ÀLGEBRA VECTORIAL: APLICACIONS LINEALS

Guia didàctica de la Matemàtica universitària

ÀLGEBRA VECTORIAL: APLICACIONS LINEALS

Carles Cassú, Joan Bonet,
Xavier Bertran, J. Carles Ferrer

Universitat de Girona
Departament d'Economia

Dades recomanades per la Biblioteca de la UdG

Àlgebra vectorial : aplicacions lineals / Carles Cassú ... [et al.]. -
Girona : Servei de Publicacions de la Universitat de Girona, 1996.
- p. ; cm. - (Guia didàctica de la matemàtica universitària ; 7)
ISBN 84-88762-47-X
I. Cassú, Carles II. Universitat de Girona. Departament
d'Economia
1. Àlgebra vectorial - Problemes, exercicis, etc.
CIP 514.742.2 ALG

Primera edició: març de 1996

Amb la col·laboració del Comissionat per a Universitats i Recerca i del Departament de Cultura de la Generalitat de Catalunya

Edita: Servei de Publicacions de la Universitat de Girona

Assessorament lingüístic: Servei de Normalització Lingüística de la UdG

Universitat de Girona
Edifici Les Àligues
Pl. Sant Domènec, 3
17071 Girona
Tel. (972) 41 82 06 - Fax (972) 41 80 31

ISBN: 84-88762-47-X

Dipòsit legal: GI-175-96

Carles Cassú és doctor en Ciències i catedràtic d'Escola Universitària de la UdG.
Joan Bonet, Xavier Bertran, i J. Carles Ferrer són llicenciats en Ciències Matemàtiques i professors titulars d'Escola Universitària del Departament d'Economia de la UdG.

PRÒLEG

Oferim als estudiants universitaris i als lectors interessats aquesta guia didàctica de la matemàtica universitària com a fruit dels nostres anys de docència de les matemàtiques a la Universitat. El resultat final ha esdevingut una col.lecció de setze petits volums agrupats en els dos mòduls d'Àlgebra Lineal i de Càlcul Infinitesimal.

Per raons de contingut, el mòdul d'Àlgebra lineal s'ha subdividit en les tres parts corresponents d'Àlgebra moderna (dos volums: Conjunts i Estructures), Àlgebra matricial (tres volums: Matrius, Determinants i Sistemes d'equacions) i Àlgebra vectorial (tres volums: Vectors, Endomorfismes i Geometria analítica) i el mòdul de Càlcul infinitesimal agrupa les tres parts corresponents a Càlcul funcional (dos volums: Funcions i Continuïtat), Càlcul diferencial (quatre volums: Derivades, Corbes, Derivades parcials i Optimització) i Càlcul integral (dos volums: Integrals i Equacions diferencials).

El present volum és continuació natural de l'anterior que està dedicat als espais vectorials. Es generalitza en primer lloc el concepte d'aplicació entre dos espais vectorials i s'introdueix la important definició d'aplicació lineal. Pel seu estudi s'utilitza l'àlgebra matricial. A continuació es desenvolupen els temes de valors i vectors propis, la diagonalització d'endomorfismes i l'estudi de les formes quadràtiques.

Pensem que, en l'estudi de la Matemàtica, l'alumne universitari podrà servir-se d'aquesta guia didàctica tant per a la confecció dels seus propis apunts com per a l'estudi dels diferents temes que conformen les assignatures corresponents a les matèries tractades. Per aquest motiu es presenta una breu *Bibliografia escollida* classificada en bàsica i addicional, segons el grau de dificultat que presenta.

Exposem el *Programa* i la *Simbologia*, on indiquem els conceptes que la integren, conjuntament amb el simbolisme que farem servir al llarg de l'obra. Hem procurat fer un programa racional en què els conceptes es van deduint els uns dels altres de manera lògica.

En cada volum es destaca especialment el contingut en *Conceptes* i *Exemples*, de gran importància per a la comprensió de les matèries tractades, en les quals, sovint, es prescindeix de demostracions formalistes d'acord amb l'esperit de l'obra, que, com el seu títol indica, pretén ser una guia didàctica.

A continuació presentem una *Formulació matemàtica*, expressada en símbols formals dels conceptes estudiats, que ajudaran, sens dubte, a la rigorositat en la resolució de qüestions i problemes.

