ÀLGEBRA MODERNA: ESTRUCTURES ALGEBRAIQUES

Guia didàctica de la Matemàtica universitària

ÀLGEBRA MODERNA: ESTRUCTURES ALGEBRAIQUES

Carles Cassú, Joan Bonet,
Xavier Bertran, J. Carles Ferrer

Universitat de Girona
Departament d'Economia

Àlgebra moderna : estructures algebraiques / Carles Cassú ... [et al.]. - Girona : Servei de Publicacions de la Universitat de Girona, 1995. - p. ; cm. - (Guia didàctica de la matemàtica universitària ; 2)
ISBN 84-88762-33-X
I. Cassú, Carles II. Universitat de Girona. Departament d'Economia
1. Algebra - Problemes, exercicis, etc. 2. Estructures algebraiques - Problemes, exercicis, etc.
CIP 512 ALG

Primera edició: novembre de 1995

Amb la col·laboració del Comissionat per a Universitats i Recerca i del Departament de Cultura de la Generalitat de Catalunya

Edita: Servei de Publicacions de la Universitat de Girona

Assessorament lingüístic: Servei de Normalització Lingüística de la UdG

Universitat de Girona
Edifici Les Àligues
Pl. Sant Domènec, 3
17071 Girona
Tel. (972) 41 82 06 - Fax (972) 41 80 87

ISBN: 84-88762-33-X
Dipòsit legal: GI-1442-95

Carles Cassú és doctor en Ciències i catedràtic d'Escola Universitària de la UdG. Joan Bonet, Xavier Bertran, i J. Carles Ferrer són llicenciats en Ciències Matemàtiques i professors titulars d'Escola Universitària del Departament d'Economia de la UdG.

PRÒLEG

Oferim als estudiants universitaris i als lectors interessats aquesta guia didàctica de la matemàtica universitària com a fruit dels nostres anys de docència de les matemàtiques a la Universitat. El resultat final ha esdevingut una col.lecció de setze petits volums agrupats en els dos móduls d'Àlgebra Lineal i de Càlcul Infinitesimal.

Per raons de contingut el mòdul d'Àlgebra Lineal s'ha subdividit en les tres parts corresponents d'Àlgebra Moderna (dos volums: Conjunts i Estructures), Àlgebra Matricial (tres volums: Matrius, Determinants i Sistemes d'equacions) i Àlgebra Vectorial (tres volums: Vectors, Endomorfismes i Geometria Analítica), mentre que el mòdul de Càlcul Infinitesimal agrupa les tres parts corresponents a Càlcul Funcional (dos volums: Funcions i Continuïtat), Càlcul Diferencial (quatre volums: Derivades, Corbes, Derivades parcials i Optimització) i Càlcul Integral (dos volums: Integrals i Equacions Diferencials).

El present volum continua l'estudi de l'Àlgebra moderna iniciada en l'anterior volum de la col·lecció: *conjunts, relacions i aplicacions*. Es comença amb la noció de llei de composició, una operació entre els elements d'un conjunt que utilitzarem pel posterior estudi del concepte d'estructura algebraica, de gran importància en l'Àlgebra moderna. Tot seguit es fa una senzilla introducció a les estructures algebraiques més importants, com són les de grup, anell i cos, fent a més un repàs de les diferents classes de nombres: enters, racionals, reals i complexos.

Creiem que, en l'estudi de la Matemàtica, l'alumne universitari podrà servir-se d'aquesta guia didàctica tant per a la confecció dels seus propis apunts com en l'estudi dels diferents temes que conformen les assignatures corresponents a les matèries tractades. Per aquest motiu es presenta una breu *Bibliografia escollida* classificada en bàsica i addicional, segons el grau de dificultat que presenta.

Exposem el *Programa* i la *Simbologia*, on indiquem els conceptes que l'integren, conjuntament amb el simbolisme que farem servir al llarg de l'obra. Hem procurat fer un programa racional en què els conceptes es van deduint els uns dels altres de manera lògica.

