

Lenguaje probabilístico: un camino para el desarrollo de la alfabetización probabilística.

Un estudio de caso en el aula de Educación Primaria

Probabilistic Language: A Path for the Development of Probabilistic Literacy. A Case Study in a Primary Education Classroom

Claudia Vásquez Ortiz*

Ángel Alsina**

Resumen

En este estudio nos centramos en describir y analizar cómo emergen los primeros elementos lingüísticos durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad, entendido este como un lenguaje preciso y especializado que permite expresar, de forma cualitativa, la probabilidad de ocurrencia de un determinado suceso. Para ello, se ha optado por realizar un estudio exploratorio de un proceso de instrucción con alumnos de segundo curso de Educación Primaria (7-8 años aproximadamente) que no han recibido instrucción previa sobre el tema. En concreto, se analiza la multiplicidad de términos, expresiones orales y escritas, símbolos y representaciones que se usan cuando se pretende que los alumnos aprendan gradualmente la noción de probabilidad y adquieran el respectivo lenguaje probabilístico asociado. Los resultados muestran un fuerte predominio de términos y expresiones verbales provenientes del lenguaje común vinculadas principalmente al significado intuitivo de la probabilidad, que transitan hacia conceptos de corte probabilístico.

Palabras clave: Probabilidad. Lenguaje probabilístico. Alfabetización probabilística. Aproximación a la probabilidad.

Abstract

In this study, we focus on describing and analyzing how the first linguistic elements emerge during the process of teaching and learning probability, understood as a precise and specialized language that allows qualitatively expressions of the probability of occurrence for a certain event. To this end, we chose to undertake an exploratory study on the instruction process of Primary Education sophomores (approximately 7-8 year-old children) who have not received prior instruction on the subject. In particular, we analyzed the multiplicity of terms, oral and written expressions, symbols and representations that are used when it is intended that students gradually learn the notion of probability and acquire the respective probabilistic language. The results show a strong predominance of words and verbal expressions from the common language relating mainly to the intuitive meaning of probability, transiting towards concepts of probability court.

Keywords: Probability. Probabilistic Language. Probability literacy. Approach to probability.

* Doctora en Educación por la Universidad de Girona (UdG). Profesora del Departamento de Matemáticas del Campus Villarrica de la Pontificia Universidad Católica de Chile (PUC), Villarrica, IX Región, Chile. Dirección Postal: O'Higgins 501, 4930000, Villarrica, Chile. *E-mail:* cavasque@uc.cl.

** Doctor en Psicología por la Universidad Autónoma de Barcelona (UAB). Profesor de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Girona (UdG), Girona, España. Dirección postal: Plaça St Domènec, 9. 17071 Girona, España. *E-mail:* angel.alsina@udg.edu.

1 Introducción

En las últimas décadas se observa una fuerte tendencia por incorporar el estudio de la probabilidad, de manera progresiva, en los currículos de Educación Primaria de diversos países (e.g. NCTM, 1989, 2000; MEC, 2006; MINEDUC, 2012), adelantando su enseñanza a los primeros niveles educativos. Esto se debe, por un lado, a su utilidad y aplicabilidad en diversos campos del conocimiento en los que su aprendizaje constituye una base para la comprensión y estudio de temas más avanzados (SCHEAFFER; WATKINS; LANDWEHR, 1998), al proporcionar modelos probabilísticos para medir la incertidumbre.

Por otro lado, el aprendizaje de la probabilidad contribuye al desarrollo de un pensamiento crítico, que permite a los ciudadanos comprender y comunicar distintos tipos de información presentes en numerosas situaciones de la vida diaria en las que los fenómenos aleatorios, el azar y la incertidumbre están presentes (BENNETT, 1998; EVERITT, 1999). Es en este contexto que la probabilidad “proporciona una excelente oportunidad para mostrar a los alumnos cómo matematizar, cómo aplicar la matemática para resolver problemas reales” (GODINO; BATANERO; CAÑIZARES, 1987, p. 12).

Por tanto, surge la necesidad de educar a los alumnos en esta área desde temprana edad, para así, contar con ciudadanos alfabetizados probabilísticamente, “capaces de hacer frente a una amplia gama de situaciones del mundo real que implican la interpretación o la generación de mensajes probabilísticos, así como la toma de decisiones” (GAL, 2005, p. 40). En este sentido, el *National Council of Teachers of Mathematics* incluyó, de manera inicial, a “Datos y Azar” como área temática en *Curriculum and Evaluation Standard for School Mathematics* (NCTM, 1989), reforzando, posteriormente, esta iniciativa en los *Principles and Standard for School Mathematics* (NCTM, 2000) los cuales enfatizan la necesidad de contar con programas de enseñanza orientados a desarrollar los conocimientos, capacidades y actitudes necesarias para desenvolverse adecuada y críticamente en situaciones de incertidumbre.

Con este propósito y en contraposición a los Estándares Comunes (CCSI, 2010) que proponen abordar la probabilidad sino que hasta 6° de primaria, los principios y estándares recomiendan que el estudio de la probabilidad se aborde en todos los niveles de Educación Primaria, de manera gradual y progresiva, para que al finalizar esta etapa escolar los alumnos cuenten con un sólido conocimiento probabilístico. Para ello, en los primeros niveles se otorga especial importancia a la adquisición de lenguaje probabilístico.

La mayoría de los países no han sido ajenos a esta tendencia y han incorporado, paulatinamente, los conocimientos probabilísticos, en general, y los relativos al lenguaje, en particular, en los currículos de matemáticas de Educación Primaria, siguiendo, en muchos casos, las orientaciones del NCTM (2000). En España, por ejemplo, se hace especial hincapié en la utilización en el lenguaje habitual de términos probabilísticos (*imposible, seguro* etc.) como punto de partida para la enseñanza de la probabilidad en Educación Primaria (MEC, 2006). En el caso de Chile, se inicia con actividades muy sencillas que buscan que el estudiante se enfrente desde pequeño a situaciones de incertidumbre, que permitan que sus intuiciones sobre el azar afloren (MINEDUC, 2009, 2012).

Un aspecto clave para asegurar que estas nuevas propuestas curriculares tengan éxito es la formación del profesorado, sobre todo en los primeros niveles educativos, pues “los profesores son la clave de oportunidad de aprendizaje de las matemáticas” (EVEN; BALL, 2009, p. 1-2), por lo que finalmente la calidad de la enseñanza depende de ellos, de su conocimiento y su preparación para enseñar, la cual impacta directamente en el aprendizaje y desarrollo de competencias matemáticas de los alumnos (DARLING-HAMMOND; WEI; JOHNSON, 2009; HATTIE, 2012).

Por tanto, si se desea mejorar la formación matemática de los alumnos, es necesario prestar especial atención al conocimiento profesional del profesor, entendido como “el conjunto de todos los saberes y experiencias que un profesor posee y de los que hace uso en el desarrollo de su labor docente, que va construyendo desde su formación inicial y durante toda su carrera profesional” (CLIMENT, 2002, p. 52-53). Específicamente, surge la necesidad de focalizarse en alcanzar una comprensión en profundidad de las características y naturaleza del conocimiento matemático necesario para enseñar. Para ello, resulta de gran interés indagar en un campo aún poco estudiado y que reclama atención por parte de la Didáctica de la Matemática: el conocimiento matemático para la enseñanza que ponen en juego los profesores en ejercicio en el aula, en sus prácticas de enseñanza al enseñar un determinado tema matemático (HOOVER, 2014), sobre todo en lo que respecta a la enseñanza de la probabilidad en el aula de Educación Primaria.

Si bien durante los últimos años, producto del impulso dado por el International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) Study 18, *Statistics Education in School Mathematics, Challenges for Teaching and Teacher Education* (BATANERO; BURRILL; READING, 2011; BATANERO; BURRILL; READING; ROSSMAN, 2008), las investigaciones en torno al conocimiento para enseñar probabilidad han aumentado a nivel internacional, éstas aún son escasas y evidencian la necesidad de ofrecer una mejor

preparación al profesorado, pues la mayoría de los maestros de Educación Primaria tienen poca o ninguna preparación sobre probabilidad y su didáctica (e. g. WATSON, 2001; STHOL, 2005; GÓMEZ, 2014; VÁSQUEZ, 2014).

