

ALGEBRA MATRICIAL: MARIUS

Guia didàctica de la Matemàtica universitària

ÀLGEBRA MATRICIAL: MATRIUS

**Joan Bonet, Xavier Bertran
Carles Cassú, J. Carles Ferrer**



Universitat de Girona
Departament d'Economia

Primera edició: novembre de 1994

Amb la col·laboració del Comissionat per a Universitats i Recerca
i del Departament de Cultura de la Generalitat de Catalunya

Edita: Servei de Publicacions de la Universitat de Girona

Assessorament lingüístic: Servei de Normalització Lingüística de la Universitat de Girona

Universitat de Girona

Edifici Les Aligues

Pl. Sant Domènec, 3

17071 Girona

Tel. (972) 41 82 06 - Fax (972) 41 80 31

© Joan Bonet, Xavier Bertran, Carles Cassú, J. Carles Ferrer

ISBN: 84-88762-07-0

Dipòsit legal: GI-1811-94

Carles Cassú és doctor en Ciències i catedràtic d'Escola Universitària de la UdG; Xavier Bertran, Joan Bonet i J.
Carles Ferrer són llicenciats en Ciències Matemàtiques i professors titulars d'Escola Universitària del
Departament d'Economia de la UdG.

Sota les sancions establertes per les lleis, queden rigorosament prohibides, sense l'autorització per escrit dels
titulars del *copyright*, la reproducció total o parcial d'aquesta obra per qualsevol mitjà o procediment –incloent-
hi la reproducció i el tractament informàtic– i la distribució d'exemplars d'aquesta edició mitjançant lloguer o
prestec públics.

PRÒLEG

Oferim als estudiants universitaris i als lectors interessats aquesta guia didàctica de la matemàtica universitària com a fruit dels nostres anys de docència de les matemàtiques a la Universitat. El resultat final ha esdevingut una col·lecció de quinze volums agrupats en els dos mòduls d'Àlgebra Lineal i de Càlcul Infinitesimal.

Per raons de contingut el mòdul d'Àlgebra Lineal s'ha subdividit en les tres parts corresponents d'Àlgebra Moderna (dos volums: Conjunts i Estructures), Àlgebra Matricial (tres volums: Matrius, Determinants i Sistemes d'equacions) i Àlgebra Vectorial (tres volums: Vectors, Endomorfismes i Geometria Analítica), mentre que el mòdul de Càlcul Infinitesimal agrupa les tres parts corresponents a Càlcul Funcional (dos volums: Successions i Funcions), Càlcul Diferencial (tres volums: Derivades, Corbes i Optimització) i Càlcul Integral (dos volums: Integrals i Equacions Diferencials).

Creiem que, en l'estudi de la Matemàtica, l'alumne universitari podrà servir-se d'aquesta guia didàctica tant per a la confecció dels seus propis apunts com en l'estudi dels diferents temes que conformen les assignatures corresponents a les matèries tractades. Per aquest motiu es presenta una breu *Bibliografia escollida* classificada en bàsica i addicional, segons el grau de dificultat que presenta.

Exposem el *Programa* i la *Simbologia*, on indiquem els conceptes que l'integren, conjuntament amb el simbolisme que farem servir al llarg de l'obra. Hem procurat fer un programa racional en què els conceptes es van deduint els uns dels altres de manera lògica.

En cada volum es destaca especialment el contingut en *Conceptes* i *Exemples*, de gran importància per a la comprensió de les matèries tractades, en les quals, sovint, es prescindeix de demostracions formalistes d'acord amb l'esperit de l'obra, que, com el seu títol indica, pretén ser una guia didàctica.

A continuació presentem una *Formulació matemàtica*, expressada en símbols formals dels conceptes estudiats, que ajudaran, sens dubte, a la rigorositat en la resolució de qüestions i problemes.

Seguim el desenvolupament amb la part dedicada a l'estudi de *Problemes resolts*. És important que l'estudiant comprengui fins a l'últim detall aquests problemes, que, en realitat, són una continuïtat en grau de dificultat dels exemples senzills estudiats anteriorment.

Presentem després una col·lecció de Problemes proposats amb la intenció que el lector els resolgui de manera natural mitjançant els coneixements adquirits als apartats anteriors.

A l'apèndix s'inclou una *Prova d'autoavaluació* que consta d'una sèrie de "problemes parametritzats"; és a dir, problemes que depenen d'un paràmetre ($a=1,2,3,4$). Per a cada valor del paràmetre la solució serà diferent i estarà inclosa entre alguna de les vuit possibles. Aquest tipus de problemes es podrà resoldre quatre vegades amb nombres diferents.