En cada volum es destaca especialment el contingut en *Conceptes* i *Exemples*, de gran importància per a la comprensió de les matèries tractades, en les quals, sovint, es prescindeix de demostracions formalistes d'acord amb l'esperit de l'obra, que, com el seu títol indica, pretén ser una guia didàctica.

A continuació presentem una *Formulació matemàtica*, expressada en símbols formals dels conceptes estudiats, que ajudaran, sens dubte, a la rigorositat en la resolució de qüestions i problemes.

Seguim el desenvolupament amb la part dedicada a l'estudi de *Problemes resolts*. És important que l'estudiant comprengui fins a l'últim detall aquests problemes, que, en realitat, són una continuïtat en grau de dificultat dels exemples senzills estudiats anteriorment.

Presentem després una col.lecció de Problemes proposats amb la intenció que el lector els resolgui de manera natural mitjançant els coneixements adquirits als apartats anteriors.

A l'apèndix s'inclou una *Prova d'autoavaluació* que consta d'una sèrie de "problemes parametritzats"; és a dir, problemes que depenen d'un paràmetre (a=1,2,3,4). Per a cada valor del paràmetre la solució serà diferent i estarà inclosa entre alguna de les vuit possibles. Aquest tipus de problemes es podrà resoldre quatre vegades amb números diferents.

Finalment, a més de la *Bibliografia escollida*, un *Glossari* de tots els conceptes matemàtics exposats al llarg de l'obra en facilita la ràpida localització.

Girona, octubre de 1995

Els autors

Estructures algebraiques

Capítol 1: **Lleis de composició**

a) BIBLIOGRAFIA ESCOLLIDA

Bàsica:

BURGOS, A. *Iniciación a la Matemática Moderna.* P193/232.

PRIETO, E. y G. *Matemática para Economistas.: Álgebra Lineal* P103/120.

GUTIERREZ, A., GRACÍA CASTRO, F. *Álgebra Lineal. Tomo (I).* P173/211.

DÍAZ HERNANDO, J. A. *Álgebra, Geometría y Cálculo. Tomo (I).* P77/104.

RODRIGUEZ, A. *Matemáticas para economistas, I.* P53/61.

THOMAS ARA, L., RIOS GARCIA, M. E. *Álgebra Lineal.* P55/65 i P74/76.

BOADAS, J., VILLALBÍ, R. *Álgebra Moderna a través de los problemas. Tomo (I).* P5/80.

Addicional:

GARCÍA SESTAFE, J. V. *Ciencias Económicas y Empresariales. Curso de Matemáticas en forma de problemas.* P26/33.

LUZÀRRAGA, A. *Problemas resueltos de Álgebra Lineal.* P19/29.

LIPSCHUTZ, S. *Teoria de Conjuntos y Temas Afines.* P120/131.

ESPADA BROS, E. *Problemas resueltos de Álgebra. Tomo (I).* P105/121.

ROJO, A. O. *Álgebra. Tomo (I).* P142/161.

b) PROGRAMA I SIMBOLOGIA

1.1 OPERACIONS BINÀRIES

1) **Operacions.** Operador i operació, llei de composició (T). Diagrama de blocs, operands i resultat. Operació monaria. Operacions binàries, símbols operacionals (*, ⊗, ⊕,...), taula pitagòrica. Generalització de les lleis de composició.
2) **Lleis de composició interna.** Llei de composició interna, operació interna. Subconjunt estable. Compatibilitat entre una llei de composició interna i una relació binària.
3) **Propietats i elements notables.** Propietats que poden tenir les operacions binàries: clausura, associativitat, commutativitat i distributivitat. Elements notables: element neutre (e), elements nul (0) i unitat (1); element simètric (a'), elements oposat (-a) i invers (a^{-1}); elements regulars o simplificables.
4) **Lleis de composició externa.** Llei de composició externa, operació externa.

1.2 HOMOMORFISMES.

1) **Concepte d'homomorfisme.** Estructures algebraiques. Homomorfisme.
2) **Tipus i propietats.** Tipus d'homomorfisme: epimorfisme, monomorfisme i isomorfisme; endomorfisme i automorfisme. Estructures isomorfes. Propietats que tenen els homomorfismes.

