ÀLGEBRA MATRICIAL: MATRIUS

Guia didàctica de la Matemàtica universitària

ÀLGEBRA MATRICIAL: MATRIUS

Joan Bonet, Xavier Bertran
Carles Cassú, J. Carles Ferrer

Universitat de Girona
Departament d'Economia

Primera edició: novembre de 1994

Amb la col·laboració del Comissionat per a Universitats i Recerca i del Departament de Cultura de la Generalitat de Catalunya

Edita: Servei de Publicacions de la Universitat de Girona

Assessorament lingüístic: Servei de Normalització Lingüística de la Universitat de Girona

Universitat de Girona
Edifici Les Àligues
Pl. Sant Domènec, 3
17071 Girona
Tel. (972) 41 82 06 - Fax (972) 41 80 31

ISBN: 84-88762-07-0

Dipòsit legal: GI-1811-94

Carles Cassú és doctor en Ciències i catedràtic d'Escola Universitària de la UdG; Xavier Bertran, Joan Bonet i J. Carles Ferrersón llicenciats en Ciències Matemàtiques i professors titulars d'Escola Universitària del Departament d'Economia de la UdG.

PRÒLEG

Oferim als estudiants universitaris i als lectors interessats aquesta guia didàctica de la matemàtica universitària com a fruit dels nostres anys de docència de les matemàtiques a la Universitat. El resultat final ha esdevingut una col.lecció de quinze petits volums agrupats en els dos móduls d'Àlgebra Lineal i de Càlcul Infinitesimal.

Per raons de contingut el mòdul d'Àlgebra Lineal s'ha subdividit en les tres parts corresponents d'Àlgebra Moderna (dos volums: Conjunts i Estructures), Àlgebra Matricial (tres volums: Matrius, Determinants i Sistemes d'equacions) i Àlgebra Vectorial (tres volums: Vectors, Endomorfismes i Geometria Analítica), mentre que el mòdul de Càlcul Infinitesimal agrupa les tres parts corresponents a Càlcul Funcional (dos volums: Successions i Funcions), Càlcul Diferencial (tres volums: Derivades, Corbes i Optimització) i Càlcul Integral (dos volums: Integrals i Equacions Diferencials).

Creiem que, en l'estudi de la Matemàtica, l'alumne universitari podrà servir-se d'aquesta guia didàctica tant per a la confecció dels seus propis apunts com en l'estudi dels diferents temes que conformen les assignatures corresponents a les matèries tractades. Per aquest motiu es presenta una breu *Bibliografia escollida* classificada en bàsica i addicional, segons el grau de dificultat que presenta.

Exposem el *Programa* i la *Simbologia*, on indiquem els conceptes que l'integren, conjuntament amb el simbolisme que farem servir al llarg de l'obra. Hem procurat fer un programa racional en què els conceptes es van deduint els uns dels altres de manera lògica.

En cada volum es destaca especialment el contingut en *Conceptes* i *Exemples*, de gran importància per a la comprensió de les matèries tractades, en les quals, sovint, es prescindeix de demostracions formalistes d'acord amb l'esperit de l'obra, que, com el seu títol indica, pretén ser una guia didàctica.

A continuació presentem una *Formulació matemàtica*, expressada en símbols formals dels conceptes estudiats, que ajudaran, sens dubte, a la rigorositat en la resolució de qüestions i problemes.

Seguim el desenvolupament amb la part dedicada a l'estudi de *Problemes resolts*. És important que l'estudiant comprengui fins a l'últim detall aquests problemes, que, en realitat, són una continuïtat en grau de dificultat dels exemples senzills estudiats anteriorment.

Presentem després una col.lecció de Problemes proposats amb la intenció que el lector els resolgui de manera natural mitjançant els coneixements adquirits als apartats anteriors.

A l'apèndix s'inclou una *Prova d'autoavaluació* que consta d'una sèrie de "problemes parametritzats"; és a dir, problemes que depenen d'un paràmetre (a=1,2,3,4). Per a cada valor del paràmetre la solució serà diferent i estarà inclosa entre alguna de les vuit possibles. Aquest tipus de problemes es podrà resoldre quatre vegades amb números diferents.