Para comenzar a mejorar esta situación, es primordial que el profesorado cuente con herramientas que les permitan abordar el proceso de enseñanza de la probabilidad, siendo necesario otorgar una formación inicial y continua que permita enseñar, de manera idónea, la probabilidad y que a la vez impulse el desarrollo de la alfabetización probabilística (VÁSQUEZ; ALSINA, 2015). Pero, ¿cómo enseñar probabilidad en Educación Primaria?, ¿qué conocimientos deben tener los profesores para llevar a cabo su enseñanza?, ¿qué caracteriza a dichos conocimientos?

Para dar respuesta a este tipo de interrogantes es necesario alcanzar una comprensión en profundidad de la naturaleza y las características del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad. Es en esta dirección que en los últimos años se observa una tendencia al aumento de las investigaciones cuyo foco es el profesor y sus prácticas de enseñanza, con la finalidad de analizar los conocimientos que éstos ponen en juego al enseñar matemáticas y, de este modo, obtener evidencias de la puesta en escena del conocimiento matemático para la enseñanza y, por ende, por medio del análisis de tales evidencias, acceder a una mejor comprensión de las características y naturaleza de este conocimiento.

Por esta razón, nuestra investigación parte de esta perspectiva y pretende ser un primer paso en el desafío de avanzar hacia una comprensión en profundidad de la naturaleza y las características del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad en el aula de Educación Primaria. Como se ha indicado, el aprendizaje de la probabilidad en las primeras edades se inicia de manera informal, introduciendo vocabulario vinculado a las nociones de probabilidad por medio de actividades o situaciones problemas centradas en los juicios que emiten los alumnos en base a sus propias experiencias. Por tanto, el lenguaje asociado a lo cotidiano constituye un elemento clave, sobre todo en los primeros niveles educativos, para incorporar progresivamente un lenguaje probabilístico y avanzar así en la construcción del conocimiento sobre probabilidad, sobre todo si consideramos que en muchas ocasiones “utilizar el lenguaje matemático puede ser una barrera para el aprendizaje de los alumnos debido a los requerimientos y convenciones específicas necesarias para expresar los conceptos matemáticos” (LEE, 2010, p. 19).

En relación con los primeros elementos lingüísticos vinculados a la probabilidad, en este trabajo se asume que se trata de la parte ostensiva de una serie de conceptos, proposiciones y procedimientos que intervienen en la elaboración de argumentos al resolver

situaciones problemas, permitiendo representar por medio de objetos concretos aquéllos más abstractos, posibilitando una correspondencia semiótica entre objeto representante y representado (FONT; GODINO, 2006).

Desde esta perspectiva, en este estudio nos centramos en describir y analizar cómo emergen los primeros elementos lingüísticos durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad, entendido este como un lenguaje preciso y especializado que permite expresar de forma cualitativa la probabilidad de ocurrencia de un determinado suceso. Para ello, se ha optado por realizar un estudio exploratorio, por medio de la observación no participante, de un proceso de instrucción con alumnos de segundo curso de Educación Primaria (7-8 años aproximadamente) que no han recibido instrucción previa sobre el tema. En concreto, se analiza la multiplicidad de términos, expresiones orales y escritas, símbolos y representaciones (tablas y gráficos) que se usan cuando se pretende que los alumnos aprendan gradualmente la noción de probabilidad y adquieran el respectivo lenguaje probabilístico asociado.

2 Fundamentación teórica

Los campos de estudio en educación matemática que fundamentan teóricamente esta investigación son de dos tipos: los significados de la probabilidad en el currículo de Educación Primaria y el lenguaje probabilístico como soporte para la alfabetización probabilística.

2.1 Significados de la probabilidad en el contexto de la matemática escolar

Como parte de la matemática, la probabilidad no ha estado exenta de desafíos que, en su búsqueda por dar respuesta a situaciones problemáticas, han contribuido a su desarrollo, fundamentando lo que hoy conocemos como la *Teoría de la Probabilidad* (BATANERO; HENRY; PARZYSZ, 2005). A lo largo de su desarrollo histórico, se observan distintos significados vinculados a su interpretación que en la actualidad coexisten y son estudiados, con mayor o menor énfasis, en el contexto de la matemática escolar: significado intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo y axiomático (FINE, 1971).

a) *Significado intuitivo*: asigna cualitativamente probabilidades a sucesos a partir de preferencias individuales. En este contexto las ideas intuitivas sobre el azar aparecen en la

utilización de términos de uso común para referirse a la incertidumbre, expresar y cuantificar, por medio de frases coloquiales, el grado de creencia en relación con sucesos inciertos.

b) *Significado clásico*: considera la probabilidad de un suceso como la proporción del número de casos favorables al número de casos posibles, siempre que todos los resultados sean igualmente probables. Esta definición predomina en el contexto escolar, dada su simplicidad, aun cuando no puede ser aplicada en experimentos con un número infinito de posibilidades o cuando el espacio muestral es finito pero no simétrico.

c) *Significado frecuencial*: plantea la asignación de probabilidades a partir de la frecuencia relativa observada en un gran número de repeticiones, permitiendo estimar la probabilidad del suceso. Así, la *Ley de los Grandes Números*, indica que la probabilidad de que la frecuencia relativa de un experimento repetido en las mismas condiciones tienda a la probabilidad teórica, puede aproximarse suficientemente a 1, sin más que aumentar el número de pruebas.

d) *Significado subjetivo*: se fundamenta en la confianza que una persona deposita sobre la verdad de una determinada proposición, por lo que no está unívocamente determinada. La probabilidad depende del observador y de lo que éste conoce del suceso en estudio.

e) *Significado axiomático*: concibe la probabilidad como un tipo especial de medida, vinculándola con la teoría de la medida. Este enfoque establece axiomas a satisfacer y, por la rigurosidad matemática que conlleva, solo se observan algunos matices de su estudio en los últimos cursos de la Educación Primaria.

Es necesario clarificar que en relación con la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad es esencial adoptar una perspectiva de modelización de manera que tales significados se complementen, ya que una comprensión adecuada del concepto no puede limitarse solo a uno de ellos (BATANERO; HENRY; PARZYSZ, 2005). Por tanto, es fundamental que los profesores sean conscientes de estos significados, pues de lo contrario difícilmente podrán comprender los obstáculos y dificultades a los que se verán enfrentados sus alumnos, quienes en su proceso de construcción y aprendizaje “se encontrarán con las mismas paradojas y situaciones contraintuitivas que aparecieron en el desarrollo histórico del cálculo de probabilidades” (BATANERO, 2007, p. 28).

De este modo, se espera que los maestros sean capaces de orientar el proceso de enseñanza de una manera progresiva a partir de las ideas intuitivas de sus alumnos sobre azar y probabilidad, para luego incorporar, de manera gradual y complementaria, los diferentes significados e ir construyendo poco a poco el concepto de probabilidad, pues tal y como dijo Laplace (1985, p. 206-207): “el aprendizaje de la probabilidad nos ayuda a evitar ilusiones en

la toma de decisiones y por ello no hay ciencia más digna de nuestro estudio ni más útil para que se incluya en el sistema público de educación”.

En lo que respecta al tratamiento de la probabilidad en el currículo nacional e internacional, se recomienda que en las primeras edades (5 a 8 años) las ideas probabilísticas deben ser abordadas de manera informal vinculándolas a situaciones provenientes de un contexto cotidiano, propiciando el uso de un lenguaje cotidiano e informal propio, que permita introducir y resaltar nociones de probabilidad necesarias para que los alumnos avancen progresivamente hacia una comprensión y aplicación de los conceptos básicos de probabilidad.

Desde este prisma, en este trabajo centramos nuestra atención en los significados intuitivo y frecuencial, ya que son los significados predominantes en Educación Primaria, sobre todo en los primeros niveles educativos (ALSINA; VÁSQUEZ, 2016). De forma más concreta, el significado intuitivo de la probabilidad constituye un elemento central y de base en las primeras edades, ya que se refiere a aquellos términos de uso común para referirse a la incertidumbre y expresar por medio de frases coloquiales la cuantificación y el grado de creencia en relación con sucesos inciertos. Por ello, se recomienda enfatizar su aprendizaje a partir de situaciones cotidianas en las que emergen o están presentes los conceptos *posible*, *seguro*, *imposible* etc., para luego transitar y complementar gradualmente este significado con un enfoque frecuentista (VÁSQUEZ; ALSINA, 2014).