Finalment, a més de la *Bibliografia escollida*, un *Glossari* de tots els conceptes matemàtics exposats al llarg de l'obra en facilita la ràpida localització.

Joan Bonet, Xavier Bertran,
Carles Cassà, J. Carles Ferrer
Girona, novembre de 1994

Capítol 1: **Matrïus**

10	a) Bibliografia escollida
11	b) Programa i simbologia
13	c) Conceptes i exemples
34	d) Formulació matemàtica
47	e) Problemes resolts
99	f) Problemes proposats

a) BIBLIOGRAFIA ESCOLLIDA

Básica:

- BURGOS, A. *Iniciación a la Matemática Moderna*. P281/332
- ALEGRE, P. *Ejercicios resueltos de Matemáticas Empresariales I*. P11/15, P17/22 ¡ P46/70.
- SAMAMED, O. *Matemáticas I. Economía y Empresa. Teoría*. P57/73
- LIPSCHUTZ, S. *Álgebra Lineal*. P87/166
- GUTIERREZ GOMEZ, A. *Álgebra Lineal. Tomo (III)*. P149/168, P195/210.
- AYRES, F. *Matrices*. P1/19
- PRIETO, E. *Matemáticas para Economistas. Álgebra Lineal*. P209/252
- CANCELO, J.R. *Problemas de Álgebra Lineal para Economistas. Tomo I*. P153/190
- HERAS, A. *Problemas de Álgebra Lineal para la Economía*. P1/5 ¡ P23/30. (N).

Adicional:

- DOWLING, E.T. *Matemáticas para Economistas*. P181/207.
- THOMAS ARA, L. *Álgebra Lineal*. P156/172.
- VEGAS PEREZ, A. *Elementos de Matemáticas para Economistas. Tomo I*. P29/34.
- YAMANE, T. *Matemáticas para Economistas*. P378/394.
- CASANOVA, J. *Exámenes de Álgebra Lineal*. P17/31.
- BOADAS, J. *Álgebra Moderna a través de los problemas. Tomo II*. P87/157.
- DIÁZ HERNANDO, J. A. *Álgebra, Geometría, Cálculo. Tomo II*. P9/130.
- DIEGO, BRAULIO de. *Problemas de Álgebra y Geometría. Problemas de Álgebra Lineal*. P1/2 ¡ P6/43.

b) PROGRAMA I SIMBLOGIA

1.1 CARACTERISTIQUES DE LES MATRIS.

- 1) **Concepte de matriu:** conjunt indexat (I_m) , ordre, index (i,j) . Aplicació matriu (f_A) , matriu (A, B, C, \dots) , matriu real i complexa, termes (a_{ij}) . Línies d'una matriu: files (f_i) i columnes (c_j) .

- 2) **Ordre d'una matriu:** definició d'ordre $(m \times n)$, matriu equidimensionals, conjunt de les matris $(M_{m \times n})$. Classificació segons l'ordre: matriu rectangular i quadrades, mat-fila i columna.

- 3) **Diagonals en matris quadrades:** diagonal principal (D_p) i secundària (D_s) , traça d'una matriu $(\text{tr}(A))$.

- 4) **Operacions elementals entre línies:** suma algebraica de línies paral·leles, producte d'un número per una línia. Fila nul·la (f_0) i columna nul·la (c_0) .

- 5) **Independència lineal:** combinació lineal entre línies paral·leles $(c.l.)$, matris equivalents $(A \approx B)$. Sistema lligat, files o columnes linealment dependents. Sistema lliure, files o columnes linealment independents.

- 6) **Rang d'una matriu:** definició de rang $(p(A))$. Matriu escalonada. Càlcul del rang d'una matriu: mètode de Gauss, regla del Pivot.

1.2 OPERACIONS AMB MATRIS.

- 1) **Transposició de matris:** transposició, matriu transposada (A') . Propietats.

- 2) **Suma de matris:** igualtat de matris $(A=B)$, termes corresponents. Suma de matris, matriu suma $(A+B)$. Matriu nul·la (O) , mat. oposada $(-A)$. Propietats, grup abelia. Diferència de matris $(A-B)$.

- 3) **Producte d'un número per una matriu:** definició. Escalar. Propietats.

- 4) **Producte de matris:** mat. multiplicables, conformitat, mat. producte $(A \cdot B)$. Producte escalar d'una fila per una columna. Propietats: no commutativitat, premuti-plicació i postmultiplicació, transposició.