Finalment, a més de la *Bibliografia escollida*, un *Glossari* de tots els conceptes matemàtics exposats al llarg de l'obra en facilita la ràpida localització.

Joan Bonet, Xavier Bertran,
Carles Cassú, J. Carles Ferrer
Girona, novembre de 1994

Capítol 1: **Matrius**

a) BIBLIOGRAFIA ESCOLLIDA

Bàsica:

BURGOS, A. *Iniciación a la Matemática Moderna.* P281/332

ALEGRE, P. *Ejercicios resueltos de Matemáticas Empresariales 1.* P11/15, P17/22 i P46/70.

SAMAMED, O. *Matemáticas 1. Economía y Empresa. Teoria.* P57/73

LIPSCHUTZ, S. *Algebra Lineal.* P87/166

GUTIERREZ GOMEZ, A. *Algebra Lineal. Tomo (II).* P149/168, P195/210.

AYRES, F. *Matrices.* P1/19

PRIETO, E. *Matemáticas para Economistas. Algebra Lineal.* P209/252

CANCELO, J.R. *Problemas de Algebra Lineal para Economistas. Tomo I.* P153/190

HERAS, A. *Problemas de Algebra Lineal para la Economía.* P1/5 i P23/30. (N).

Addicional:

DOWLING, E.T. *Matemáticas para Economistas.* P181/207.

THOMAS ARA, L. *Algebra Lineal.* P156/172.

VEGAS PEREZ, A. *Elementos de Matemáticas para Economistas. Tomo 1.* P29/34.

YAMANE, T. *Matemáticas para Economistas.* P378/394.

CASANOVA, J. *Examenes de Algebra Lineal.* P17/31.

BOADAS, J. *Algebra Moderna a través de los problemas. Tomo II.* P87/157.

DIAZ HERNANDO, J. A. *Algebra, Geometría, Cálculo. Tomo II.* P9/130.

DIEGO, BRAULIO de. *Problemas de Algebra y Geometria. Problemas de Algebra Lineal.* P1/2 i P6/43.

b) PROGRAMA I SIMBOLOGIA

1.1 CARACTERÍSTIQUES DE LES MATRIUS.

1) **Concepte de matriu:** conjunt indexat (I_m), ordre, índex (i,j). Aplicació matriu (f_A), matriu (A,B,C,...), matrius real i complexa, termes (a_{ij}). Línies d'una matriu: files (f_i) i columnes (c_j).
2) **Ordre d'una matriu:** definició d'ordre (m×n), matrius equidimensionals, conjunt de les matrius ($M_{m \times n}$). Classificació segons l'ordre: matriu rectangular i quadrades, mat.-fila i columna.
3) **Diagonals en matrius quadrades:** diagonal principal (D_p) i secundària (D_s), traça d'una matriu ($\tau(A)$).
4) **Operacions elementals entre línies:** suma algebraica de línies paral·leles, producte d'un número per una línia. Fila nul·la (f_0) i columna nul·la (c_0).
5) **Independència lineal:** combinació lineal entre línies paral.leles (c.l.), matrius equivalents (A≡B). Sistema lligat, files o columnes linealment dependents. Sistema lliure, files o columnes linealment independents.
6) **Rang d'una matriu:** definició de rang ($\rho(A)$). Matriu escalonada. Càlcul del rang d'una matriu: mètode de Gauss, regla del Pivot.

1.2 OPERACIONS AMB MATRIUS.

1) **Transposició de matrius:** transposició, matriu transposada (A'). Propietats.
2) **Suma de matrius:** igualtat de matrius (A=B), termes corresponents. Suma de matrius, matriu suma (A+B). Matriu nul·la (O), mat. oposada (-A). Propietats, grup abelià. Diferència de matrius (A-B).
3) **Producte d'un número per una matriu:** definició. Escalar. Propietats.
4) **Producte de matrius:** mat. multiplicables, conformitat, mat. producte (A•B). Producte escalar d'una fila per una columna. Propietats: no commutativitat, premultiplicació i postmultiplicació, transposició.