2.2 El lenguaje probabilístico, un soporte para la alfabetización probabilística

Gal (2002, 2005) propone un modelo para el desarrollo de la alfabetización probabilística a partir de ciertos componentes básicos (Cuadros 1 y 2) en los que el lenguaje cotidiano vinculado al significado intuitivo constituyen un elemento de base para construir una conexión con el lenguaje probabilístico, que permitirá que los alumnos comiencen a utilizar un lenguaje preciso y especializado para expresar de forma cualitativa la probabilidad de ocurrencia de un determinado suceso.

Elementos cognitivos	Conocimientos
Grandes ideas de probabilidad: Variabilidad, aleatoriedad, independencia, predicción/incertidumbre.	La alfabetización probabilística es una construcción dinámica y relativa. Es posible distinguir distintos focos de variabilidad, que generar distintos tipos de incertidumbre: medición, natural, inducida y muestral. La aleatoriedad es una construcción resbaladiza que ha sido debatida por muchos estadistas (un posible punto de vista es que el azar es una característica de un resultado). La independencia implica que los eventos son inconexos y un evento no se puede predecir de otro. La predicción y la incertidumbre se relacionan con el estado de nuestro

	conocimiento general acerca de la probabilidad de un determinado evento.
Asignación de probabilidades: formas de encontrar o estimar la probabilidad de ocurrencia de un evento.	Para calcular probabilidades, los alumnos deben estar familiarizados con la manera de encontrar probabilidad de eventos, con el fin de entender estados probabilísticos realizados por otros, para generar estimaciones sobre la probabilidad de eventos y comunicarse acerca de ellos. Aquí es donde los puntos de vista de probabilidad clásica, frecuentista y subjetiva son útiles.
Lenguaje: los términos y los métodos utilizados para comunicar el azar	Los alumnos deben entender el <i>lenguaje probabilístico</i> , es decir, las diversas formas que se utilizan para representar y comunicar el azar y la probabilidad. La probabilidad de eventos se puede representar cuantitativamente por múltiples sistemas, como en una escala de 0-1, fracciones (por ejemplo, 50/50), porcentajes, proporciones, etc., así como gráficamente. Por lo tanto, una expectativa básica es que los alumnos entiendan la intercambiabilidad de diferentes representaciones y se sientan cómodos moviéndose entre ellas.
Contexto: La comprensión del papel y las implicaciones de los problemas probabilísticos y mensajes en diferentes contextos y en el discurso personal/público.	Los conocimientos relativos al contexto son necesarios tanto desde el punto de vista funcional como educativo. La comprensión de que el azar y la aleatoriedad no afectarán a los acontecimientos y procesos del mundo real permite a las personas prever que ciertos eventos serán más predecibles, mientras que otros no tanto.
Preguntas críticas: Cuestiones para reflexionar cuando se trata de probabilidades.	Los alumnos deben saber qué preguntas críticas realizar cuando se encuentran con una declaración de probabilidad o certeza, o cuando tienen que generar una estimación probabilística. Las preguntas deberían referirse a 5 elementos: el contexto (¿en qué medida implica aleatoriedad?); la fuente (¿quién hace una demanda probabilística?); el proceso (¿qué tipo de análisis se usa?); el significado del mensaje (¿qué indica la afirmación probabilística?); y la interpretación reflexiva (¿qué cuestiona el mensaje y cómo se interpreta?

Cuadro 1 - Elementos cognitivos de la alfabetización probabilística .

Fuente: GAL, 2005

Elementos disposicionales	Actitudes
Postura crítica.	Los mensajes cuantitativos que pueden ser engañosos, unilaterales, sesgados o incompletos (ya sea intencionalmente o no) deberían generar una actitud de cuestionamiento. Es, pues, necesario aprender progresivamente a invocar de forma espontánea la lista de preguntas que generan incertidumbre frente a argumentos que pretenden basarse en datos, informes de resultados, conclusiones de encuestas u otras investigaciones empíricas.
Creencias y actitudes.	Se distinguen tres constructos distintos dentro del dominio afectivo en educación matemática: emociones, actitudes y creencias. Es, pues, necesario desarrollar progresivamente una visión positiva de sí mismo como individuo capaz de realizar razonamientos probabilísticos en situaciones de incertidumbre que sean relevantes, más que partir de datos anecdóticos o de experiencias personales.
Los sentimientos personales en relación a la incertidumbre y el riesgo.	El grado de incertidumbre o previsibilidad experimentado puede ser la base de la propia percepción y capacidad para evaluar el riesgo asociado con los eventos o resultados de relevancia para la vida.

Cuadro 2 - Elementos disposicionales de la alfabetización probabilística .

Fuente: GAL, 2005

Aun cuando estos componentes son presentados por separado, todos ellos interactúan entre sí de manera compleja durante el aprendizaje real (GAL, 2005). Esto significa que una instrucción que se centre sólo en uno o dos elementos no será suficiente para desarrollar un *comportamiento alfabetizado de probabilidad*. Por tanto, a partir de lo propuesto por Gal (2005) y por Gómez, Ortiz, Batanero y Contreras (2013), es posible distinguir cinco grandes

focos para la adquisición del lenguaje probabilístico – entendido este como un lenguaje especializado para comunicar el azar – que los alumnos requieren desarrollar como una progresión de sus intuiciones probabilísticas para alcanzar una comprensión adecuada de la probabilidad:

1) *Lenguaje verbal*: se refiere a la diversidad de términos y expresiones verbales. Dentro de este tipo de lenguaje, de acuerdo con Shuard y Rothery (1984), es posible distinguir tres categorías de expresiones utilizadas en la enseñanza de la matemática: a) Expresiones verbales específicas de las matemáticas: son aquellas que no forman parte del lenguaje común y corresponden más bien a un lenguaje técnico de las matemáticas; b) Expresiones verbales vinculadas a las matemáticas: se utilizan tanto en el contexto matemático como en el cotidiano, pero no siempre tienen el mismo significado en ambos contextos; y c) Expresiones verbales comunes: tienen el mismo significado o significados muy próximos tanto en el contexto matemático como en el cotidiano.

2) *Lenguaje numérico*: se asocia a la cuantificación de la posibilidad de ocurrencia de un determinado suceso y a la comparación de probabilidades.

3) *Lenguaje tabular*: se refiere a la utilización de tablas para la representación de datos. Se utiliza principalmente para la presentación de frecuencias relativas y en la estimación de probabilidades a partir de ellas. Este tipo de lenguaje se encuentra fuertemente vinculado al significado frecuentista de la probabilidad.

4) *Lenguaje gráfico*: se relaciona con la diversidad de representaciones gráficas ligadas a conceptos probabilísticos y que son utilizadas en estimaciones de probabilidades, como por ejemplo: pictogramas, diagramas de barra y diagramas de árbol. Este tipo de lenguaje, al igual que el anterior, está vinculado con el significado frecuentista de la probabilidad.

5) *Lenguaje simbólico*: se refiere al uso de símbolos que pueden ser empleados para comunicar la probabilidad de ocurrencia de un suceso, por su naturaleza este tipo de lenguaje se encuentra vinculado con mayor frecuencia al significado clásico y axiomático de probabilidad.

En este estudio nos centramos, específicamente, en el lenguaje verbal pues desempeña un rol fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática (NCTM, 2015), especialmente para el caso de la probabilidad y su estudio en las primeras edades, debido a la estrecha relación existente entre las expresiones de uso común y el lenguaje de corte matemático o probabilístico. Esto adquiere relevancia sobre todo si consideramos que, en muchas ocasiones, el lenguaje probabilístico es utilizado inadecuadamente, desencadenando dificultades para resolver problemas que involucran situaciones

probabilísticas, pudiendo, incluso, persistir estas dificultades en temas más avanzados de probabilidad (JONES; LANGRALL; MOONEY, 2007). Por ello, es importante que los alumnos tengan experiencias que ayuden a apreciar el poder y la precisión del lenguaje probabilístico. No obstante, “es importante evitar una prisa prematura por imponer el lenguaje matemático formal; los alumnos necesitan desarrollar un aprecio por la necesidad de definiciones precisas y de la potencia comunicativa de los términos matemáticos convencionales a partir de la comunicación con sus propias palabras” (NCTM, 2003, p. 67).