- 5) **Producte de matrius quadrades:** matriu unitat (I). Altres propietats, anell no commutatiu amb el unitat. Mat. commutables. Mat. inversa (A^{-1}), mat. regulars i singulars. Matrius divisors de zero.
- 6) **Càlcul de la matriu inversa:** mètode del sistema d'equacions. Mètode de Gauss-Jordan, mat. conjunta (M). Potència d'una matriu (A^n), polinomi matricial ($p(A)$), polinomi anul·lador, mètode del pol. anul·lador.
- 7) **Partició de matrius:** submatriu o caixa, partició de matrius, matriu particionada. Operacions amb mat. particionades: suma, producte per un escalar, producte. Càlcul de la inversa per submatrius.

1.3 TIPUS DE MATRUS QUADRADES.

- 1) **Matrius triangulars:** mat. triangulars superiors i inferiors. Mat. diagonal, mat. escalar.
- 2) **Matrius simètriques:** mat. simètrica (S) i antisimètrica (T), propietats.
- 3) **Matrius de quadrats especials:** matriu involutiva, mat. involutiva d'índex m. Mat. ortogonal. Mat. idempotent, mat. periòdica de període p. Mat. nilpotent, mat. nilpotent d'índex m.
- 4) **Matrius complexes:** matrius complexa, conjugada i real. Matrius hermitica i antihermitica.
- 5) **Matrius equivalents:** mat. equivalents. Matrius de pas (P, Q). Mat. semblants i congruents.
- 6) **Matrius no negatives:** mat. no negativa, mat. positiva. Mat. estocàstica. La matriu de Leontiev (L) i la seva inversa (L^{-1}). Matrius de permutació (Fig).

c) CONCEPTES I EXEMPLES

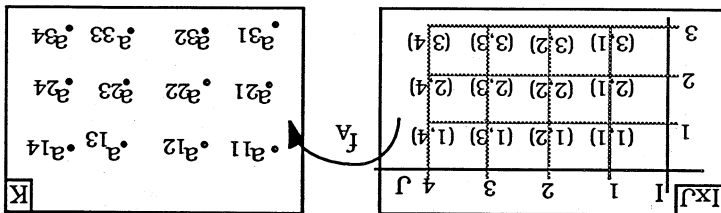
1.1 CARACTERÍSTIQUES DE LES MATRISUS

1.1.1 CONCEPTE DE MATRIU. Anomenem *conjunt índexat d'ordre* m, i el símbolitzem per I_m (o també J_m) el format per tots els nombres naturals inferiors o iguals a m . A cadascun d'aquests números l'anomenem *índex*, que, evidentment, varia d'1 a m .

Exemple 1. Donat $I_8 = \{i \in \mathbb{N} / 1 \leq i \leq 8\}$ observem que $i=1, 2, \dots, 8$, cosa que indica que l'índex varia d'1 a 8, $I_8 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Si donem dos conjunts índexats I_m i J_n i sigui també un cos K . Si formem el conjunt producte $I_m \times J_n$ obtindrem $m \cdot n$ parells ordenats que es podran disposar en forma rectangular. S'anomena *aplicació matriu* una aplicació, $d' I_m \times J_n$ en el cos K de manera que cada parell ordenat (i, j) tingui per imatge un determinat element a_{ij} del cos. Es podrà símbolitzar per f_A , on A és el conjunt imatge en el cos K .

Exemple 2. Si donem els conjunts índexats $I_3 = \{1, 2, 3\}$ i $J_4 = \{1, 2, 3, 4\}$. El seu conjunt producte $I_3 \times J_4$ constarà de $3 \cdot 4 = 12$ parells ordenats.



A cada parell li correspondrà un element del cos K , així el parell $(1, 3)$ tindrà per imatge l'element a_{13} . Notem que la disposició de les imatges en K pot quedar en forma rectangular, similar al $I \times J$, substituint de manera ordenada cada parell per la seva imatge.

Anomenem *matriu* aquest conjunt de números disposats en forma rectangular. Segons quin sigui el cos, R o C , tindrem una *matriu real* o bé una *matriu complexa*. Situarèm les matrises entre parèntesis i les símbolitzarem per les primeres lletres majúscules A, B, C, \dots :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Abreviadament, podrem escriure $A = (a_{ij})$ on i, j són els índexs que ens indiquen els diferents termes de la matriu. És clar que el primer pot ser $i=1, 2, \dots, m$ i el segon $j=1, 2, \dots, n$.

