa el pendent de la recta tangent a la gràfica de la funció en aquest punt": $m_t=f'(a)$

Exemple 6. Per a la funció $f(x)=x^2-4$ en el punt $P(1, -3)$ hem vist a l'exemple 4 que la seva derivada és $f'(1)=2$.

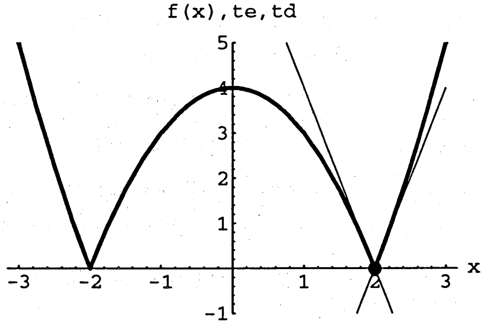


Això significa que el pendent de la recta tengent a la corba $y=x^2-4$ en el punt $P(1, -3)$ és també $m_t=2$.

En el cas anterior, la funció és derivable en el punt, és a dir, existeix $f'(a)$. Ara bé, pot ser que la funció no sigui derivable en el punt, la qual cosa és deguda al fet que o bé no és contínua en el punt, o no existeix alguna de les derivades laterals $f'(a^-)$ i $f'(a^+)$, o bé existeixen les dues però són diferents, $f'(a^-)\neq f'(a^+)$. En aquest últim cas direm que el punt P(a, f(a)) és un *punt angulós*.

Naturalment, com que en aquest cas les dues derivades laterals en el punt són diferents, també hi haurà dues rectes tangents: la *tangent per l'esquerra*, t_e, de pendent $m_e=f'(a^-)$, i la *tangent per la dreta*, t_d, de pendent, $m_d=f'(a^+)$.

Exemple 7. Hem vist que en el punt P(2, 0) de la funció $f(x)=|x^2-4|$ existeixen la derivada per l'esquerra, $f'(2^-)=-4$, i la derivada per la dreta, $f'(2^+)=+4$. Com que són diferents, es tracta d'un punt angulós.



En aquesta gràfica hem representat la tangent per l'esquerra, de pendent $m_e=-4$, i la tangent per la dreta, de pendent $m_d=+4$.

1.1.4 OPERACIONS AMB FUNCIONS DERIVABLES. Siguin f i g dues funcions derivables en un mateix punt P(a, f(a)). Es prova fàcilment que es verifiquen les següents propietats per les quatre *operacions elementals*:

(1) SUMA. La derivada en un punt de la suma de dues funcions és igual a la suma de les seves derivades en aquest punt:

$$(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$$

(2) DIFERÈNCIA. La derivada en un punt de la diferència de dues funcions és igual a la diferència de les seves derivades en aquest punt:

$$(f-g)'(a)=f'(a)-g'(a)$$

(3) PRODUCTE. La derivada en un punt del producte de dues funcions és igual a la derivada de la primera funció per la imatge de la segona, més la imatge de la primera per la derivada de la segona:

$$(f.g)'(a)=f'(a).g(a)+f(a).g'(a)$$

(4) QUOCIENT. La derivada en un punt del quocient de dues funcions és igual a la derivada de la primera funció per la imatge de la segona, menys la imatge de la primera per la derivada de la segona, i dividit tot pel quadrat de la imatge de la segona:

$$(f/g)'(a)=[f'(a).g(a)-f(a).g'(a)]/[g(a)]^2 \qquad (g(a)\neq 0)$$

(5) PRODUCTE PER UN ESCALAR. La derivada en un punt del producte d'un escalar per una funció és igual a l'escalar per la derivada de la funció en el punt:

$$(\lambda.f)'(a)=\lambda.f'(a)$$

(6) COMBINACIÓ LINEAL. La derivada en un punt de la combinació lineal de dues funcions és igual a la combinació lineal de les dues derivades de les funcions en el punt:

$$(\lambda.f+\mu.g)'(a)=\lambda.f'(a)+\mu.g'(a)$$

Exemple 8. Hem vist a l'exemple 4 que en a=1 la funció $f(x)=x^2-4$, on $f(1)=-3$, té per derivada $f'(1)=2$. Considerem una altra funció $g(x)=3x+2$, on $g(1)=5$. La seva derivada en a=1 és:

$$g'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(3x+2)-5}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)}{x-1}=3$$

Si volem trobar, per exemple, la derivada del producte, f.g, en a=1, tindrem:

$$(f.g)'(1)=f'(1).g(1)+f(1).g'(1)=2.5+(-3).3=10-9=1$$

En efecte, la nova funció és

$$h(x)=(f.g)(x)=f(x).g(x)=(x^2-4).(3x+2)=3x^3+2x^2-12x-8$$

Veiem que $h(1)=-15$.