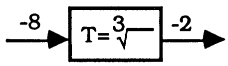
c) CONCEPTES I EXEMPLES

1.1 OPERACIONS BINÀRIES

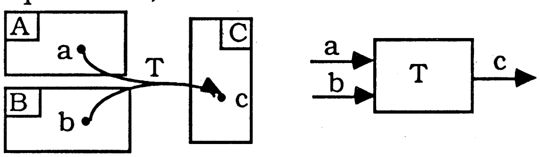
1.1.1 OPERACIONS. Sigui f: A→B és una aplicació entre el conjunt inicial A i el final B, podem considerar f com un *operador*, que fa que a tot $a \in A$ li correspongui un sol $b=f(a)$, on $b \in B$. Aquesta "operació" de transformar uns certs elements en uns altres s'anomena *llei de composició*, i en comptes de f se sol emprar el símbol T. Així es podrà escriure $T(a)=b$.

Per visualitzar les lleis de composició es poden fer servir un *diagrama de blocs*, on els elements inicials són els *operands* i l'únic element final és el *resultat*. Com que en aquest cas sols hi ha un operand, direm que la llei de composició és una *operació monaria*.

Exemple 1. Sigui l'aplicació f: Z→R definida per $f(x)=\sqrt[3]{x}$. Podem considerar-la com una operació monaria, T, que fa que a qualsevol enter li correspongui la seva arrel cúbica. Posem un exemple utilitzant un diagrama de blocs:



Molt més importants són les *operacions binàries*, que són lleis de composició per a dos elements. Així doncs els operands seran una parella d'elements, (a,b), pertanyents al conjunt producte A×B, i el resultat, al igual que abans, serà un únic element de C.



La llei de composició T, aplicada al parell (a,b), ens dóna l'element c, o sigui $T(a,b)=c$. Ara bé, en tractar-se d'una operació binària escrivim $aTb=c$, i ho llegim com "a operat amb b dóna c".

Ens servirem també d'altres *símbols operacionals*, com $*$, $\oplus$, $\otimes$ etc. Si els conjunts són finits, podem emprar una taula de doble entrada, anomenada *taula pitagòrica*, on es troba el resultat de les operacions.

Exemple 2. La funció $f(x,y)=(x^2+y^3)/4$, on per exemple $x \in N$, $y \in Z$ i $f(x,y) \in Q$, és una operació binària ja que a cada parella de N×Z li fem correspondre com a resultat un número de Q. Si la simbolitzéssim per $(*)$ tindríem, per exemple, $1*(-2)= -7/4$. Si l'operació fos el producte ordinari, la taula pitagòrica seria la coneguda *taula de multiplicar*.

Una *generalització de llei de composició* serà una operació que fa correspondre a cada n-tupla $(a_1,a_2,...,a_n)$ del conjunt producte $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ un únic valor $c \in C$, o sigui $T(a_1,a_2,...,a_n)=c$.

Exemple 3. L'operació de trobar la mitjana de tres números, $T(a,b,c)=(a+b+c)/3$, seria una operació ternària.

1.1.2 LLEIS DE COMPOSICIÓ INTERNA. Direm que una operació binària T és una *llei de composició interna* si està definida tota ella en un mateix conjunt A; és a dir, per a cada parella (a,b) d'elements de A, existirà un sol element c de A, tal que T(a,b)=c. Com que també podem escriure aTb=c, podem dir que T és una *operació interna.*

Exemple 4. Donat el parell (N,+), és a dir, el conjunt dels naturals amb l'operació de suma, veiem que (+) és una operació interna, ja que la suma de dos naturals és també un natural. És a dir, que tot el procés de l'operació es realitza a l'interior de N.

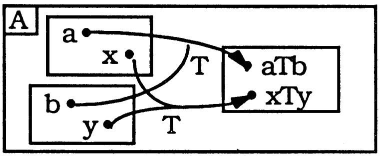
No ho seria, en canvi, (N,-), perquè la diferència de naturals pot ser que no sigui natural (2-5=-3).

