

## Treball final de grau

**Estudi: Grau en Tecnologies Industrials**

**Títol: Anàlisi sobre l'estabilitat dels amarratges espacials**

**Document: Memòria**

**Alumne: Cristina Castillo Cañabate**

**Director/tutor: Esther Barrabes Vera**

**Departament: Informàtica, Matemàtica Aplicada i Estadística**

**Àrea: Matemàtica Aplicada**

**Convocatòria (mes/any): 02/2016**



# ÍNDEX

1-	Introducció.....	3
1.1.	Antecedents.....	3
1.2.	Objecte.....	3
1.3.	Especificacions i abast .....	4
2-	Amarres espacials.....	6
2.1.	Què és una amarra espacial o <i>tether</i> ?.....	6
2.2.	Principis de funcionament dels tethers .....	7
2.3.	Variants de tethers.....	9
2.4.	Aplicacions dels tethers.....	10
2.5.	Model de referència: SEDS-II .....	11
3-	Model simplificat d'un tether al pla.....	12
3.1.	Presentació del model.....	12
3.2.	Estudi analític del model .....	15
3.3.	Resultats i observacions .....	18
4-	Model ampliat d'un tether a l'espai .....	24
4.1.	Presentació del model.....	24
4.2.	Anàlisi de l'estabilitat lineal dels punts d'equilibri.....	27
4.3.	Resultats i observacions .....	29
4.3.1.	Punts d'equilibri i valors propis.....	30
4.3.2.	Resultats i il·lustracions.....	32
5-	Model d'un tether electrodinàmic .....	35
5.1.	Presentació del model.....	36
5.2.	Resultats i observacions .....	38
5.3.	Conclusions.....	47
6-	Resum del pressupost .....	48
7-	Conclusions.....	49
8-	Relació de documents.....	51
9-	Bibliografia .....	52
10-	Glossari .....	53
	Annexos .....	54
A-	Codi informàtic .....	54
A.3-	Codi del model simplificat d'un tether al pla.....	54
A.4-	Codi del model ampliat d'un tether a l'espai .....	65

A.5- Codi del model d'un tether electrodinàmic.....	76
B- Pressupost.....	87

# 1- Introducció

## 1.1. Antecedents

La motivació per realitzar aquest treball es deu a l'interès que sento per complementar els coneixements adquirits durant els estudis d'enginyeria amb aplicacions de sistemes dinàmics i l'ús d'eines informàtiques per a la resolució d'aquests. D'aquesta manera pretenc introduir-me en un tema que considero de gran interès professional.

Per entendre l'objecte d'aquest treball cal conèixer prèviament el concepte d'amarres espacials. Aquestes són, com a definició més bàsica, cables que s'utilitzen per unir dos o més satèl·lits o naus espacials. D'ara endavant, ens referirem a les amarres espacials amb la seva denominació en anglès: *tether*.

## 1.2. Objecte

Des de fa unes dècades, el concepte de tether ha despertat gran interès en l'àmbit de l'exploració espacial. Això és degut a que els tethers poden ser utilitzats per satisfer moltes funcions diferents amb un pressupost molt reduït.

Conceptualment, definim un tether com una amarra que uneix dos o més cossos perquè orbitin conjuntament. Aquests poden ser de molts materials i tenir geometries diferents. L'aplicació més rudimentària és actuar de corda salvavides pels astronautes durant els passejos espacials. Una aplicació de gran interès que s'està estudiant actualment és la de reduir la quantitat de deixalles espacials ja que són un problema a causa de la seva gran abundància. El ventall de possibles aplicacions que ofereixen els tethers és molt extens i dissenyar-ne un correctament per que realitzi la seva tasca amb eficàcia, requereix d'un anàlisi i una planificació molt estrictes degut a la precisió necessària en els càlculs.

En aquest treball estudiarem tres models matemàtics que simulen el comportament d'un tether.

Un concepte clau d'aquest treball és el d'estabilitat d'un tether. El concepte d'estabilitat variarà per a cada model, però essencialment definim com a estable un comportament intern del tether que no sigui caòtic. Per analitzar l'estabilitat, descomponem el moviment del tether en dos: la trajectòria que segueix a l'orbitar al voltant de la Terra i el desplaçament dels cossos extrems respecte el seu centre de masses. Aquest segon moviment és el que s'utilitza per estudiar l'estabilitat dels tethers i serà l'objecte d'estudi en aquest treball.

S'anomena *Tethered Satellite System* (d'ara endavant TSS) el conjunt del tether i els cossos que hi estan connectats.