5) **Producte de matrius quadrades:** matriu unitat (I). Altres propietats, anell no commutatiu amb el. unitat. Mat. commutables. Mat. inversa (A^{-1}), mat. regulars i singulars. Matrius divisors de zero.
6) **Càlcul de la matriu inversa:** mètode del sistema d'equacions. Mètode de Gauss-Jordan, mat. conjunta (M). Potència d'una matriu (A^n), polinomi matricial (p(A)), polinomi anul·lador, mètode del pol. anul·lador.
7) **Partició de matrius:** submatriu o caixa, partició de matrius, matriu particionada. Operacions amb mat. particionades: suma, producte per un escalar, producte. Càlcul de la inversa per submatrius.

1.3 TIPUS DE MATRIUS QUADRADES.

1) **Matrius triangulars:** mat. triangulars superiors i inferiors. Mat. diagonal, mat. escalar.
2) **Matrius simètriques:** mat. simètrica (S) i antisimètrica (T), propietats.
3) **Matrius de quadrats especials:** matriu involutiva, mat. involutiva d'índex m. Mat. ortogonal. Mat. idempotent, mat. periòdica de període p. Mat. nilpotent, mat. nilpotent d'índex m.
4) **Matrius complexes:** matrius complexa, conjugada i real. Matrius hermítica i antihermítica.
5) **Matrius equivalents:** mat. equivalents. Matrius de pas (P, Q). Mat. semblants i congruents.
6) **Matrius no negatives:** mat. no negativa, mat. positiva. Mat. estocàstica. La matriu de Leontiev (L) i la seva inversa (L^{-1}). Matrius de permutació (P_{ijk}).

c) CONCEPTES I EXEMPLES

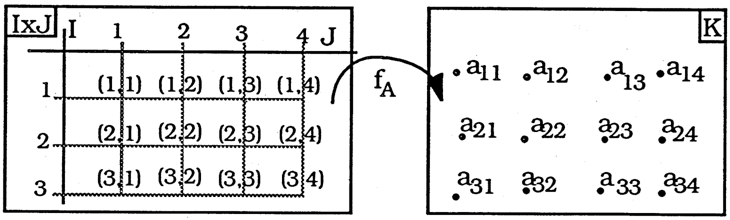
1.1 CARACTERÍSTIQUES DE LES MATRIUS

1.1.1 CONCEPTE DE MATRIU. Anomenem *conjunt indexat* d'*ordre* m, i el simbolitzem per I_m (o també J_m) el format per tots els nombres naturals inferiors o iguals a m. A cadascun d'aquests números l'anomenem *índex*, que, evidentment, varia d'1 a m.

Exemple 1. Donat $I_8=\{i\in N \ / \ 1\leq i\leq 8\}$ observem que i=1,2,...,8, cosa que indica que l'índex varia d'1 a 8, $I_8=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Siguin dos conjunts indexats I_m i J_n i sigui també un cos K. Si formem el conjunt producte $I_m{\times}J_n$ obtindrem m·n parells ordenats que es podran disposar en forma rectangular. S'anomena *aplicació matriu* una aplicació d'$I_m{\times}J_n$ en el cos K de manera que cada parell ordenat (i,j) tingui per imatge un determinat element a_{ij} del cos. Es podrà simbolitzar per f_A, on A és el conjunt imatge en el cos K.

Exemple 2. Siguin els conjunts indexats $I_3=\{1,2,3\}$ i $J_4=\{1,2,3,4\}$. El seu conjunt producte $I_3{\times}I_4$ constarà de 3.4=12 parells ordenats.



A cada parell li correspondrà un element del cos K, així el parell (1,3) tindrà per imatge l'element a_{13}. Notem que la disposició de les imatges en K pot quedar en forma rectangular, similar al I×J, substituint de manera ordenada cada parell per la seva imatge.