De ahí la importancia de que la probabilidad sea abordada desde las primeras edades a partir del lenguaje cotidiano e informal, al proporcionar una base para construir un lenguaje probabilístico adecuado de manera que los alumnos puedan superar sus dificultades y concepciones erróneas sobre azar y probabilidad, y transitar así hacia una mejor comprensión de la cuantificación de la incerteza a través de la probabilidad. Para finalmente, avanzar en el desarrollo de la alfabetización probabilística, entendida como: “la capacidad de acceder, utilizar, interpretar y comunicar información e ideas relacionadas con la probabilidad, con el fin de participar y gestionar eficazmente las demandas de las funciones y tareas que implican incertidumbre y riesgo del mundo real” (GAL, 2012, p. 4).

Pese a la importancia que tiene una adecuada adquisición del lenguaje probabilístico, las investigaciones al respecto son escasas, sobre todo las referidas a cómo este se desarrolla en el aula de Educación Primaria. Dentro de las investigaciones que se interesan por analizar el lenguaje probabilístico destaca la de Green (1983) quien construye un cuestionario sobre conceptos o intuiciones aleatorias que aplica a una muestra de 2930 alumnos de 11 a 16 años, el cuestionario consta de 26 ítems que abordan diversos aspectos para establecer niveles de razonamiento probabilístico y la edad promedio en que éstos son alcanzados. Dichos ítems se clasifican en tres categorías: 1) capacidad de comprensión del lenguaje de probabilidad y su aplicación a situaciones de incertidumbre; 2) capacidad de razonamiento combinatorio y probabilístico; 3) intuiciones de los alumnos sobre aleatoriedad. De esta forma, logra situar a los alumnos en distintos niveles de razonamiento probabilístico, que guardan cierta similitud con las etapas del desarrollo de la idea de azar propuesta por Piaget e Inhelder (1951). En lo que respecta al lenguaje probabilístico, los resultados obtenidos por Green muestran que existe un bajo dominio y comprensión del lenguaje vinculado a la probabilidad.

Por su parte, Fischbein y Gazit (1984) analizan el efecto de la enseñanza en los juicios probabilísticos, examinando algunos errores en relación con la asignación de probabilidades y al lenguaje probabilístico. Tales errores se manifiestan mayoritariamente en alumnos de 9 a 14 años, para quienes la noción de *seguro* presenta mayores dificultades que la de *probable*,

dado que asocian esta noción con un resultado único y posible con variados resultados; caracterizando, además, *raro* con *imposible*, e *imposible* con *incierto*, debido a que se basan en sus experiencias subjetivas o creencias.

Cañizares (1997) estudia la influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de las creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias. Para ello, realiza un análisis fundamentado en las investigaciones realizadas por Piaget e Inhelder (1951) y Green (1983) desde una perspectiva clásica de la probabilidad *versus* las de Fischbein (1975) realizadas desde una perspectiva intuitiva de la probabilidad. Además, realiza un análisis estructural de los instrumentos de evaluación del razonamiento probabilístico intuitivo de los niños que fueron utilizados en las investigaciones de Green (1983) y de Fischbein y Gazit (1984), dilucidando que en el cuestionario de Fischbein y Gazit (1984) se otorga gran importancia a la aproximación intuitiva de la probabilidad basada en las creencias y factores culturales, incluyendo además contextos cotidianos como los vinculados a las loterías.

Después de este análisis realiza una comparación experimental de los dos cuestionarios por medio del estudio de la correlación existente entre ambos instrumentos. Para ello, aplicó el cuestionario de Green (1983) a una muestra de 251 alumnos de 11 a 14 años, y el cuestionario de Fischbein y Gazit (1984) a una muestra ampliada a 320 alumnos entre los 10 y 14 años. En general, los resultados de ambas aplicaciones fueron mejores que los obtenidos por Green (1983) y Fischbein y Gazit (1984), evidenciando que el grupo de niños de Cañizares muestran una mejor comprensión y utilización del lenguaje probabilístico a excepción de los términos *improbable* e *imposible* ante los cuales manifiestan cierta dificultad.

Con el fin de complementar las investigaciones anteriores, y aportar una mirada desde lo que sucede en el interior del aula cuando se enseña probabilidad por primera vez en Educación Primaria, el objetivo de nuestro estudio es, como se ha indicado, describir y analizar cómo emergen los primeros elementos lingüísticos durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad en un grupo de 20 alumnos de 7-8 años de edad.

3 Método

Se realiza un estudio exploratorio bajo un enfoque de investigación cualitativo, en el cual utilizamos el estudio de caso, como diseño de investigación, pues este “implica un proceso de indagación caracterizado por el examen sistemático y en profundidad de casos de un fenómeno” (BISQUERRA, 2009, p. 309). Para la obtención de datos, se registra en vídeo

una sesión de clase de 90 minutos de duración en un segundo curso de primaria de una escuela chilena.

En el estudio han participado 20 alumnos de 7-8 años de edad que no han recibido instrucción previa sobre el tema probabilidad. El maestro a cargo de la sesión de clase es maestro de primaria con especialización en matemática y cumple con gran parte de los criterios o características de un maestro experto (ROJAS; CARRILLO; FLORES, 2012), dado que tiene 5 años de experiencia en aula y es reconocido por sus pares y alumnos por la calidad de sus clases y el dominio del contenido que enseña, lo que se refleja en sus buenas evaluaciones docentes. Asimismo, ha logrado sostenidamente, en el área de matemática, un buen desempeño de sus alumnos en mediciones locales y nacionales. Cabe señalar que este maestro ha realizado, durante los últimos años, cursos de formación permanente orientados a la enseñanza de la estadística y probabilidad en la Educación Primaria.

Para describir y analizar cómo emergen estos primeros elementos lingüísticos, hemos considerado una metodología exploratoria que se compone de los siguientes pasos:

- a) Transcripción de la clase grabada en vídeo.
- b) Identificación y categorización de episodios de la clases (a partir de la transcripción) en los que de acuerdo con la categorización propuesta por Gómez et al. (2013), se aborden situaciones problemas que involucren términos, expresiones orales y escritas, símbolos y representaciones (tablas y gráficos) asociados a la probabilidad, que constituyen las unidades de análisis.
- c) Codificación de los términos, expresiones orales y escritas, símbolos y representaciones asociados a la probabilidad que son utilizados para describir ideas, términos, conceptos o procedimientos.
- d) Descripción de cómo los alumnos de primaria adquieren un lenguaje probabilístico a partir del uso de diversos términos, expresiones orales y escritas, símbolos y representaciones.

4 Resultados y discusión

A continuación se presenta el análisis de los primeros elementos lingüísticos presentes en el desarrollo de las situaciones problemas implementadas, cuya finalidad es iniciar a los alumnos en el uso del lenguaje del azar y la probabilidad, para que posteriormente sean capaces de predecir y conjeturar acerca de la posibilidad de ocurrencia de sucesos.

4.1 Situación problema 1

Consiste en que los alumnos se aproximen al lenguaje de la incerteza a partir de sus ideas previas acerca de los conceptos *imposible*, *posible*, *seguro*, *incierto*.

Maestro: ¿A qué nos referimos cuando decimos que algo es imposible, posible, seguro o incierto?

Alumno: algo es imposible cuando no hay posibilidad de que suceda o su posibilidad de suceder es muy pequeña.

Maestro: ¿puedes dar algún ejemplo?

Alumno: ganarse el Kino, mi mamá dice que es imposible ganarlo.

Maestro: Diego (alumno) no es que sea imposible ganar el Kino, sino que más bien es muy difícil ganárselo, por lo que se dice que es poco posible ganarlo.

Alumno: entonces ¿es cosa de suerte? ya que puede suceder pero no ocurre muy a menudo (Transcripción del audio de clase videograbada).

En este contexto, se inicia la discusión en torno a estos conceptos y comienza a brotar una diversidad de términos y expresiones verbales vinculadas con las palabras *imposible*, *posible*, *seguro* e *incierto*, que se muestran en el Cuadro 3.

Imposible	Posible	Seguro	Incierto
poco probable accidental inesperado no es posible que ocurra mala suerte muy poca posibilidad suerte muy buena suerte muy difícil de que suceda de casualidad sin querer	azar probable casi seguro 50 y 50 de posibilidades igual probabilidad de suceder	muy muy posible certeza	poco probable poco posible inesperado de casualidad no se sabe qué puede pasar desconocido más posible menos posible sin querer

Cuadro 3 - Términos y expresiones verbales utilizados por los alumnos.

Fuente: Cuadro elaborado a partir de lo observado y escuchado en las videograbaciones.