Si un d'aquests índexs roman constant i varïem l'altre per a tots els seus valors, tindrem un conjunt de termes que constituïran una *línia* de la matriu. Si és el primer índex el que roman constant, obtindrem una *fila*, mentre que si és el segon ens quedarà una *columna*.

Observem que en una matriu existeixen m files i n columnes. Les files les simbolitzem per f_i i les columnes per c_j . Així, la primera fila és $f_1 = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n})$, la segona $f_2 = (a_{21} \ a_{22} \ \dots \ a_{2n})$ i l'ensima $f_m = (a_{m1} \ a_{m2} \ \dots \ a_{mn})$. Per a les columnes la disposició és vertical i les columnes primera, segona i ensima són:

$$c_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, c_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Per facilitar la notació de les columnes posem $c_1 = (a_{11} \ a_{21} \ \dots \ a_{m1})$; $c_2 = (a_{12} \ a_{22} \ \dots \ a_{m2})$ i $c_n = (a_{1n} \ a_{2n} \ \dots \ a_{mn})$, on la prima ens indica que es tracta d'una columna.

Per tant, la matriu A podrà considerar-se o bé com un conjunt de m files, $A = (f_1 \ f_2 \ \dots \ f_m)$, on aquesta disposició ha de veure's com vertical, o bé com un conjunt de n columnes, $A = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n)$.

Exemple 3. Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & -5 & 8 & -3 \\ 7 & 6 & -9 & -2 \end{pmatrix}$$

veïem que té per files $f_1 = (3 \ 2 \ 0 \ -4)$, $f_2 = (1 \ -5 \ 8 \ -3)$ i $f_3 = (7 \ 6 \ -9 \ -2)$. Les columnes, escrites horitzontalment seran $c_1 = (3 \ 1 \ 7)$, $c_2 = (2 \ -5 \ 6)$, $c_3 = (0 \ 8 \ -9)$ i $c_4 = (-4 \ -3 \ -2)$. Observem que $a_{11} = 3$, $a_{23} = 8$, $a_{34} = -2$, etc.

1.1.2 ORDRE D'UNA MATRIU. S'entén per *ordre* d'una matriu A el nombre de les m files i n columnes de què consta. Escriurem $\text{ord}(A) = m \times n$. Dues matrius que tinguin el mateix ordre es diran *matrius equidimensionals*, $\text{ord}(A) = \text{ord}(B)$, i les dues pertanyeran al conjunt de les matrius d'ordre $m \times n$, simbolitzat per $M_{m \times n}$.

Exemple 4 Per a la matriu anterior A i les matrius

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 3 \\ 2 & 8 & 7 & -6 \\ 3 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ i } C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

observem que A i B són matrius equidimensionals (ambdues són del mateix ordre: tenen 3 files i 4 columnes). Posarem $A, B \in M_{3 \times 4}$. En canvi, $C \in M_{3 \times 2}$ i no serà equidimensional ni amb A ni amb B.

Segons el seu ordre podem fer una *classificació de matrius*: en general les matrius seran *matrius rectangulars*, però si el nombre m de files és igual al n de columnes direm que es tracta d'una *matriu quadrada*, ja que tindrà forma de quadrat.

El conjunt de matrius quadrades de n files i n columnes, és a dir, de les matrius amb $\text{ord}(A)=n \times n$ (també, i com a simplificació, escrivem $\text{ord}(A)=n$) el simbolitzarem per M_n .

Si una matriu consta d'una sola fila, diem que es tracta d'una *matriu fila* i, si consta d'una sola columna, l'anomenem *matriu columna*. Encara més, una matriu d'una sola fila i una sola columna no és res més que un número i així un número pot considerar-se com un cas particular de matriu.

Exemple 5. Les matrius A , B i C anteriors són clarament matrius rectangulars. En canvi, les noves matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 8 & 4 \\ 6 & 9 & -7 \end{pmatrix}, B = (2 \ 5 \ 9 \ -8) \text{ i } C = \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \end{pmatrix}$$

són, respectivament, una matriu quadrada, una matriu fila i una matriu columna, que també es pot representar per $C=(-3 \ 12)'$.