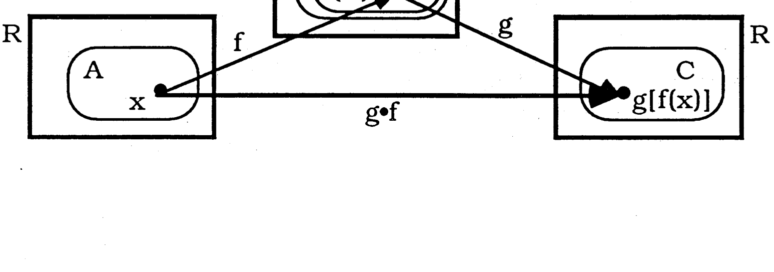
Finalment, comprovem que $h'(1)=1$:

$$h'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{(3x^3+2x^2-12x-8)-(-15)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^3+2x^2-12x+7}{x-1}=\frac{0}{0}$$

Per eliminar la indeterminació, descompondrem el numerador en dos factors, aplicant per exemple el mètode de Ruffini:

$$h'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{(3x^2+5x-7)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(3x^2+5x-7)=1.$$

Respecte de la *composició de dues funcions* f i g, g•f, recordem que és definida per $(g\bullet f)(x)=g[f(x)]$ i que, en general, no gaudeix de la propietat commutativa, $g\bullet f\neq f\bullet g$. Podem visualitzar la composició amb un esquema:



Exemple 9. Siguin les funcions $f(x)=x^2-4$ i $g(x)=3x+2$. La funció composta $g \bullet f$ és

$$(g \bullet f)(x)= g[f(x)]= g(x^2-4)= 3(x^2-4)+2= 3x^2-12+2= 3x^2-10$$

En canvi, la funció composta $f \bullet g$ és

$$(f \bullet g)(x)= f[g(x)]= f(3x+2)= (3x+2)^2-4= 9x^2+12x+4-4= 9x^2+12x.$$

Si considerem ara que x és un punt particular, x=a, suposem que f és derivable en a i que g és derivable en b=f(a), llavors es prova que la funció composta $g \bullet f$ és també derivable en a i, a més, la propietat de:

(7) COMPOSICIÓ. La derivada d'una funció composta en un punt és igual a la derivada de la segona funció en el punt imatge de la primera, multiplicada per la derivada de la primera en el punt:

$$(g \bullet f)'(a)=g'[f(a)].f'(a)$$

Més endavant veurem la utilitat d'aquesta fórmula, que es coneix amb el nom de *regla de la cadena.*

Exemple 10. Comprovem que $(g \bullet f)'(1)=g'[f(1)].f'(1)$, on les funcions són $f(x)=x^2-4$, $g(x)=3x+2$ i $(g \bullet f)(x)=3x^2-10$. Tenim que a=1, b=f(a)=-3, g(b)=-7 i ja hem trobat a l'exemple 4 que f'(1)=2. Calculem ara g'(-3):

$$g'(-3)= \lim_{x\to -3}\frac{g(x)-g(-3)}{x-(-3)}=\lim_{x\to -3}\frac{(3x+2)-(-7)}{x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{3x+9}{x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{3(x+3)}{x+3}=3$$

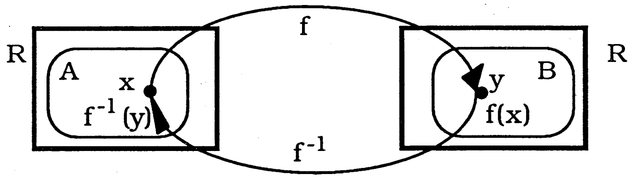
Així, $(g \bullet f)'(1)=g'[f(1)].f'(1)=g'(-3).f'(1)=3.2=6$

Si ho fem directament, comprovarem que, efectivament, s'obté el mateix valor:

$$(g \bullet f)'(1)= \lim_{x\to 1}\frac{(g \bullet f)(x)-(g \bullet f)(1)}{x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(3x^2-10)-(-7)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3(x^2-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(3x+3)=3.1+3=6$$

Finalment, recordem la noció de la *funció inversa* f^{-1} d'una funció donada f per tal de determinar-ne la derivada. Al llibre de Càlcul funcional vam estudiar que si f és una funció uniforme i tal que restringida en el seu domini és una aplicació injectiva, aleshores f^{-1} és també una funció uniforme. A més, recordem que, si composem f amb la seva inversa f^{-1}, obtenim com a resultat la funció identitat, és a dir, $f \bullet f^{-1}=f^{-1} \bullet f=i$. Visualitzem-ho a l'esquema següent:



Exemple 11. Tenim la funció $f(x)=x^2-4$. Si calculem la seva inversa posant $y=x^2-4$ i aïllant la x, permutant les variables entre elles i anomenant f^{-1} la nova funció, obtenim la inversa de f, que és la funció multiforme:

$$f^{-1}(x)= \pm\sqrt{x+4}$$