Els models que estudiarem representen, de manera simplificada:

- 1) El comportament dinàmic d'un tether que es mou en un espai bidimensional. Amb aquest model pretenem entendre els principis bàsics que regeixen el moviment dels TSS i la importància d'una tria adequada dels materials emprats en la fabricació dels tethers.
- 2) El comportament dinàmic d'un tether que es mou en un espai tridimensional. Aquest model és més realista que l'anterior i pretenem estudiar la seva estabilitat.
- 3) El comportament d'un tether conductor de corrent elèctric i sotmès a l'acció del parell de Lorenz. Amb aquest model volem estudiar l'estabilitat del tether en funció de la inclinació de l'òrbita que segueix, la magnitud del parell de Lorenz i les condicions inicials des de les que parteix el tether.

### 1.3. Especificacions i abast

En aquest treball estudiarem diferents models matemàtics que simulen el comportament dinàmic dels tethers. A continuació es detalla l'abast de l'estudi dels tres models.

En el primer model estudiarem com varia el comportament del tether en funció del material del que està fet el tether. En aquest sentit, no volem comprovar la factibilitat de l'ús dels materials per a la aplicació en tethers sinó avaluar la contribució del mòdul elàstic en la resposta dinàmica del tether.

En el segon model pretenem trobar condicions inicials del tether per garantir l'estabilitat a través d'estudiar els punts d'equilibri i la seva estabilitat.

En el tercer model volem estudiar quines condicions inicials afecten a l'estabilitat a curt termini del tether i en quina mesura ho fan.

Al llarg d'aquest treball estudiarem l'estabilitat dels tethers. Cal dir que no pretenem donar instruccions exactes per aconseguir l'estabilitat d'un tether concret, sinó que pretenem explicar els conceptes que permetin entendre el comportament dinàmic dels tethers.

## 2- Amarres espacials

### 2.1. Què és una amarra espacial o *tether*?

La primera concepció d'una estructura similar a un tether va sorgir l'any 1895 a mans del rus Konstantin Tsiolkovsky, científic soviètic que va proposar la idea d'una torre tan alta que seria capaç de rotar sincrònicament amb la Terra, tal i com ho faria un satèl·lit geostacionari. Era una idea impossible de portar a terme ja que no disposaven de la tecnologia necessària. Tot i així, va generar interès sobre la creació d'alguna mena d'elevador espacial.

L'any 1970, Jerome Pearson va proposar la idea d'un elevador espacial a la Lluna. Un tether que giraria sincrònicament amb el satèl·lit natural i permetria transportar objectes des de l'espai a la superfície lunar i viceversa. Ja en aquella època es disposava de tecnologia suficient per fer realitat aquesta idea, de manera que la possibilitat d'aplicar-la a la Terra prenia més força.

No va ser fins l'any 1979 que la NASA va estudiar la factibilitat dels elevadors espacials i va començar a estudiar els tethers i, més concretament, els grups de satèl·lits units per tethers (*Tethered Satellite Systems* o TSS).

Actualment els tethers estan constituïts per un cable fabricat amb materials molt resistents, amb mòduls de Young molt elevats i molt baixa densitat amb l'objectiu d'obtenir un tether amb una relació rigidesa/massa òptima. L'objectiu dels tethers és unir dos o més cossos extrems (que poden ser satèl·lits, sondes, naus espacials o fins i tot l'Estació Espacial Internacional).

En funció de l'altura a la que orbita un cos distingim diferents tipus d'òrbites. De menor a major altura, existeixen:

- Òrbites baixes terrestres o LEO (*Low Earth Orbit*). Es consideren LEO altures orbitals entre els 200 i els 2000 km respecte el nivell del mar.
- Òrbites mitges terrestres o MEO (*Medium Earth Orbit*). Es consideren MEO altures orbitals entre els 2000 i els 35786 km respecte el nivell del mar.



- Òrbites geosincròniques o GSO (Geosynchronous Orbit) i òrbites geostacionàries o GEO (Geosynchronous Equatorial Orbit). Aquestes òrbites es troben a una altura aproximada de 35786 km i tenen la propietat de tenir un període orbital igual al de la Terra. Les GEO són un cas particular de les GSO, tenint la particularitat d'estar situades en tot moment dins el pla equatorial de la terra.
- Òrbites altes terrestres o HEO (*High Earth Orbit*), són aquelles amb una altura superior a 35786 km.

La majoria de TSS orbiten en òrbites baixes terrestres o LEO. Orbitar cossos a aquesta altura ofereix l'avantatge de tenir uns costos de llançament molt reduïts en comparació amb els costos per òrbites superiors. El desavantatge de triar una òrbita LEO és l'alta presència de brossa espacial, que pot provocar xocs inesperats amb el TSS i malmetre'n alguns components.