1.1.3 DIAGONALS EN MATRICES CUADRADAS. Si A és una matriu

cuadrada (d'ordre n), la *diagonal principal* està formada per tots els elements que tenen el mateix índex de fila i de columna. Geomètricament, és la diagonal del quadrat que va des del primer terme a_{11} fins a l'últim a_{nn} . Escrivem $D_p=(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$, on separarem els termes per com es tracta de cap

l'altre diagonal d'una matriu quadrada és la *diagonal secundària*. Observem que la suma dels índexs de cada terme de la diagonal secundària és sempre igual a $n+1$. Escrivem $D_s=(a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1})$. Veiem-ho per una matriu quadrada d'ordre 4, on es pot comprovar la disposició geomètrica de les diagonals principal i secundària:

$$D_p = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & & & \\ & \boxed{a_{22}} & & \\ & & \boxed{a_{33}} & \\ & & & \boxed{a_{44}} \end{pmatrix} \quad \text{ i } \quad D_s = \begin{pmatrix} & & & \boxed{a_{41}} \\ & & \boxed{a_{32}} & \\ & \boxed{a_{23}} & & \\ \boxed{a_{14}} & & & \end{pmatrix}$$

Un concepte important és el de *traca d'una matriu*, simbolitzada per $\tau(A)$, que ve donada per la imatge de l'aplicació $\tau: A \rightarrow R$, tal que a cada matriu quadrada A li fa correspondre la suma dels termes de la seva diagonal principal. Així la traca serà $\tau(A)=a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn}$.

Exemple 6. Si A és la matriu quadrada de l'exemple anterior, tenim com a diagonal principal $D_p=(1, 8, -7)$ i com a diagonal secundària $D_s=(5, 8, 6)$. La traca de la matriu és $\tau(A)=1+8+(-7)=2$.

1.1.4 OPERACIONES ELEMENTALES ENTRE LINEAS. Partim d'una matriu A d'ordre $m \times n$, és a dir, formada per m files i n columnes. Considerem dues files o columnes paral·leles.

La suma algebraica de línies paral·leles es realitza sumant o restant els termes correlatius de cada línia. Així, en una matriu $A(5 \times 6)$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \end{pmatrix}$$

donades per exemple les files $f_3=(a_{31} \ a_{32} \ \dots \ a_{36})$ i $f_4=(a_{41} \ a_{42} \ \dots \ a_{46})$, la seva suma algebraica serà

$$f_3 + f_4 = (a_{31} + a_{41} \ a_{32} + a_{42} \ \dots \ a_{36} + a_{46})$$

El mateix passarà amb les columnes. Si $c_3=(a_{13} \ a_{23} \ \dots \ a_{53})$ i $c_5=(a_{15} \ a_{25} \ \dots \ a_{55})$ són dues columnes de $A(5 \times 6)$, la seva suma algebraica vindrà donada per

$$c_3 + c_5 = (a_{13} + a_{15} \ a_{23} + a_{25} \ \dots \ a_{53} + a_{55})$$

Efectuar el producte d'un número per una línia consisteix a realitzar el producte d'aquest número per tots els termes de la línia.

Si, per exemple, es tracta del número real α i de la línia f_3 , a la matriu anterior $A(5 \times 6)$, tindrem

$$\alpha \cdot f_3 = (\alpha \cdot a_{31} \ \alpha \cdot a_{32} \ \dots \ \alpha \cdot a_{36})$$

En canvi, per a la columna c_5 tindrem

$$\alpha \cdot c_5 = (\alpha \cdot a_{15} \ \alpha \cdot a_{25} \ \dots \ \alpha \cdot a_{55})$$

En el cas particular $\alpha=0$, obtindrem evidentment la línia nul·la i la columna nul·la, que designarem respectivament per

$$f_0 = (0 \ 0 \ \dots \ 0) \quad i \quad c_0 = (0 \ 0 \ \dots \ 0)$$

Exemple 7. Donada la matriu A d'ordre 3×4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 8 \\ 2 & 7 & -4 & 3 \\ -6 & 0 & 7 & -9 \end{pmatrix}$$

comprova mentalment que $f_1 + f_2 = (3 \ 4 \ 1 \ 11)$, $f_2 - f_3 = (8 \ 7 \ -11 \ 12)$, $c_1 + c_3 = (6 \ -2 \ 1)$ i $c_2 - c_4 = (-11 \ 4 \ 9)$.

També, si $\alpha=6$ tindrem $6 \cdot f_2 = (12 \ 42 \ -24 \ 18)$ i $6 \cdot c_3 = (30 \ -24 \ 42)$.

1.1.5 INDEPENDÈNCIA LINEAL. Donades dues o més línies paral·leles, una combinació lineal entre elles és la realització conjunta de les dues operacions elementals anteriors; és a dir, multiplicar les línies per números i després sumar-les.