Anomenem *matriu* aquest conjunt de números disposats en forma rectangular. Segons quin sigui el cos, R o C, tindrem una *matriu real* o bé una *matriu complexa*. Situarem les matrius entre parèntesis i les simbolitzarem per les primeres lletres majúscules A, B, C,...:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Abreujadament, podrem escriure $A=(a_{ij})$ on i,j són els índexs que ens indiquen els diferents *termes* de la matriu. És clar que el primer pot ser i=1,2,...,m i el segon j=1,2,...,n.

Si un d'aquests índexs roman constant i variem l'altre per a tots els seus valors, tindrem un conjunt de termes que constituiran una *línia* de la matriu. Si és el primer índex el que roman constant, obtindrem una *fila*, mentre que si és el segon ens quedarà una *columna*.

Observem que en una matriu existeixen m files i n columnes. Les files les simbolitzem per $\mathbf{f}_i$ i les columnes per $\mathbf{c}_j$. Així, la primera fila és $\mathbf{f}_1=(a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n})$, la segona $\mathbf{f}_2=(a_{21}\ a_{22}\ \dots\ a_{2n})$ i l'emèsima $\mathbf{f}_m=(a_{m1}\ a_{m2}\ \dots\ a_{mn})$. Per a les columnes la disposició és vertical i les columnes primera, segona i enèsima són:

$$\mathbf{c}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\ \mathbf{c}_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\ \dots,\ \mathbf{c}_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Per facilitar la notació de les columnes posem $\mathbf{c}_1=(a_{11}\ a_{21}\ \dots\ a_{m1})'$, $\mathbf{c}_2=(a_{12}\ a_{22}\ \dots\ a_{m2})'$ i $\mathbf{c}_n=(a_{1n}\ a_{2n}\ \dots\ a_{mn})'$, on la prima ens indica que es tracta d'una columna.

Per tant, la matriu A podrà considerar-se o bé com un conjunt de m files, $A=(\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2\ \dots\ \mathbf{f}_m)'$, on aquesta disposició ha de veure's com vertical, o bé com un conjunt de n columnes, $A=(\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2\ \dots\ \mathbf{c}_n)$.

Exemple 3. Donada la matriu

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & -5 & 8 & -3 \\ 7 & 6 & -9 & -2 \end{pmatrix}$$

veiem que té per files $\mathbf{f}_1=(3\ 2\ 0\ -4)$, $\mathbf{f}_2=(1\ -5\ 8\ -3)$ i $\mathbf{f}_3=(7\ 6\ -9\ -2)$. Les columnes, escrites horitzontalment seran $\mathbf{c}_1=(3\ 1\ 7)'$, $\mathbf{c}_2=(2\ -5\ 6)'$, $\mathbf{c}_3=(0\ 8\ -9)'$ i $\mathbf{c}_4=(-4\ -3\ -2)'$. Observem que $a_{11}=3$, $a_{23}=8$, $a_{34}=-2$, etc.

1.1.2 ORDRE D'UNA MATRIU. S'entén per *ordre* d'una matriu A el nombre de les m files i n columnes de què consta. Escriurem $\mathrm{ord}(A)=m\times n$. Dues matrius que tinguin el mateix ordre es diran *matrius equidimensionals*, ord(A)=ord(B), i les dues pertanyeran al *conjunt de les matrius* d'ordre m×n, simbolitzat per $M_{m\times n}$.

Exemple 4 Per a la matriu anterior A i les matrius

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 3 \\ 2 & 8 & 7 & -6 \\ 3 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ i } C=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

observem que A i B són matrius equidimensionals (amdues són del mateix ordre: tenen 3 files i 4 columnes). Posarem $A,B\in M_{3\times 4}$. En canvi, $C\in M_{3\times 2}$ i no serà equidimensional ni amb A ni amb B.

Segons el seu ordre podrem fer una *classificació de matrius*:: en general les matrius seran *matrius rectangulars*, però si el nombre m de files és igual al n de columnes direm que es tracta d'una *matriu quadrada*, ja que tindrà forma de quadrat.