Estos términos y expresiones verbales denotan una escasa comprensión del vocabulario asociado al azar y probabilidad, pues en los distintos conceptos planteados es posible observar que los alumnos asocian, en varios casos, un vocabulario incorrecto. Uno de los conceptos que presenta un mayor nivel de dificultad es el de *imposible*, observándose en varios casos que los alumnos utilizan este concepto para referirse a aquellos sucesos o situaciones que tienen escasas posibilidades de ocurrir o que bien son *muy difíciles de que puedan llegar suceder* y si llegan a ocurrir lo atribuyen a un hecho de *mala suerte* o de *muy buena suerte* como es el caso de los juegos de lotería.

Otro concepto que presentó dificultad, pero en menor medida, fue el de *seguro*, pues un par de alumnos utilizó este concepto para referirse a situaciones que tienen *muchas posibilidades de ocurrir*, no obstante, casi la totalidad de los alumnos utiliza adecuadamente el concepto. Asimismo, a partir del Cuadro 3, se evidencia que los conceptos mejor comprendidos corresponden a *posible* e *incierto*, pues la gran mayoría de los alumnos emplea

términos y expresiones adecuadas para referirse a ellos. Es así como, a partir de la exposición y discusión de las respuestas de los alumnos, el maestro establece las siguientes características para los conceptos *imposible*, *posible*, *seguro* e *incierto* (Figura 1).

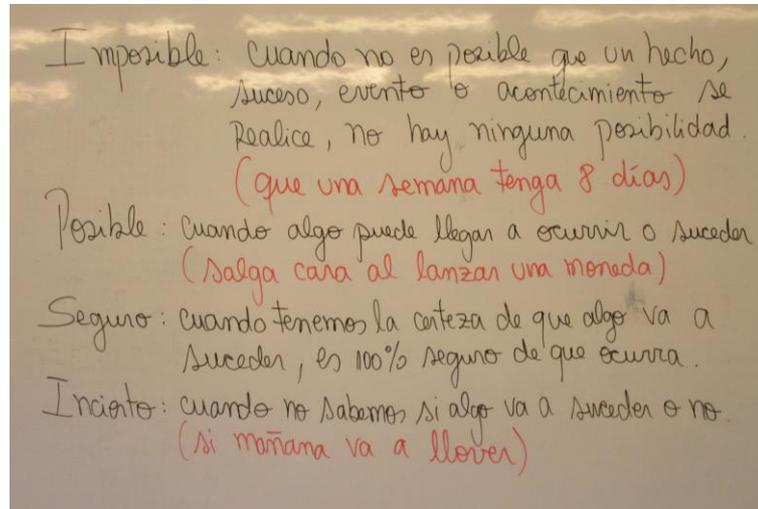


Figura 1 – Definiciones dadas por el maestro para imposible, posible, seguro e incierto.
Fuente: Imagen capturada desde la pizarra de la clase videograda.

Así, a partir de esta caracterización el maestro comienza a introducir un vocabulario de carácter cualitativo para asignar posibilidades de ocurrencia.

4.2 Situación problema 2

Con el propósito de reforzar el vocabulario para asignar posibilidades de ocurrencia, el maestro presenta un conjunto de fichas con situaciones (Figura 2) en las que está presente la incerteza.



Figura 2 - Fichas utilizadas por el maestro para trabajar con posibilidades de ocurrencia.
Fuente: Fichas con situaciones de vida cotidiana utilizadas por el maestro.

Los alumnos deben discutir y reflexionar acerca de su posibilidad de ocurrencia, en el sentido de que, aun existiendo algunos patrones de comportamiento, resulta imposible predecir una situación futura con toda seguridad. Por ejemplo, ante la situación - *Supongamos que nos interesa saber si mañana tendremos un día soleado* - el maestro solicita a los alumnos que expresen la posibilidad de que esto suceda. Algunos señalan que la respuesta *depende de muchos factores* como por ejemplo, el clima del lugar, la estación del año, el tiempo del día de hoy etc. En este momento el maestro hace hincapié en que estos *factores* pueden llevar a asignar distintos grados de posibilidad de ocurrencia de este suceso, y es aquí donde plantea ciertos posibles escenarios, para situar las respuestas de los alumnos. Por ejemplo: *Si estos últimos días han sido lluviosos y nos encontramos en el mes de junio, ¿será posible que mañana sea un día soleado?*

Luego, el maestro pide a los alumnos que realicen algunas predicciones, con el objeto de que identifiquen diferentes grados de posibilidad de que ocurra un determinado hecho o suceso. Es en este momento que, a partir de la puesta en común de los grados de posibilidad asignados por los alumnos a cada uno de los sucesos presentados por el maestro, comienza a aflorar el significado subjetivo de la probabilidad, pues algunos alumnos consideran que el grado de posibilidad asignado puede variar según los supuestos de los que se parta o de los datos de los que se disponga. De este modo, a partir de diversas suposiciones de contextos diversos comienzan a emerger expresiones tales como *imposible, más posible, menos posible* etc. Lo que lleva a que los alumnos, guiados por el maestro, identifiquen y ordenen diferentes grados de posibilidad de ocurrencia de un suceso que pueden ir desde lo imposible hasta lo seguro. Producto de esta discusión y con base en la diversidad de expresiones dadas por los propios alumnos, el maestro en conjunto con sus alumnos llegan a establecer una escala que permite valorar cualitativamente las oportunidades de ocurrencia de un conjunto de situaciones dado (Figura 3), donde cada grado de posibilidad implica un nivel diferente de incerteza.

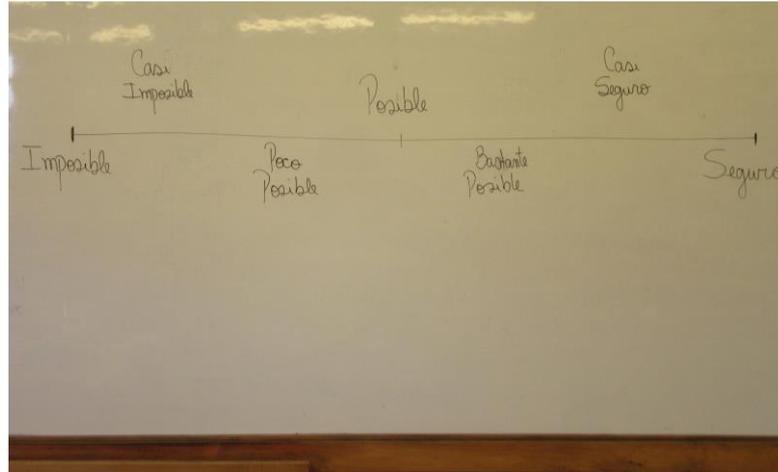


Figura 3 - Grados de posibilidad de ocurrencia de un suceso establecidos por el maestro a partir de las expresiones que brindan los alumnos.
Fuente: Imagen capturada desde la pizarra de la clase videograda.

4.3 Situación problema 3

Para continuar el trabajo con la escala de posibilidades, el maestro presenta una nueva situación problema en la que requiere a los alumnos que propongan situaciones provenientes de experiencias de vida cotidiana. Posteriormente, estas situaciones son compartidas y discutidas en grupo, y a partir de la interacción, la negociación y el diálogo se pacta una clasificación en el *tablero de las posibilidades* que presenta una escala que va desde lo *imposible* a lo *seguro* (Figura 4).



Figura 4 – Alumnos trabajando con el *tablero de posibilidades*.
Fuente: Imagen capturada desde la clase videograda.

Dentro de las situaciones propuestas y clasificadas por los alumnos, de acuerdo con su grado de posibilidad de ocurrencia, destacan las que se presentan en el Cuadro 4.

Imposible	Casi imposible	Poco posible	Posible	Bastante posible	Casi seguro	Seguro
Que al lanzar un dado salga un 9	Que mi mamá me deje salir a jugar si me porto mal	Obtener una buena calificación en una prueba de matemática	Que al lanzar una moneda salga cara	Que me lleven al médico cuando estoy enfermo	Tener que asistir al colegio por la mañana	Que al lanzar una moneda salga cara o sello
Que llueva cuando no hay nubes	Ganarse el Kino		Que llueva un día en invierno	Que mamá me regale un juguete para mi cumpleaños	Que mi mamá venga a buscar al colegio	Comer torta en un cumpleaños
Estornudar con los ojos abiertos	Que caiga un meteorito justo en mi casa		Utilizar el computador un día cualquiera		Andar con polera en verano	
Que llegue de un salto a la luna			Que vuelva a hacer erupción el volcán		Que en el recreo juegue con mis amigos	
Que mi mamá me deje comer dulces todo el día						

Cuadro 4 - Situaciones de experiencias de vida cotidiana propuestas y clasificadas por los alumnos.