Sigui T una llei de composició interna definida en el conjunt A, i X, un subconjunt de A. Direm que X és un *subconjunt estable* respecte a T si el resultat d'operar dos elements de X també és de X.

Exemple 5. Sabem que (+) és una operació interna pels naturals. Considerem que a N hi ha el subconjunt P de nombres parells. Com que la suma de parells també és parell, el subconjunt P és estable respecte a la suma.

Si el subconjunt fos el I dels imparells, llavors no seria un subconjunt estable, (3+5=8 parell).

A més de la llei de composició interna T definida en el conjunt A, suposem que amb els elements de A es pot establir una relació binària $\mathcal{R}$. Es diu que hi ha *compatibilitat entre una llei i una relació,* o bé que la llei i la relació són compatibles, si el resultat d'operar dos elements qualssevol de A coincideix amb el resultat d'operar dos elements relacionats.



De l'esquema anterior podem dir que si "a està relacionat amb x" i "b està relacionat amb y", llavors "aTb estarà relacionat amb xTy".

Exemple 6. Sigui el conjunt N de naturals, la llei de composició interna (+) de suma i la relació R "tenir la mateixa paritat". Podem veure que la suma i la paritat són compatibles perquè si agafem, per exemple, 6R2 i 9R5, llavors (6+9)R(2+5), o sigui 15R7, que és cert perquè tenen la mateixa paritat (ambdós són imparells).

1.1.3 PROPIETATS I ELEMENTS NOTABLES. En aquest apartat simbolitzarem les operacions binàries definides en un conjunt A per $\otimes$ i $\oplus$, que anomenarem "producte" i "suma", respectivament, encara que no coincideixin amb el producte i suma usuals.

Entre les propietats de les operacions binàries tenim l'*associativitat* $(a\otimes b)\otimes c=a\otimes(b\otimes c)$, *commutativitat* $a\otimes b=b\otimes a$ i *distributivitat* $a\otimes(b\oplus c)=(a\otimes b)\oplus(a\otimes c)$. Quant a la *clausura* diem que l'operació és una llei de composició interna en el conjunt A.

Comentem ara els *elements notables* d'una operació binària. L'*element neutre*, simbolitzat per e, és com si no actués en l'operació: operant el neutre amb un element qualsevol ens queda el mateix element, $e\otimes a=a\otimes e=a$.

Exemple 7. Si l'operació és la suma usual (+), l'element neutre és el 0, l'*element nul*, ja que per a un número real a qualsevol es verifica que $0+a=a+0=a$.

Pel producte ordinari (.), l'element neutre és el 1, *element unitat*, perquè resulta que $1.a=a.1=a$.

Si només es verifica la primera part, $e\otimes a=a$, i això passa quan l'operació no és commutativa, direm que e és un *element neutre per l'esquerra*. Podem dir el mateix si només $a\otimes e=a$, on ara e és un *element neutre per la dreta*.

Exemple 8. Si a N tenim l'operació de "potenciació", simbolitzada per (↑) i definida per $a\uparrow b=a^b$, tindrem que l'element neutre per la dreta serà e=1, ja que $a\uparrow 1=a^1=a$.

Veiem que no tindria element neutre per l'esquerra, ja que s'hauria de complir que $e\uparrow a=e^a=a$, o sigui $e=a^{1/a}$, que dependria de a.

Donada una operació binària (⊗) amb element neutre e, direm que a' és l'*element simètric* de l'element a si operats ens donen el neutre; és a dir, si $a'\otimes a=a\otimes a'=e$.

Si només es verifica la primera part, a' es dirà *element simètric per l'esquerra*, i si només es verifica la segona, llavors es tractarà d'un *element simètric per la dreta*.

Exemple 9. En el conjunt dels reals, l'element simètric per la suma usual (+) de l'element a és el seu *oposat*, designat per -a. Trivialment es verifica que $(-a)+a=a+(-a)=0$.