El conjunt de matrius quadrades de n files i n columnes, és a dir, de les matrius amb ord(A)=n×n (també, i com a simplificació, escriurem ord(A)=n) el simbolitzarem per M_n.

Si una matriu consta d'una sola fila, diem que es tracta d'una *matriu fila* i, si consta d'una sola columna, l'anomenem *matriu columna*. Encara més, una matriu d'una sola fila i una sola columna no és res més que un número i així un número pot considerar-se com un cas particular de matriu.

Exemple 5. Les matrius A, B i C anteriors són clarament matrius rectangulars. En canvi, les noves matrius

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 8 & 4 \\ 6 & 9 & -7 \end{pmatrix},\ B=(2\ -5\ 9\ -8)\ \text{ i }\ C=\begin{pmatrix} -3 \\ 12 \end{pmatrix}$$

són, respectivament, una matriu quadrada, una matriu fila i una matriu columna, que també es pot representar per C=(-3 12)'.

1.1.3 DIAGONALS EN MATRIUS QUADRADES. Si A és una matriu quadrada (d'ordre n),.la *diagonal principal* està formada per tots els elements que tenen el mateix índex de fila i de columna. Geomètricament, és la diagonal del quadrat que va des del primer terme a_{11} fins a l'ultim a_{nn}. Escriurem $D_p=(a_{11}, a_{22},\ldots, a_{nn})$, on separem els termes per comes per indicar que no es tracta de cap línia (fila o columna) de la matriu.

L'altra diagonal d'una matriu quadrada és la *diagonal secundària*, Observem que la suma dels índexs de cada terme de la diagonal secundària és sempre igual a n+1. Escriurem $D_s=(a_{1n}, a_{2,n-1},\ldots, a_{n1})$. Veiem-ho per una matriu quadrada d'ordre 4, on es pot comprovar la disposició geomètrica de les diagonals principal i secundària:

$$D_p=\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \boxed{a_{44}} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad D_s=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \boxed{a_{14}} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} & a_{24} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & a_{33} & a_{34} \\ \boxed{a_{41}} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Un concepte important és el de *traça d'una matriu*, simbolitzada per τ(A), que ve donada per la imatge de l'aplicació τ: A→R, tal que a cada matriu quadrada A li fa correspondre la suma dels termes de la seva diagonal principal. Així la traça serà $\tau(A)=a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}$.

Exemple 6. Si A és la matriu quadrada de l'exemple anterior, tenim com a diagonal principal $D_p=(1, 8, -7)$ i com a diagonal secundària $D_s=(5, 8, 6)$. La traça de la matriu és τ(A)=1+8+(-7)=2.

1.1.4 OPERACIONS ELEMENTALS ENTRE LÍNIES. Partim d'una matriu A d'ordre m×n, és a dir, formada per m files i n columnes. Considerem dues files o columnes paral·leles.

La *suma algebraica de línies paral·leles* es realitza sumant o restant els termes correlatius de cada línia. Així, en una matriu A(5×6),

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} & a_{14} & \boxed{a_{15}} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} & a_{24} & \boxed{a_{25}} & a_{26} \\ \boxed{a_{31}} & \boxed{a_{32}} & \boxed{a_{33}} & \boxed{a_{34}} & \boxed{a_{35}} & \boxed{a_{36}} \\ \boxed{a_{41}} & \boxed{a_{42}} & \boxed{a_{43}} & \boxed{a_{44}} & \boxed{a_{45}} & \boxed{a_{46}} \\ a_{51} & a_{52} & \boxed{a_{53}} & a_{54} & \boxed{a_{55}} & a_{56} \end{pmatrix}$$

donades per exemple les files $\mathbf{f}_3=(a_{31}\ \ a_{32} \ldots a_{36})$ i $\mathbf{f}_4=(a_{41}\ \ a_{42} \ldots a_{46})$, la seva suma algebraica serà

$$\mathbf{f}_3 \pm \mathbf{f}_4=(a_{31}\pm a_{41}\ \ a_{32}\pm a_{42} \ldots a_{36}\pm a_{46})$$