Fuente: Cuadro elaborado a partir de las situaciones propuestas y clasificadas por los alumnos.

Al observar las situaciones propuestas se identifica una diversidad de situaciones vinculadas correctamente sobre todo al concepto de *imposible*, pese a que en un comienzo (situación problema 1, expuesta en el apartado 4.1) este concepto fue el que presento mayor dificultad para los alumnos, pues estos lo vinculaban con situaciones que tienen una escasa posibilidad de ocurrir.

4.4 Situación problema 4

La finalidad de esta situación es dar un primer paso hacia la cuantificación de la incertidumbre. El maestro nuevamente solicita a los alumnos que consideren la posibilidad de ocurrencia de algunas situaciones como las que se muestran en la Figura 5, sin embargo, en esta ocasión, requiere a sus alumnos que en cada una de las situaciones propuestas indiquen si es posible asignar un valor (número) relacionado con su posibilidad de ocurrencia.

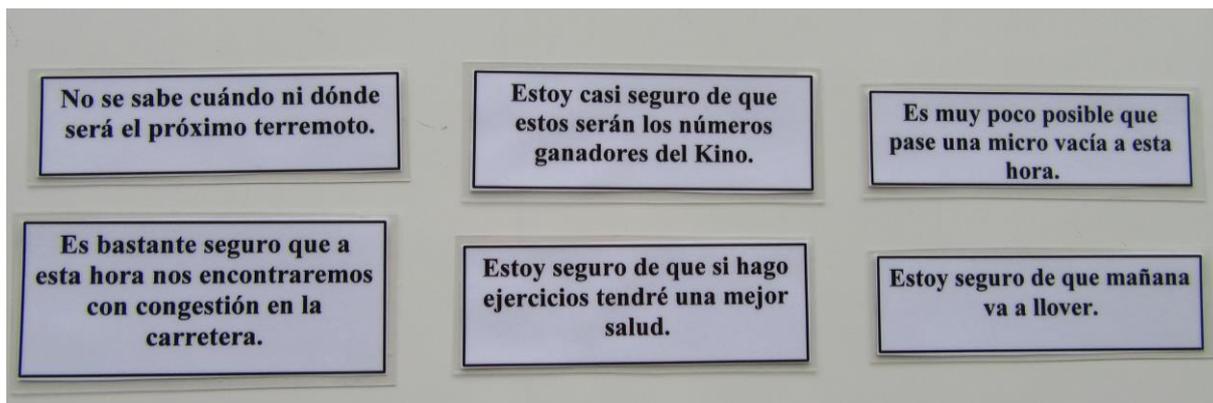


Figura 5 – Situaciones que el maestro entrega a los alumnos para que las clasifiquen según grado de posibilidad de ocurrencia.

Fuente: Fichas con situaciones de vida cotidiana utilizadas por el maestro.

Gran parte de los alumnos asigna rápidamente y de manera espontánea porcentajes a aquellos sucesos que consideran *son seguros de ocurrir* (100%), *imposibles* (0%) y *posibles* (50%), esto nos llama enormemente la atención, pues según las orientaciones curriculares vigentes (MINEDUC, 2012), los porcentajes no son introducidos sino hasta el sexto curso de primaria (10-11 años aproximadamente), quizás esto se deba a que en la situación problema 2 (apartado 4.2), el maestro utilizó la expresión *es 100% seguro de que ocurra* (Figura 1) para referirse a un suceso *seguro*, lo que pudo incidir en las respuestas de los alumnos.

Así, producto de la puesta en común de los argumentos y respuestas presentados por los alumnos, surge la necesidad de proponer una escala que permita ordenar cuantitativamente los grados de posibilidad de ocurrencia (Figura 6). Es a partir de esta situación que aparece el concepto de probabilidad, presentado como una medida cuantitativa de las posibilidades de ocurrencia de un hecho, suceso, evento o acontecimiento, cuyos valores se encuentran entre 0% y 100%.

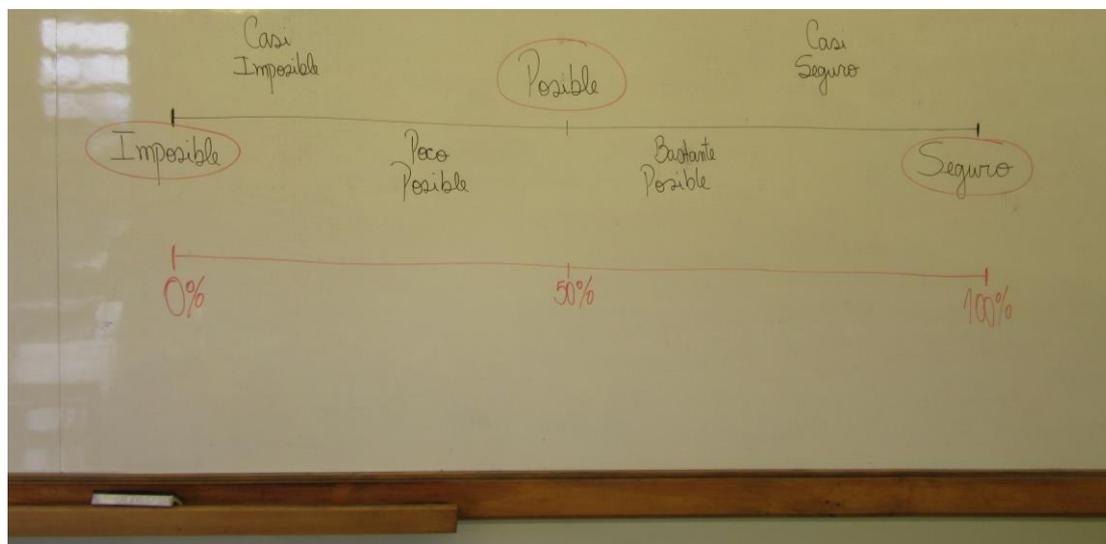


Figura 6 – Escala de cuantificación de los grados de posibilidad de ocurrencia propuesta por el maestro.

Fuente: Imagen capturada desde la pizarra de la clase videograbada.

Las cuatro situaciones problemas implementadas durante el transcurso de la sesión de clase muestran cómo los primeros elementos lingüísticos se configuran en la adquisición del lenguaje probabilístico, utilizando un amplio lenguaje verbal compuesto por una gran variedad de términos y expresiones verbales vinculadas a nociones y conceptos básicos iniciales de probabilidad, los cuales hemos clasificado en el Cuadro 5, de acuerdo con la categorización propuesta por Shuard y Rothery (1984).

Expresiones verbales específicas	Expresiones verbales vinculadas	Expresiones verbales comunes
Suceso Evento Aleatorio Experimento Probabilidad	Seguro Acertar Azar Imposible Estimar Anticipar Juegos de azar	Suerte Más posible Menos posible Adivinar Sin querer Casualidad Conocer el resultado Predecir Poco probable Más fácil Más difícil Posibilidad de ocurrir

Cuadro 5 - Términos y expresiones verbales presentes en la primera sesión analizada.

Fuente: Cuadro elaborado a partir de lo observado y escuchado en las videograbaciones.

Los términos y expresiones identificadas se vinculan principalmente a la categoría de expresiones comunes, cuyos significados son muy próximos tanto en el contexto matemático como en el cotidiano, lo que concuerda con las orientaciones curriculares nacionales y la edad de los alumnos. Además, se observa que la gran mayoría de las expresiones utilizadas en esta sesión inicial se vinculan al concepto de *aleatorio* y se asocian con el significado intuitivo de la probabilidad.

En lo que respecta al lenguaje numérico y simbólico, en la situación problema 4 se observa un primer acercamiento a lo que es la cuantificación de los grados de posibilidad, pero a un nivel muy inicial, que busca más bien destacar que una situación catalogada como *imposible* tendrá una probabilidad de ocurrencia de 0%, mientras que una situación catalogada como *segura* tendrá probabilidad de ocurrencia de 100%, de igual manera una situación catalogada como *posible* tendrá una probabilidad de ocurrencia de 50%.