Exemple 8. A la matriu A anterior, una combinació lineal entre files i una altra entre columnes, són, per exemple

$$3 \cdot f_2 + (-4) \cdot f_3 = (6 \ 21 \ -12 \ 9) + (24 \ 0 \ -28 \ 36) = (30 \ 21 \ -40 \ 45)$$

$$5 \cdot c_1 + 2 \cdot c_4 = (5 \ 10 \ -30) + (16 \ 6 \ -18) = (21 \ 16 \ -48)$$

Sigui ara una matriu $A(m \times n)$ on dues de les seves files són f_1 i f_j .
 Direm que la fila f_k és *combinació lineal* de les f_1 i f_j , i escriurem
 $f_k = c_1 \cdot f_1 + f_j$, si es poden trobar dos números reals α i β de manera
 que multiplicant-los per les files respectives i sumant-ne els
 resultats, s'obté la fila f_k . És a dir, si $f_k = \alpha \cdot f_1 + \beta \cdot f_j$.
 El mateix podem dir pel que fa a les columnes. La columna c_k és
 combinació lineal de les c_1 i c_j , i escriurem $c_k = c_1 \cdot c_1 + c_j$, si
 existeixen dos números reals α i β de manera que $c_k = \alpha \cdot c_1 + \beta \cdot c_j$.

Exemple 9. Suposem la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 8 & 2 & -7 \\ 5 & 4 & -6 & 7 \end{pmatrix}$$

Observem que l'última fila és combinació lineal de les dues
 primeres, $f_3 = c_1 \cdot f_1 + f_2$, perquè $f_3 = 4 \cdot f_1 + (-1) \cdot f_2$, és a dir,
 multiplicant la 1ª per 4, la 2ª per (-1) i sumant-les s'obté la 3ª fila.
 Pel que fa a les columnes, també veiem que l'última columna és
 combinació lineal de les tres primeres, $c_4 = c_1 \cdot c_1 + c_2 + c_3$, que en
 aquest cas és $c_4 = c_1 - c_2 - c_3$. També es poden comprovar les dues
 combinacions lineals següents $c_3 = (-2) \cdot c_1 + c_2$ i $c_4 = 3 \cdot c_1 + (-2) \cdot c_2$.

Sigui A i B dues matrius equidimensionals. Diem que A i B són
matrius equivalents, i escrivim $A=B$, si les línies de B es poden
 obtenir com a combinació lineal de les línies de A , és a dir, si es pot
 passar d'una a l'altra mitjançant operacions elementals.

Exemple 10. La matriu anterior A és equivalent a les matrius

$$B_1 = \begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 & 0 \\ 6 & 16 & 4 & -14 \\ 5 & 4 & -6 & 7 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & -14 \\ 5 & 4 & -6 & 7 \end{pmatrix} \text{ i } B_3 = \begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 5 & 4 & -6 & 7 \end{pmatrix}$$

ja que a la primera B_1 hi ha les noves files $g_1 = 3 \cdot f_1$ i $g_2 = 2 \cdot f_2$, an la
 segona B_2 s'han restat aquestes dues, la nova fila ha quedat $h_2 = g_1 -$
 g_2 i en l'última matriu B_3 la segona fila és $1/7$ de h_2 .

També es poden fer operacions elementals entre les seves
 columnes. Per exemple si prenem la nova columna donada per $d_4 =$
 $c_1 + c_2 + c_3 + c_4$ ens resulta la columna nul·la.

Donat un conjunt de files $S = \{f_1, f_2, \dots, f_i, \dots, f_j, \dots, f_s\}$ direm que formen
 un *sistema lligat* i que les files són *linealment dependents* si una
 d'elles es pot posar com a combinació lineal de les altres. Així, es pot
 tenir $f_i = c_1 \cdot f_1 + f_j + \dots + f_s$, anomenada *equació de lligadura*.

En canvi, si al conjunt S de files cap d'elles no es pot posar com a
 combinació lineal de la resta, diem que S és un *sistema lliure* i que
 les files són *linealment independents*. Es pot provar que en un
 sistema lliure l'única manera d'obtenir la fila nul·la és multiplicar
 totes les files per 0 i sumar-les. Conseqüentment, per demostrar que
 un conjunt de files és un sistema lliure podem provar que

$$\alpha \cdot f_1 + \beta \cdot f_2 + \dots + \lambda \cdot f_i + \dots + \sigma \cdot f_s = f_0 \Leftrightarrow \alpha = 0, \beta = 0, \dots, \lambda = 0, \dots, \sigma = 0$$