Continuem el desenvolupament amb la part dedicada a l'estudi de *Problemes resolts*. És important que l'estudiant comprengui fins l'últim detall aquests problemes, que, en realitat, són una continuïtat en grau de dificultat dels exemples senzills estudiats anteriorment.

Presentem després una col.lecció de *Problemes proposats* amb la intenció que el lector els resolgui de manera natural mitjançant els coneixements adquirits als apartats anteriors.

A l'apèndix s'inclou una *Prova d'autoavaluació* que consta d'una sèrie de "problemes parametritzats"; és a dir, problemes que depenen d'un paràmetre (a=1,2,3,4). Per a cada valor del paràmetre la solució serà diferent i estarà inclosa entre alguna de les vuit possibles. Aquest tipus de problemes es podrà resoldre quatre vegades amb números diferents.

Finalment, a més de la *Bibliografia escollida*, un *Glossari* de tots els conceptes matemàtics exposats al llarg de l'obra en facilita la ràpida localització.

Girona, març de 1996

Els autors

A. lineals, Diagonalització i Formes quadràtiques

Capítol 1: **Aplicacions lineals**

a) BIBLIOGRAFIA ESCOLLIDA

Bàsica:

HERAS, A. *Problemas de Álgebra Lineal para la Economía.* P133/222.

CANCELO, J.R. *Problemas de Álgebra Lineal para Economistas. Tomo I.* P77/152

ALEGRE, P. *Ejercicios resueltos de Matemáticas Empresariales 1.* P22/28, i P82/95.

CASANOVA, J. *Exámenes de Álgebra Lineal.* P121/218.

LIPSCHUTZ, S. *Álgebra Lineal.* P369/435.

RODRIGUEZ, A. *Matemáticas para economistas (I).* P267/286.

THOMAS ARA, L. *Álgebra Lineal.* P145/179.

MUÑOZ, F. *Manual de Álgebra Lineal.* P115/159.

Addicional:

TUDURI, J. *Matemáticas (C.O.U.).* P23/49.

SAMAMED, O. *Matemáticas 1. Economía y Empresa.* P161/181

BOADAS, J. *Álgebra Moderna a través de los problemas. Tomo II.* P9/82.

DIEGO, BRAULIO de. *Problemas de Algebra y Geometría. Problemas de Algebra Lineal.* P206/326.

ROJO, A. O. *Álgebra II.* P66/105

DIAZ HERNANDO, J. A. *Álgebra, Geometría, Cálculo. Tomo I.* P351/407.

b) PROGRAMA I SIMBOLOGIA

1.1 APLICACIÓ LINEAL

1) **Correspondències i aplicacions.** Conjunt inicial (A) i conjunt final (B), conjunt producte (A×B). Grafo (F), correspondència (f), conjunt imatge (f(A)). Aplicació (f), tipus d'aplicacions: injectiva, exhaustiva i bijectiva. Funcions (f).
2) **Homomorfismes.** Estructura algebraica (A,⊕). Definició d'homomorfisme (f).
3) **Aplicació lineal.** Definició (f), condicions de linealitat: doble i única. Tipus d'aplicac. lineals: monomorfisme, epimorfisme, isomorfisme, endomorfisme i automorfisme. Propietats de les aplicacions lineals.

1.2 MATRIU ASSOCIADA A UNA APLICACIÓ LINEAL

1) **Matriu associada.** Matrius de les bases (B, C), matriu imatge (F), matrius de les components (X, Y). Matriu associada (A), rang de l'aplicació lineal (ρ(f)).
2) **Equacions d'una aplicació lineal.** Equació matricial, sistema d'equacions lineals.
3) **L'espai vectorial de les aplicacions lineals.** Operacions, aplicacions suma (f+g) i producte per un escalar (λ.f), espai vectorial de les aplicacions lineals (L(V,W)).
4) **Composició d'aplicacions lineals.** Aplicació composta ($f \circ g$), aplicacions idèntica (i) i inversa (f^{-1}), anell no commutatiu amb element unitat.
5) **Canvi de base en una aplicació lineal.** Matriu de pas (P). Diagrames de bases i de components. Fórmula del canvi de base.