En el caso del lenguaje tabular y gráfico, no se observa el uso de ningún tipo de representación ni gráfica ni tabular, pese a que de acuerdo con lo planteado por las orientaciones curriculares chilenas, en este nivel los alumnos deben ser capaces de comprender nociones tales como *posible*, *poco posible*, *muy posible* e *imposible*, y a la vez deben ser capaces de registrar en tablas y gráficos de barra simple, resultados de juegos aleatorios con dados y monedas (MINEDUC, 2012).

5 Reflexiones finales

En este trabajo hemos presentado un estudio sobre los primeros elementos lingüísticos que emergen en el contexto de una primera clase de probabilidad con alumnos de Educación Primaria que no han recibido instrucción previa sobre el tema. Los datos obtenidos permiten establecer tanto los distintos significados de probabilidad que predominan en el aula como focos en la adquisición del lenguaje probabilístico.

A lo largo de la sesión de clase se observa que el maestro propone situaciones problemas enmarcadas, principalmente, en el significado intuitivo y subjetivo de la probabilidad. En lo que respecta al significado intuitivo, se presentan situaciones centradas en experiencias de vida cotidiana, que buscan que los alumnos logren expresar sus grados de creencia acerca de la posibilidad de ocurrencia de determinados sucesos, propiciando el uso de un lenguaje cotidiano. Asimismo, en concordancia con Batanero (2015), se da énfasis a la importancia de las intuiciones y las experiencias previas de los niños como un elemento base para el desarrollo del pensamiento probabilístico y por ende de la alfabetización probabilística.

Esto se evidencia en la totalidad de las situaciones propuestas, por medio de las cuales el maestro promueve la discusión entre los alumnos, propiciando que estos intercambien sus ideas y argumentos en torno a sus grados de creencia acerca de la posibilidad de ocurrencia de sucesos, de manera tal que sean capaces de “compartir ideas y clarificar su comprensión, de construir argumentos convincentes respecto del cómo y el por qué las cosas funcionan, de desarrollar un lenguaje para expresar las ideas matemáticas y de aprender a mirar las cosas desde otra perspectiva” (NCTM, 2015, p. 30).

Con esta finalidad, y en correspondencia con la propuesta de Gal (2002, 2005), se utiliza un lenguaje cotidiano que, finalmente, es llevado a una escala cualitativa que permitirá expresar distintos grados de posibilidad de ocurrencia para un determinado suceso (situación problema 2). Por su parte, el significado subjetivo se encuentra implícito en las situaciones problemas 2, 3 y 4 dado que los alumnos para asignar una posibilidad de ocurrencia, deben discutir sus puntos de vista y fundamentar su elección, lo que puede llevarles a asignar distintos grados de posibilidad de ocurrencia en función de la información de la cual dispongan o bien de sus conocimientos previos, reflexionando acerca del carácter subjetivo de la probabilidad.

En consecuencia, se observa en concordancia con lo planteado por Godino, Batanero y Cañizares (1987), un predominio del lenguaje probabilístico como elemento articulador en el

inicio del aprendizaje de la probabilidad, sobre todo en los primeros niveles educativos, constatándose, de este modo, el potencial de las situaciones propuestas para propiciar y fundamentar el desarrollo de la alfabetización probabilística a partir de la comprensión y utilización de las diversas formas que se utilizan para comunicar el azar y la probabilidad.

En relación al análisis de los distintos focos o tipos de lenguaje que promueven la adquisición del lenguaje probabilístico (verbal, numérico, tabular, gráfico y simbólico), podemos señalar que se observa un fuerte predominio del lenguaje verbal y cotidiano en la introducción de las primeras nociones y conceptos básicos sobre azar y probabilidad. Este dato coincide con lo propuesto por las orientaciones curriculares vigentes (MINEDUC, 2012; MEC, 2006; NCTM, 2000) como con diversos trabajos que han señalado las fases de adquisición de los conocimientos probabilísticos en las primeras etapas educativas (GODINO; BATANERO; CAÑIZARES, 1987; ALSINA, 2013; VÁSQUEZ; ALSINA, 2014; ALSINA, 2016; ALSINA; VÁSQUEZ, 2016; VÁSQUEZ, 2016).

En ellos se señala que la primera fase de adquisición de conocimientos probabilísticos se caracteriza por la adquisición de lenguaje probabilístico elemental (nociones como *seguro*, *probable* o *imposible*), asociado al significado intuitivo de la probabilidad. Lo anterior, ayuda a cimentar el camino para la adquisición del pensamiento probabilístico por medio de la construcción de conocimiento matemático en situaciones donde este tenga sentido, así como a través de la experimentación, intuición y capacidad para relacionar y abstraer conceptos (ALSINA, 2013).

También fue posible observar, cómo los alumnos van avanzando hacia la adquisición de nuevos conceptos vinculados al azar y a la probabilidad (lenguaje más específico) a partir de sus intuiciones e ideas previas (lenguaje cotidiano común). No obstante, cabe señalar que este lenguaje probabilístico más específico no se desarrolla ni se propicia en toda su magnitud, ya que se observa una baja utilización del lenguaje numérico, simbólico, tabular y gráfico, pese a que estos dos últimos se explicitan en las orientaciones curriculares chilenas de Educación Primaria.

A través de este estudio ha sido posible identificar cómo el lenguaje probabilístico comienza a surgir a partir de experiencias de vida cotidiana y va configurándose poco a poco hacia un lenguaje de corte probabilístico, donde los conceptos de *imposible*, *posible*, *seguro* e *incierto* desempeñan un rol fundamental. Al igual que en la investigación de Green (1983), el grupo de alumnos que participaron de la sesión de clase analizada presentan, de manera inicial, una baja comprensión y dominio del lenguaje vinculado a conceptos iniciales de probabilidad. Uno de los conceptos que mayor dificultad presentó en un comienzo fue el de

imposible, el cual los alumnos utilizan para referirse a situaciones que tienen escasa posibilidad de ocurrir, lo que coincide en cierta medida con los resultados obtenidos por Cañizares (1997). Sin embargo, durante el transcurso de la clase, los alumnos logran avanzar en la comprensión de este concepto, llegando a ser uno de los que menor dificultad presenta al finalizar la sesión de clase.

Desde esta perspectiva, nuestro análisis sugiere que los alumnos de los primeros niveles de Educación Primaria si poseen conocimientos previos y experiencias provenientes desde el contexto cotidiano que posibilitan el estudio de la probabilidad desde las primeras edades. Por tanto, es importante que al momento de iniciar el estudio de la probabilidad se considere el desarrollo de las primeras nociones y elementos de aproximación hacia la adquisición y el desarrollo del lenguaje probabilístico.

En otras palabras, los conceptos de probabilidad son conceptos complejos con un alto grado de abstracción, por lo que es necesario avanzar de manera gradual hacia la comprensión adecuada del lenguaje específico de la probabilidad para así aproximarse a la cuantificación de la incerteza, y finalmente al cálculo de probabilidades en los últimos cursos de Educación Primaria.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco del proyecto FONDECYT INICIACIÓN N° 11150412 financiado por la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica de Chile. Los autores agradecen la buena disposición a los participantes en la investigación.

Referencias

- ALSINA, Á. La estadística y la probabilidad en educación infantil: conocimientos disciplinares, didácticos y experienciales. **Didácticas Específicas**, Madrid, n. 7, p. 4-22, dic. 2013.
- ALSINA, Á. La estadística y la probabilidad en educación primaria. ¿Dónde estamos y hacia dónde debemos ir? **Aula de Innovación Educativa**, Barcelona, n. 251, p. 12-17, may. 2016.
- ALSINA, Á.; VÁSQUEZ, C. La probabilidad en educación primaria. De lo que debería enseñarse a lo que se enseña. **Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas**, Barcelona, n. 71, p. 46-52, ene. 2016
- BATANERO, C. Significados de la probabilidad en la educación secundaria. In: CANTORAL, O. R. et al. (Ed.). **Investigaciones Sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas: un reporte iberoamericano**. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C. - Díaz de Santos, 2007. p. 25-37.