Quant al producte ordinari (.) l'element simètric de a és el seu *invers*, a^{-1}, ja que resulta que $a^{-1}.a=a.a^{-1}=1$.

Agafem ara l'operació de divisió (/) en el conjunt dels racionals Q. Veiem que té element neutre per la dreta, e=1, perquè $a/1=a$, per a tot racional a; no tindria en canvi element neutre per l'esquerra. L'element simètric per la dreta de l'element a serà ell mateix, a'=a, ja que $a/a'=a/a=1$.

En una operació binària ⊗ direm que a és un *element regular* si és un *element simplificable*; és a dir, si $a\otimes b=a\otimes c$ o bé $b\otimes a=c\otimes a$, llavors podrem eliminar la a, i ens quedarà que b=c. Si només es pogués eliminar quan està a l'esquerra diríem que és un *element regular per l'esquerra*, i si només fos simplificable quan està a la dreta seria un *element regular per la dreta*.

Exemple 10. En l'operació de producte (.) tots els elements són regulars menys el 0, ja que tenim que $0.3=0.5$, i d'aquí no es pot deduir que 3=5. Per la dreta passaria el mateix, $7.0=4.0$ no implica que 7=4.

Sigui ara l'operació de potenciació (↑). Podem veure que el 1 no és regular per l'esquerra, $1^3=1^6$, però $3\neq 6$. També veiem que el 0 no és regular per la dreta perquè $0^2=0^8$, però $2\neq 8$.

1.1.4 LLEIS DE COMPOSICIÓ EXTERNA. Recordem que una llei de composició interna està definida tota ella en el mateix conjunt A, i serà de la forma T: $A \times A \rightarrow A$. Si algun d'aquests conjunts és diferent, direm que T és una *llei de composició externa* o bé una *operació externa*.

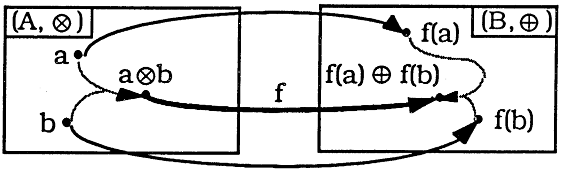
Exemple 11. Sigui P i V els conjunts de punts i de vectors del pla, respectivament, i sigui T la llei de composició T: $P \times P \rightarrow V$, que associa a cada parell de punts (a,b) el vector d'origen a i extrem b. Com que V és un conjunt de naturalesa diferent de P, tindrem que T és una llei de composició externa.

1.2 HOMOMORFISMES

1.2.1 CONCEPTE D'HOMOMORFISME. Sigui el parell $(A,\otimes)$ format per un conjunt i una llei de composició (o operació) que tindran segurament una sèrie de propietats i elements notables. Doncs bé, d'aquestes reunions compostes en general de conjunts, operacions, propietats i elements notables en direm *estructures algebraiques*.

Exemple 12. En els capítols següents veurem que $(N_0,+)$, $(Z,+,.)$ i $(Q,+,.)$ són estructures algebraiques anomenades respectivament semigrup, anell i cos. Aquestes estructures estan ordenades d'acord amb la riquesa de propietats. És quelcom similar als títols nobiliaris: també tenen a veure amb la "riquesa de propietats"...

Partim de dues estructures algebraiques, $(A,\otimes)$ i $(B,\oplus)$. Direm que l'aplicació f: $A \rightarrow B$ és un *homomorfisme* si i solament si la imatge del resultat d'operar dos elements en el primer conjunt és igual al resultat d'operar en el segon conjunt les imatges dels dos elements.



Abreujadament, direm que «l'aplicació f serà un homomorfisme si i solament si la imatge de la operació és igual a la operació de les imatges». En símbols, $f(a\otimes b)=f(a)\oplus f(b)$.

Exemple 13. Donades les estructures $(R^+,.)$ i $(R,+)$ i l'aplicació "logaritme decimal", f(x)=Log(x), veiem que f és un homomorfisme perquè la imatge de l'operació, Log(x.y), coincideix amb l'operació de les imatges, Log(x)+Log(y), ja que, com sabem, "el logaritme del producte és igual a la suma dels logaritmes".