1.3 NUCLI I IMATGE D'UNA APLICACIÓ LINEAL

1) **Nucli d'una aplicació lineal.** Definició de nucli (N(f)), propietats
2) **Imatge d'una aplicació lineal.** Definició d'imatge (I(f)), propietats. Teorema de la dimensió, conseqüències.

c) CONCEPTES I EXEMPLES

1.1 APLICACIÓ LINEAL

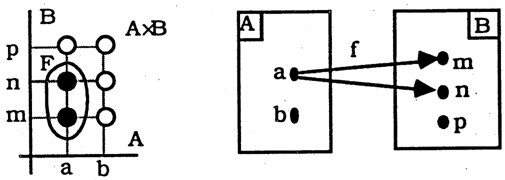
1.1.1 CORRESPONDÈNCIES I APLICACIONS. Donats els conjunts A i B, on el primer s'anomena *conjunt inicial* i el segon *conjunt final*, podem formar el seu *conjunt producte* A×B que, com sabem, és el conjunt dels parells ordenats (a, b) tals que el primer element pertany a A i el segon a B.

En el primer volum d'Àlgebra moderna vam definir el concepte de *grafo*, F, com un subconjunt del conjunt producte A×B. Una *correspondència* f no és res més que la terna ordenada formada pels conjunts inicial i final i el grafo, f=(A, B, F).

Així, si el parell (a, b) és del grafo F, ho expressem per f(a)=b i diem que, aplicant la correspondència f, ens resulta que la imatge de l'element a és igual a l'element b. La correspondència anterior també es pot indicar amb simbolisme de fletxes, f: A→B.

Finalment, diem que el *conjunt imatge*, f(A), és el subconjunt de B format per totes les imatges possibles dels elements d'A.

Exemple 1. Donats els conjunts A={a, b} i B={m, n, p}, el seu conjunt producte és A×B={(a,m), (a,n), (a,p), (b,m), (b,n) i (b,p)}. Un grafo o subconjunt pot ser el F={(a,m), (a,n)}.



Aquest grafo defineix la correspondència f: A→B que té per imatges f(a)=m i també f(a)=n. El conjunt imatge, o conjunt de les imatges, és, per tant, f(A)={m, n}.

Una *aplicació* és un tipus especial de correspondència tal que a tot element del conjunt inicial li fa correspondre un sol element del conjunt final. Les designarem també per f: A→B.

Recordem que hi ha tres *tipus d'aplicacions*:

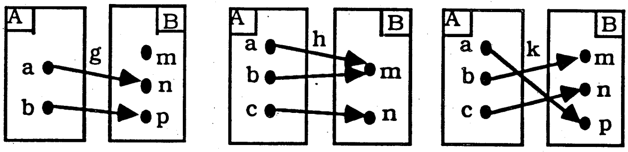
Aplicació injectiva. Tot element del conjunt imatge prové d'un sol element original. Intuïtivament vol dir que no poden arribar dues fletxes al mateix punt. Conseqüentment, si l'aplicació és injectiva i dues imatges són iguals, f(a)=f(b), llavors haurà de succeir que els elements originals també siguin iguals, a=b.

Aplicació exhaustiva. Tot element del conjunt final és imatge d'almenys un element original. En altres paraules, el conjunt imatge coincideix amb el conjunt final, f(A)=B.

Aplicació bijectiva. Tot element del conjunt final prové d'un sol element original. Clarament, d'aquesta definició es desprèn que una aplicació bijectiva és a la vegada injectiva i exhaustiva.

Exemple 2. Es veu clarament que la correspondència f de l'exemple anterior no és cap aplicació, per dues raons: la primera perquè d'a surten dues fletxes i la segona perquè de b no en surt cap.

Les correspondències g, h i k següents, on els conjunts A i B són variables, sí que són aplicacions, ja que en totes a tot element del conjunt inicial li surt una sola fletxa.



g injectiva h exhaustiva k bijectiva

Observem que la g és injectiva (a tots els elements del conjunt imatge els arriba una sola fletxa), la h és exhaustiva (a tots els elements del conjunt final els arriben fletxes) i que la k és bijectiva (a tots els elements del conjunt final els arriba una sola fletxa).

Un tipus particular d'aplicacions és el de les *funcions*, on els seus conjunts inicial i final són conjunts numèrics. Si es tracta del conjunt dels nombres reals tindrem f: R→R i d'aquestes funcions en direm *funcions reals de variable real*. El seu estudi s'efectuarà en la part de Càlcul infinitesimal.