- BATANERO, C. Understanding randomness: challenges for research and teaching. In: PLENARY LECTURE. NINTH CONGRESS OF EUROPEAN RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 9., 2015, Prague, Czech Republic.
- BATANERO, C.; BURRILL, G.; READING, C. Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. **A JOINT ICMI AND IASE STUDY**. ed. 2011. New York: Springer, 2011. 425p.
- BATANERO, C.; BURRILL, G.; READING, C.; ROSSMAN, A. Joint ICMI and IASE Study: teaching statistics in school mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. In: ICMI, 18, 2008, Monterrey. **Proceedings....** Monterrey: ICMI and IASE, 2008.
- BATANERO, C.; HENRY, M.; PARZYSZ, B. The nature of chance and probability. In: JONES, G. (Ed.). **Exploring Probability in School: challenges for teaching and learning**. Nueva York: Ed. Springer, 2005. p. 15-37.
- BENNETT, D. J. **Randomness**. Cambridge: Harvard University Press, 1998. 177p.
- BISQUERRA, R. **Metodología de la Investigación Educativa**. 2da. ed. La Muralla, España, 2009. 459p.
- CAÑIZARES, M. J. **Influencia del Razonamiento Proporcional y de las Creencias Subjetivas en las Intuiciones Probabilísticas Primarias**. 1997. 191f. Tesis (Doctorado en Didáctica de la Matemática) – Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada, 1997.
- COMMON CORE STANDARDS INITIATIVE, CCSI. **Standards for Mathematical Practice**, 2010. Disponible en: <http://www.corestandards.org/>. Acceso en: 17 jul. 2013.
- CLIMENT, N. **El Desarrollo Profesional del Maestro de Primaria Respecto de la Enseñanza de la Matemática: un estudio de caso**. 2002, 375f. Tesis (Doctorado en Didáctica de la Matemática) - Universidad de Huelva, Huelva, 2002.
- DARLING-HAMMOND, L.; WEI, R. C.; JOHNSON, C. M. Teacher preparation and teacher learning: a changing policy landscape. In: SYKES, G.; SCHNEIDER, B. L.; PLANK, D. N. (Ed.). **Handbook of Education Policy Research**. New York: Ed. American Educational Research Association and Routledge, 2009. p. 613- 636.
- EVEN, R.; BALL, D. L. The professional education and development of teachers of mathematics. **The 15th ICMI Study**. 1era. ed. New York: Springer, 2009. 280 p.
- EVERITT, B. S. **Chance Rules: an informal guide to probability, risk, and statistics**. 2da. ed. New York: Copemicus|Springer-Verlag, 1999. 197 p.
- FINE, T. L. **Theories of Probability: an examination of foundations**. 1 era. ed. Londres: Academic Press., 1971. 276 p.
- FISCHBEIN, E. **The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children**. 1 era. ed. Dordrecht: Reidel, 1975. 210 p.
- FISCHBEIN, E.; GAZIT, A. Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? **Educational Studies in Mathematics**, New York, v.15, n. 1, p. 1-24, feb. 1984.
- FONT, V.; GODINO, J. D. La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. **Educação Matemática Pesquisa**, n. 8, p. 67-98, 2006.

- GAL, I. Adults' statistical literacy: meanings, components, responsibilities. **International Statistical Review**, n. 70, p. 1-25, 2002.
- GAL, I. Towards 'probability literacy' for all citizens. In: JONES, G. (Ed.). **Exploring Probability in School: challenges for teaching and learning**. USA: Ed. Kluwer Academic Publishers, 2005. p. 43-71.
- GAL, I. Developing probability literacy: needs and pressures stemming from frameworks of adult competencies and mathematics curricula. In: CHO, S. J. (Ed.). **INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION**, 12., 2012, Korea. **Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education**. Seoul: 2012. p. 1-7.
- GODINO, J. D.; BATANERO, C.; CAÑIZARES, M. J. **Azar y Probabilidad. Fundamentos Didácticos y Propuestas Curriculares**. 1era. ed. Madrid: Editorial Síntesis, 1987. 184p.
- GÓMEZ, E. **Evaluación y Desarrollo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza de la Probabilidad en Futuros Profesores de Educación Primaria**. 2014. 303f. Tesis (Doctorado en Didáctica de la Matemática) – Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada, 2014.
- GÓMEZ, E.; ORTIZ, J. J.; BATANERO, C.; CONTRERAS, J. M. El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. **Unión**, n. 35, p. 75-91, 2013.
- GREEN, D. R. A survey of probabilistic concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. In: GREY, D. R. Cols. (Ed.). **Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics**. Universidad de Sheffield, 1983. p. 766-783.
- HATTIE, J. A. C. **Visible learning for teachers**. 1era. ed. London: Routledge, 2012. 296 p.
- HOOVER, M. Commentary on Section 1: mounting progress on understanding mathematics teacher content knowledge. In: LO, J. J. et al. (Ed.). **Research Trends in Mathematics Teacher Education**. Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London: Ed. Springer, 2014. p. 83-90.
- JONES, G.A.; LANGRALL, C.W.; MOONEY, E.S. Research in probability: responding to classroom realities. In: LESTER JR., F. K. (Ed.). **The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics**. Charlotte: Ed. Information Age Publishing, 2007. p. 909-95.
- LAPLACE, P. S. **Ensayo Filosófico Sobre las Probabilidades**. 1era. ed. Madrid: Alianza Editorial (trabajo original publicado en 1814), 1985. 144 p.
- LEE, C. **El Lenguaje en el Aprendizaje de las Matemáticas**. 2da. ed. Madrid: Morata, 2010. 207 p.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN. **Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria**. España: Ministerio de Educación y Cultura, 2006.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN. **Ley General de Educación**. Unidad de Curriculum y Evaluación: Santiago de Chile, 2009.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN. **Bases Curriculares 2012: Educación Básica Matemática**. Unidad de Curriculum y Evaluación: Santiago de Chile, 2012.
- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. Principios y estándares para la educación matemática. Traducción de Castellana. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 2003.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics**. Reston: NCTM, 1989.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston: the National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **De los Principios a la Acción. Para Garantizar el Éxito Matemático para Todos**. Reston: The National Council of Teachers of Mathematics, 2015.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **La genése de l'idée de hasard chez l'enfant**. 1era. ed. Paris: Presses Universitaires de France, 1951. 265 p.

ROJAS, N.; CARRILLO, J.; FLORES, P. Características para identificar a profesores de matemáticas expertos. In: ESTEPA, A. A. et al. (Ed.). **Investigación en Educación Matemática XVI**. Jaén: Ed. SEIEM, 2012. p.479-485.

SCHAEFFER, R. L.; WATKINS, A. E.; LANDWEHR, J. M. What every high-school graduate should know about statistics. In: LAJOIE, S. P. (Ed.). **Reflections on Statistics: learning, teaching and assessment in Grades K-12**. Mahwah: Ed. Lawrence Erlbaum, 1998. p. 3-31.

SHUARD, H.; ROTHERY, A. **Children Reading Mathematics**. 1era. ed. Londres: Murray, 1984. 170 p.

STHOL, H. Probability in teacher education and development. In: JONES, G. (Ed.). **Exploring Probability in Schools: challenges for teaching and learning**. Nueva York: Ed. Springer, 2005. p. 345-366.

VÁSQUEZ, C. **Evaluación de los Conocimientos Didáctico-Matemáticos Para la Enseñanza de la Probabilidad de los Profesores de Educación Primaria en Activo**. 2014. 560f. Tesis (Doctorado en Educación) – Departament de Didàctiques Específiques, Universitat de Girona, Girona, 2014.

VÁSQUEZ, C. Bolas, fichas, monedas ... ¿Cómo podemos ir introduciendo la probabilidad en primaria? **Aula de Innovación Educativa**, Barcelona, n. 251, p. 23-27, may. 2016.

VÁSQUEZ, C.; ALSINA, A. Enseñanza de la probabilidad en educación primaria: un desafío para la formación inicial y continua del profesorado. **Números**, n. 85, p. 5-23, 2014.

VÁSQUEZ, C.; ALSINA, A. Evaluación del conocimiento común del contenido para enseñar probabilidad en profesores de Educación Primaria. In: FERNÁNDEZ, C.; MOLINA, M.; PLANAS, N. (Ed.). **Investigación en Educación Matemática XIX**. Alicante: Ed. SEIEM, 2015. p. 511-520.

WATSON, J. M. Profiling teachers competence and confidence to teach particular mathematics topics: the case of chance and data. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Dordrecht, v. 4, n. 4, p. 305-337, dic. 2001.

Submetido em Junho de 2016.
Aprovado em Outubro de 2016.