El mateix passarà amb les columnes. Si $\mathbf{c}_3=(a_{13}\ \ a_{23} \ldots a_{53})'$ i $\mathbf{c}_5=(a_{15}\ \ a_{25} \ldots a_{55})'$ són dues columnes de A(5×6), la seva suma algebraica vindrà donada per

$$\mathbf{c}_3 \pm \mathbf{c}_5=(a_{13}\pm a_{15}\ \ a_{23}\pm a_{25} \ldots a_{53}\pm a_{55})'$$

Efecturar el *producte d'un número per una línia* consisteix a realitzar el producte d'aquest número per tots els termes de la línia.

Si, per exemple, es tracta del número real α i de la fila $\mathbf{f}_3$, a la matriu anterior A(5×6), tindrem

$$\alpha.\mathbf{f}_3=(\alpha.a_{31}\ \ \alpha.a_{32} \ldots \alpha.a_{36})$$

En canvi, per a la columna $\mathbf{c}_5$ tindrem

$$\alpha.\mathbf{c}_5=(\alpha.a_{15}\ \ \alpha.a_{25} \ldots \alpha.a_{55})'$$

En el cas particular $\alpha=0$, obtindrem evidentment la *fila nul·la* i la *columna nul·la*, que designarem respectivament per

$$\mathbf{f}_0=(0\ \ 0 \ldots 0) \quad \text{i} \quad \mathbf{c}_0=(0\ \ 0 \ldots 0)'$$

Exemple 7. Donada la matriu A d'ordre 3×4

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 8 \\ 2 & 7 & -4 & 3 \\ -6 & 0 & 7 & -9 \end{pmatrix}$$

comprova mentalment que $\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_2=(3\ \ 4\ \ 1\ \ 11)$, $\mathbf{f}_2-\mathbf{f}_3=(8\ \ 7\ \ -11\ \ 12)$, $\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_3=(6\ \ -2\ \ 1)'$ i $\mathbf{c}_2-\mathbf{c}_4=(-11\ \ 4\ \ 9)'$.

També, si $\alpha=6$ tindrem $6.\mathbf{f}_2=(12\ \ 42\ \ -24\ \ 18)$ i $6.\mathbf{c}_3=(30\ \ -24\ \ 42)'$.

1.1.5 INDEPENDÈNCIA LINEAL. Donades dues o més línies paral·leles, una *combinació lineal* entre elles és la realització conjunta de les dues operacions elementals anteriors; és a dir, multiplicar les línies per números i després sumar-les.

Exemple 8 . A la matriu A anterior, una combinació lineal entre files i una altra entre columnes, són, per exemple

$$3.\mathbf{f}_2+(-4).\mathbf{f}_3=(6\ \ 21\ \ -12\ \ 9)+(24\ \ 0\ \ -28\ \ 36)=(30\ \ 21\ \ -40\ \ 45)$$

$$5.\mathbf{c}_1+2.\mathbf{c}_4=(5\ \ 10\ \ -30)'+(16\ \ 6\ \ -18)'=(21\ \ 16\ \ -48)'.$$

Sigui ara una matriu A(m×n) on dues de les seves files són $\mathbf{f}_i$ i $\mathbf{f}_j$. Direm que la *fila* $\mathbf{f}_k$ és *combinació lineal* de les $\mathbf{f}_i$ i $\mathbf{f}_j$, i escriurem $\mathbf{f}_k$=c.l.($\mathbf{f}_i$, $\mathbf{f}_j$), si es poden trobar dos números reals α i β de manera que multiplicant-los per les files respectives i sumant-ne els resultats, s'obté la fila $\mathbf{f}_k$. És a dir, si $\mathbf{f}_k=\alpha.\mathbf{f}_i+\beta.\mathbf{f}_j$.