1.2.2 TIPUS I PROPIETATS. Segons el tipus d'aplicació f: $A \rightarrow B$, es poden presentar els següents *tipus d'homomorfismes*: *epimorfisme* (exhaustiva), *monomorfisme* (injectiva) i *isomorfisme* (bijectiva).

En el cas particular que els dos conjunts siguin iguals, A=B, l'homomorfisme f es diu *endomorfisme*, i si a més l'aplicació és bijectiva, es dirà *automorfisme*.

Exemple 14. En ser l'aplicació logaritme f: $R^+ \to R$, es tractarà d'una aplicació exhaustiva; és a dir, l'homomorfime serà un epimorfisme.

Com que també és una aplicació injectiva (ja que de Log(a)=Log(b) es dedueix que a=b), podrem dir que "Log" és un monomorfisme.

La unió d'epimorfisme i monomorfisme dóna lloc al fet que l'aplicació logaritme de N^+ a R sigui un isomorfisme.

Per la seva importància, cal remarcar el concepte d'isomorfisme, ja que dues estructures (A,⊗) i (B,⊕), encara que semblin ben diferents, si es pot establir un isomorfisme entre elles, resultaran ser dues estructures, anomenades *estructures isomorfes*, que tenen exactament les mateixes propietats.

Exemple 15. Com que les estructures (N^+,.) i (R,+) són isomorfes degut a l'aplicació logaritme, podrem aprofitar-nos-en a l'hora de fer càlculs de productes complicats. Només caldrà trobar els logaritmes, i els productes es transformaran en sumes...

Entre les propietats que tenen els homomorfismes diem que la imatge f(A) és un *subconjunt estable* de B, és a dir, que operant dos elements qualssevol de la imatge ens ha de quedar un element que també pertany a la imatge. A més, els homomorfismes conserven l'associativitat i commutativitat. Per últim diem que «la imatge del neutre és el neutre de la imatge» i que «la imatge del simètric és el simètric de la imatge».

Exemple 16. Continuem amb l'aplicació logaritme, que ha resultat ser un isomorfisme de (R^+,.) a (R,+). En l'estructura inicial, el neutre del producte és e=1. Si trobem la seva imatge ens queda que log(1)=0, i resulta que 0 és el neutre de la suma en l'estructura final.

Igualment si a=2, per exemple, el seu simètric a (R^+,.) és l'invers 1/2. Si apliquem logaritmes, Log(1/2)=Log(1)-Log(2)=-Log(2), que és el simètric de la imatge de a, Log(2); és a dir és el seu oposat ja que l'operació en l'estructura final (R,+) és la suma.

d) FORMULACIÓ MATEMÀTICA

Lleis de composició

Operació monaria: **LLei de composició per a un sol element**

$T: A \to B$, $\bar{\exists} b \in B$ / $T(a)=b$, $\forall a \in A$ (aplicació)

Operació binària: **Llei de composició per a dos elements**

$T: A \times B \to C$, $\bar{\exists} c \in C$ / $T(a,b)=c$, $\forall a \in A \wedge \forall b \in B$

Lleis de composició: (Operació)

$T: A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \to C$, $\bar{\exists} c \in C$ / $T(a_1, a_2, \ldots, a_n)=c$, $\forall a_i \in A_i$

Llei de composició interna per a una operació binària:

$T: A \times A \to A$ / $\forall a,b \in A \Rightarrow \bar{\exists} c \in A$, $aTb=c$

Subconjunt estable: $X \subseteq A$ / $\forall a,b \in X \Rightarrow aTb \in X$

Compatibilitat llei/relació: $a \mathfrak{R} x \wedge b \mathfrak{R} y \Rightarrow (aTb) \mathfrak{R} (xTy)$

Propietats que poden tenir les op. binàries

Clausura: $\forall a,b \in A$, $\bar{\exists} c \in A$ / $a \otimes b = c$ (Llei de comp. interna a A)