1.1.2 HOMOMORFISMES. Recordem que l'ens matemàtic format per un o més conjunts, per una o més operacions i per les propietats corresponents que hi intervenen, s'anomena *estructura algebraica*.

Siguin (A, ⊕) i (B, ⊗) dues estructures algebraiques, on les seves operacions les anomenem "suma" i "producte", respectivament, i sigui f: A→B una aplicació entre aquests conjunts.

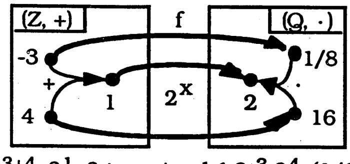
Direm que l'aplicació entre les dues estructures f: (A, ⊕)→(B, ⊗), és un *homomorfisme* si la imatge de l'operació de dos elements és igual a l'operació de les imatges. Més senzill, si la imatge de la "suma" és igual al "producte" de les imatges.

En conseqüència, s'haurà de verificar que $f(a \oplus b)=f(a) \otimes f(b)$.

Exemple 3. Siguin els parells (Z, +) i (Q, ·) que tenen l'estructura de grup abelià i sigui l'aplicació $f(x)=2^x$. En general, tindrem:

$$f(a+b)= 2^{a+b}= 2^a.2^b=f(a).f(b)$$

Com que la imatge de la suma és igual al producte de les imatges, l'aplicació f, que va dels enters amb l'operació de suma als racionals amb l'operació de producte, és un homomorfisme. Vegem-ho amb un cas particular:



Observem que $2^{-3+4}=2^1=2$ i que també $2^{-3}\cdot 2^4=(1/8).16=2$.

1.1.3 APLICACIÓ LINEAL. Siguin ara les dues estructures d'espai vectorial, (V, +, ·) i (W, +, ·), on el cos d'escalars és R i on les operacions internes (+) i externes (·) s'han simbolitzat amb el mateix signe operacional. Generalitzarem a continuació el concepte d'homomorfisme per aquestes dues operacions.

Direm que l'aplicació f: (V, +, ·)→(W, +, ·) és una *aplicació lineal* si es verifiquen les dues *condicions de linealitat* següents, anomenades també *condició doble*:

(1) "La imatge de la suma de dos vectors és igual a la suma de les imatges d'aquests vectors". És a dir, $f(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)=f(\mathbf{u}_1)+f(\mathbf{u}_2)$.

(2) "La imatge d'un escalar per un vector és igual a l'escalar multiplicat per la imatge del vector". Per tant, $f(\lambda.\mathbf{u})=\lambda.f(\mathbf{u})$.

Es pot provar fàcilment que les dues condicions anteriors es poden resumir en una *condició única*:

(3) "La imatge d'una combinació lineal de vectors és igual a la combinació lineal de les imatges dels vectors". En llenguatge matemàtic, $f(\lambda_1.\mathbf{u}_1+\lambda_2.\mathbf{u}_2)=\lambda_1.f(\mathbf{u}_1)+\lambda_2.f(\mathbf{u}_2)$.

Exemple 4. Siguin els espais vectorials $V=R^2$ i $W=R^3$, dels vectors del pla i de l'espai, respectivament, i sigui l'aplicació $f: R^2 \to R^3$ definida per $f(x, y)=(2.x, 0, 3.y)$. Estudiem, amb la condició doble, si és lineal.

Primera condició:

$f(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)= f((x_1, y_1)+(x_2, y_2))= f(x_1+x_2, y_1+y_2)= (2.(x_1+x_2), 0, 3.(y_1+y_2))=$

$= (2.x_1+2.x_2, 0, 3.y_1+3.y_2)= (2.x_1, 0, 3.y_1)+(2.x_2, 0, 3.y_2)=$

$= f(x_1, y_1)+f(x_2, y_2)= f(\mathbf{u}_1)+f(\mathbf{u}_2)$.

Segona condició:

$f(\lambda.\mathbf{u})= f(\lambda.(x, y))= f(\lambda.x, \lambda.y)= (2.(\lambda.x), 0, 3.(\lambda.y))= \lambda.(2.x, 0, 3.y)= \lambda.f(x,y)=$

$= \lambda.f(\mathbf{u})$.