El mateix podem dir pel que fa a les columnes. La columna $\mathbf{c}_k$ és combinació lineal de les $\mathbf{c}_i$ i $\mathbf{c}_j$, i escriurem $\mathbf{c}_k$=c.l.($\mathbf{c}_i$, $\mathbf{c}_j$), si existeixen dos números reals α i β de manera que $\mathbf{c}_k=\alpha.\mathbf{c}_i+\beta.\mathbf{c}_j$.

Exemple 9. Suposem la matriu

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 8 & 2 & -7 \\ 5 & 4 & -6 & 7 \end{pmatrix}$$

Observem que l'última fila és combinació lineal de les dues primeres, $\mathbf{f}_3$=c.l.($\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$), perquè $f_3=4.f_1+(-1).f_2$, és a dir, multiplicant la 1ª per 4, la 2ª per (-1) i sumant-les s'obté la 3ª fila.

Pel que fa a les columnes, també veiem que l'última columna és combinació lineal de les tres primeres, $\mathbf{c}_4$=c.l.($\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_3$), que en aquest cas és $\mathbf{c}_4=\mathbf{c}_1-\mathbf{c}_2-\mathbf{c}_3$. També es poden comprovar les dues combinacions lineals següents $\mathbf{c}_3=(-2).\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2$ i $\mathbf{c}_4=3.\mathbf{c}_1+(-2).\mathbf{c}_2$.

Siguin A i B dues matrius equidimensionals. Diem que A i B són *matrius equivalents*, i escrivim A≡B, si les línies de B es poden obtenir com a combinació lineals de les línies de A, és a dir, si es pot passar d'una a l'altra mitjançant operacions elementals.

Exemple 10. La matriu anterior A és equivalent a les matrius

$$B_1=\begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 & 0 \\ 6 & 16 & 4 & -14 \\ 5 & 4 & -6 & 7 \end{pmatrix},\ B_2=\begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & -14 \\ 5 & 4 & -6 & 7 \end{pmatrix} \text{ i } B_3=\begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 5 & 4 & -6 & 7 \end{pmatrix}$$

ja que a la primera B_1 hi ha les noves files $\mathbf{g}_1=3.\mathbf{f}_1$ i $\mathbf{g}_2=2.\mathbf{f}_2$,an la segona B_2 s'han restat aquestes dues, la nova fila ha quedat $\mathbf{h}_2=\mathbf{g}_1-\mathbf{g}_2$ i en l'última matriu B_3 la segona fila és 1/7 de $\mathbf{h}_2$.

També es poden fer operacions elementals entre les seves columnes. Per exemple si prenem la nova columna donada per $\mathbf{d}_4=-\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2+\mathbf{c}_3+\mathbf{c}_4$ ens resulta la columna nul·la.

Donat un conjunt de files S={$\mathbf{f}_i$, $\mathbf{f}_j$, ..., $\mathbf{f}_l$, ..., $\mathbf{f}_s$} direm que formen un *sistema lligat* i que les files són *linealment dependents* si una d'elles es pot posar com a combinació lineal de les altres. Així, es pot tenir $\mathbf{f}_l$=c.l.($\mathbf{f}_i$, $\mathbf{f}_j$,..., $\mathbf{f}_s$), anomenada *equació de lligadura.*

En canvi, si al conjunt S de files cap d'elles no es pot posar com a combinació lineal de la resta, diem que S és un *sistema lliure* i que les files són *linealment independents*. Es pot provar que en un sistema lliure l'única manera d'obtenir la fila nul·la és multiplicar totes les files per 0 i sumar-les. Conseqüentment, per demostrar que un conjunt de files és un sistema lliure podem provar que

$$\alpha.\mathbf{f}_i+\beta.\mathbf{f}_j+\ldots+\lambda.\mathbf{f}_l+\ldots+\sigma.\mathbf{f}_s=\mathbf{f}_0 \Rightarrow \alpha=0,\ \beta=0,\ldots,\ \lambda=0,\ \ldots,\ \sigma=0$$