Associativitat: $\forall a,b,c \in A$, $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$

Commutativitat: $\forall a,b \in A$, $a \otimes b = b \otimes a$

Distributivitat de $\otimes$ respecte a $\oplus$:

Distrib. esquerra: $\forall a,b,c \in A$, $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$

Distrib. dreta: $\forall a,b,c \in A$, $(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$

Elements notables

Element neutre:

E. neutre esquerra: $\exists e \in A$ / $\forall a \in A \Rightarrow e \otimes a = a$

E. neutre dreta: $\exists e \in A$ / $\forall a \in A \Rightarrow a \otimes e = a$

E. neutre: $\exists e \in A$ / $\forall a \in A \Rightarrow a \otimes e = e \otimes a = a$

Elements notables (cont.)

Element simètric:

E. simètric esquerra: $\forall a \in \mathbf{A}$, $\exists a' \in \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{a'\otimes a=e}$

E. simètric dreta: $\forall a \in \mathbf{A}$, $\exists a' \in \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{a\otimes a'=e}$

E. simètric: $\forall a \in \mathbf{A}$, $\exists a' \in \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{a\otimes a'=a'\otimes a=e}$

Element regular: (o simplificable)

E. regular esquerra: $\exists a \in \mathbf{A}$ / $\forall \mathbf{b,c} \in \mathbf{A}$, $\mathbf{a\otimes b=a\otimes c} \Rightarrow \mathbf{b=c}$

E. regular dreta: $\exists a \in \mathbf{A}$ / $\forall \mathbf{b,c} \in \mathbf{A}$, $\mathbf{b\otimes a=c\otimes a} \Rightarrow \mathbf{b=c}$

E. regular: $\exists a \in \mathbf{A}$ / $\forall \mathbf{b,c} \in \mathbf{A}$, $\mathbf{a\otimes b=a\otimes c} \wedge \mathbf{b\otimes a=c\otimes a} \Rightarrow \mathbf{b=c}$

Lleis de composició externa

Definició: $\mathbf{T: A\times B\to C}$ / $\forall a \in \mathbf{A} \wedge \forall b \in \mathbf{B} \Rightarrow \exists c \in \mathbf{C}$ / $\mathbf{aTb=c}$

on $\mathbf{A\neq B}$, $\mathbf{A\neq C} \vee \mathbf{B\neq C}$.

Casos particulars: $\mathbf{T: A\times B\to B}$, $\mathbf{T: A\times B\to A}$, $\mathbf{T: A\times A\to B}$

Homomorfismes

Estructures algebraiques: $(\mathbf{A}, \otimes)$, $(\mathbf{B},\oplus)$,...

Definició: $\mathbf{f:(A, \otimes)\to(B,\oplus)}$ **hom.** $\Leftrightarrow \forall \mathbf{a,b} \in \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{f(a\otimes b)=f(a)\oplus f(b)}$

Tipus d'homomorfismes:

Epimorfisme: ap. exhaust. **Monomorfisme**: ap. injectiva

Isomorfisme: ap. bijectiva

Endomorfisme: A=B **Automorfisme**: A=B i ap. biject.

Propietats:

(I) Estabilitat: $\mathbf{f(A)\subseteq B}$ **estable** $\Leftrightarrow \forall \mathbf{x,y} \in \mathbf{f(A)} \Rightarrow \mathbf{x\oplus y} \in \mathbf{f(A)}$

(II) Associativitat: $\otimes$ **assoc. a A** $\Rightarrow$ $\oplus$ **assoc. a f(A)**

(III) Commutativitat: $\otimes$ **commut. a A´** $\Rightarrow$ $\oplus$ **commut. a f(A)**

(IV) E. neutre: **e neutre de $\otimes$ a A** $\Rightarrow$ **f(e) neutre de $\oplus$ a f(A)**

(V) E. simètric: **a', a sim. a (A,$\otimes$)** $\Rightarrow$ **f(a'), f(a) sim. a (f(A),$\oplus$)**