Com que s'han complert les dues condicions, podem assegurar que f és una aplicació lineal.

Si (V, +, ·) i (W, +, ·) són dos espais vectorials reals i si f: V→W és una aplicació lineal entre ells, estudiem a continuació els diferents *tipus d'aplicacions lineals* que hi pot haver:

Monomorfisme. És quan l'aplicació lineal f és injectiva. En conseqüència, si $f(\mathbf{u}_1)=f(\mathbf{u}_2)$ haurà de complir-se que $\mathbf{u}_1=\mathbf{u}_2$.

Epimorfisme. Anomenarem així una aplicació lineal exhaustiva. Per tant, haurà de complir-se que f(V)=W.

Isomorfisme. Serà quan l'aplicació lineal sigui bijectiva. És clar que un isomorfisme és a la vegada monomorfisme i epimorfisme.

En el cas particular que els dos espais vectorials siguin el mateix, V=W, l'aplicació lineal f rep els noms de:

Endomorfisme. És simplement una aplicació lineal d'un espai vectorial en ell mateix.

Automorfisme. Es tracta d'una aplicació lineal bijectiva d'un espai vectorial en ell mateix. Per tant, serà un endomorfisme bijectiu.

Exemple 5. Analitzem de quin tipus és l'aplicació lineal f: $R^2 \rightarrow R^3$ de l'exemple anterior que és definida per $f(x, y)=(2.x, 0, 3.y)$.

En principi veiem que f és un monomorfisme, ja que f és injectiva. En efecte, si $f(\mathbf{u}_1)=f(\mathbf{u}_2)$ tenim $(2.x_1, 0, 3.y_1)=(2.x_2, 0, 3.y_2)$. Igualant, $2.x_1=2.x_2$ i $3.y_1=3.y_2$, és a dir, $x_1=x_2$ i $y_1=y_2$. Per tant, $(x_1, y_1)=(x_2, y_2)$, d'on $\mathbf{u}_1=\mathbf{u}_2$.

En canvi no és un epimorfisme perquè f no és exhaustiva, ja que per exemple el vector de W, (1, 2, 3), no està en el conjunt imatge, perquè les imatges són de la forma (2.x, 0, 3.y) i la segona component sempre és nul·la. Per tant, $f(V)\neq W$.

En conseqüència, tampoc no serà un isomorfisme, ja que no és exhaustiva.

Com a exercici es pot comprovar fàcilment que la nova aplicació lineal g: $R^2 \rightarrow R^2$ definida per $g(x, y)=(2.x, 3.y)$ és un automorfisme, ja que és endomorfisme i també isomorfisme.

Entre les *propietats de les aplicacions lineals*, que es poden demostrar sense cap dificultat, en destaquem les següents, que es poden veure esquematitzades en l'apartat de Formulació matemàtica:

(1) "La imatge del vector nul de l'espai vectorial inicial és igual al vector nul de l'espai vectorial final", $f(\mathbf{0})=\mathbf{0}'$.

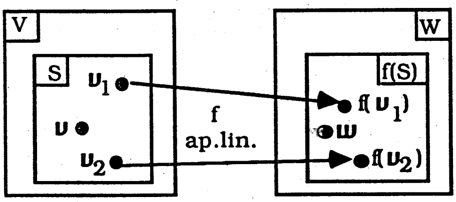
(2) "La imatge de l'oposat d'un vector és igual a l'oposat de la imatge del vector", $f(-\mathbf{u})=-f(\mathbf{u})$.

(3) "La imatge d'un subespai de l'espai vectorial inicial és també un subespai de l'espai vectorial final".

(4) "La imatge recíproca d'un subespai de l'espai vectorial final és també un subespai de l'espai vectorial inicial".

Exemple 6. Provem, per exemple, la (3). Per demostrar que f(S) és un subespai vectorial de W, prendrem dos vectors $\mathbf{w}_1$ i $\mathbf{w}_2$ de f(S) i haurà de passar que el vector combinació lineal, $\mathbf{w}=\lambda_1.\mathbf{w}_1+\lambda_2.\mathbf{w}_2$, també sigui de f(S).

Com que $\mathbf{w}_1$ i $\mathbf{w}_2$ són de f(S), seran de la forma $\mathbf{w}_1=f(\mathbf{u}_1)$ i $\mathbf{w}_2=f(\mathbf{u}_2)$, on $\mathbf{u}_1$ i $\mathbf{u}_2$ són de S.



Pel fet que S és un subespai de V, el vector combinació lineal $\mathbf{u}=\lambda_1.\mathbf{u}_1+\lambda_2.\mathbf{u}_2$ també serà de S. Aplicant ara f tindrem que $f(\mathbf{u})$ serà de f(S), però com que f és una aplicació lineal ens resultarà que $f(\mathbf{u})=f(\lambda_1.\mathbf{u}_1+\lambda_2.\mathbf{u}_2)=\lambda_1.f(\mathbf{u}_1)+\lambda_2.f(\mathbf{u}_2)=\lambda_1.\mathbf{w}_1+\lambda_2.\mathbf{w}_2=\mathbf{w}$.

En conseqüència, $f(\mathbf{u})=\mathbf{w}$ i així el vector combinació lineal $\mathbf{w}$ és de f(S). Per tant, f(S) és un subespai vectorial de W.

1.2 MATRIU ASSOCIADA A UNA APLICACIÓ LINEAL

1.2.1 MATRIU ASSOCIADA. Siguin dos espais vectorials V i W, que tenen per dimensions dim(V)=n i dim(W)=m, i on coneixem una base de cadascun:

$$B=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2,\dots, \mathbf{u}_n\} \quad \text{i} \quad C=\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2,\dots, \mathbf{w}_m\}$$

Amb finalitat didàctica, particularitzarem pels espais $V=R^3$ i $W=R^2$, per la qual cosa les bases poden ser

$$B=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} \quad \text{i} \quad C=\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$$

Com que també ens interessa que les notacions siguin com més senzilles millor, farem servir el càlcul matricial, i així escriurem en forma matricial les bases anteriors, que anomenarem *matrius de les bases*, i on emprarem les mateixes lletres B i C per designar aquestes dues matrius fila,

$$B=(\mathbf{u}_1 \;\; \mathbf{u}_2 \;\; \mathbf{u}_3) \quad \text{i} \quad C=(\mathbf{w}_1 \;\; \mathbf{w}_2)$$

A més, farem servir la *matriu imatge dels vectors de la primera base*, que la designem per F i serà la matriu fila

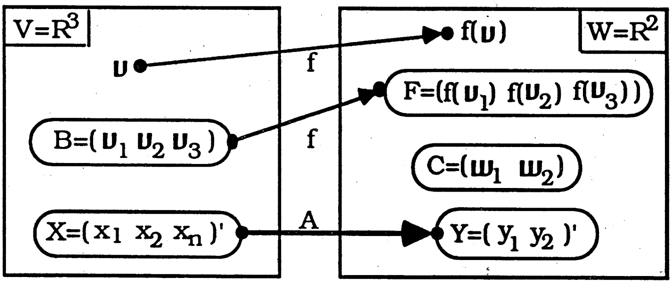
$$F=(f(\mathbf{u}_1) \;\; f(\mathbf{u}_2) \;\; f(\mathbf{u}_3))$$

També farem servir les que anomenem *matrius components*, X i Y que seran matrius columnes i que representaran les components d'un vector i la seva imatge, segons les bases B i C, respectivament:

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Per motius d'espai, les escriurem horitzontalment $X=(x_1 \;\; x_2 \;\; x_3)'$ i $Y=(y_1 \;\; y_2)'$, on la (') indica l'operació de transposició.

Un esquema ens podrà ajudar a comprendre el procés matemàtic que haurem de desenvolupar per arribar al concepte de matriu associada a una aplicació lineal:



Donat un vector qualsevol $\mathbf{u}$ del primer espai vectorial, podrem posar-lo en funció de la base B. Quedarà en la forma

$$\mathbf{u}=x_1.\mathbf{u}_1+x_2.\mathbf{u}_2+x_3.\mathbf{u}_3$$

Calculant la seva imatge per l'aplicació f, i tenint en compte que és lineal, ens resultarà

$$f(\mathbf{u})=x_1.f(\mathbf{u}_1)+x_2.f(\mathbf{u}_2)+x_3.f(\mathbf{u}_3)$$