## 2.2. Principis de funcionament dels tethers

En aquest apartat explicarem els principis bàsics que permeten entendre com funciona un TSS. Per fer-ho, prendrem el cas més simple de tots: un tether totalment rígid, que uneix dues masses extremes i orbita dins el pla equatorial terrestre amb una òrbita circular. Es defineix la vertical local com la línia perpendicular a la òrbita del TSS i que passa pel centre de la Terra. La distància

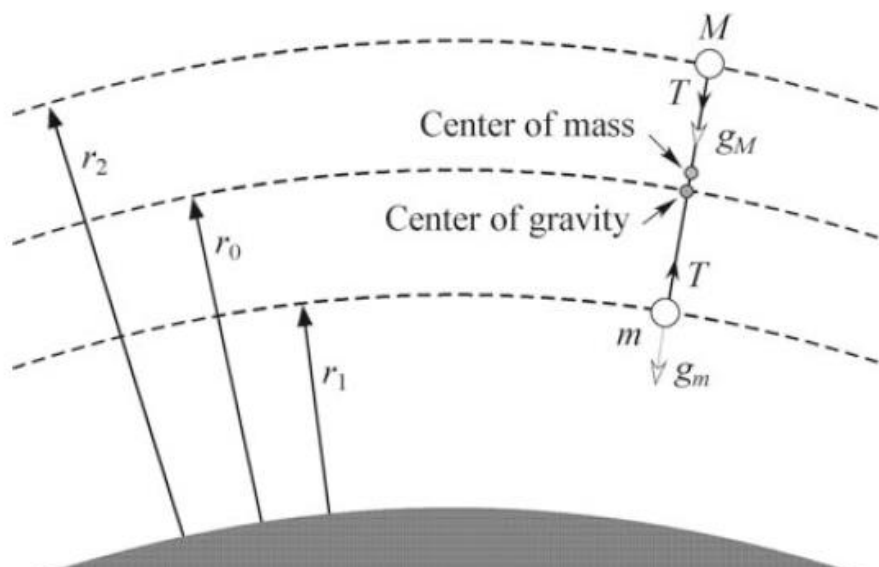


Figura 1: representació d'un TSS que es desplaça en òrbita equatorial circular. El tether es troba alineat amb la vertical local. Font: [5].

des de la superfície terrestre fins el centre de gravetat del TSS es defineix com l'altura orbital. El centre de gravetat del TSS es troba en un punt entre els cossos extrems (el punt exacte depèn del valor de les masses extremes i la del tether). Suposant que el tether es troba alineat amb la vertical local, tal i com s'observa a la figura 1, cada cos extrem es troba sotmès a dues forces oposades. Per una banda, la força gravitacional terrestre i, per l'altra, la força centrífuga deguda a la rotació del TSS al voltant de la Terra.

Les equacions que mesuren la força total que experimenta cada massa [5] són:

$$\begin{aligned}\mu m/r_1^2 - T &= m\Omega^2 r_1, \\ \mu M/r_2^2 + T &= M\Omega^2 r_2,\end{aligned}\tag{2.1}$$

on  $T$  representa la tensió del tether,  $\mu$  és la constant gravitacional de la Terra,  $r_1$  i  $r_2$  són les distàncies orbitals de cada cos,  $M$  i  $m$  representen la massa de cada cos i  $\Omega$  representa la velocitat angular del TSS. La part esquerra de les equacions representa el sumatori de la força gravitacional amb la tensió mentre la part dreta representa la força centrífuga. Anàlogament es pot entendre que la part esquerra tendeix a apropar les masses de la Terra mentre que la part dreta les tendeix a allunyar.

D'aquestes equacions es pot deduir fàcilment que la força centrífuga de la massa inferior ( $m$ , amb un radi orbital inferior al radi orbital del centre de masses) és inferior a la força gravitacional. Per tant, la força vertical resultant tendeix a reduir el radi orbital.

Per altra banda, la força centrífuga de la massa superior  $M$  és superior a la força gravitacional. Per tant, la força vertical resultant tendeix a augmentar el radi orbital. Podem entendre així que la tensió serà la força que manté els dos cossos en una òrbita conjunta.

Suposant ara que el TSS es troba inclinat respecte la vertical local, tal i com es mostra a la figura 2, la resultant del sumatori de forces a cada massa es pot descompondre en dues forces ortogonals amb el tether. Així doncs, les forces alineades amb el tether tendeixen a mantenir-lo tensat mentre que les forces normals al tether tendeixen a col·locar el TSS alineat amb la vertical local. Per tant, aquesta posició vertical es considera un punt d'equilibri estable, ja que petites desviacions d'aquesta posició tendeixen a desaparèixer.

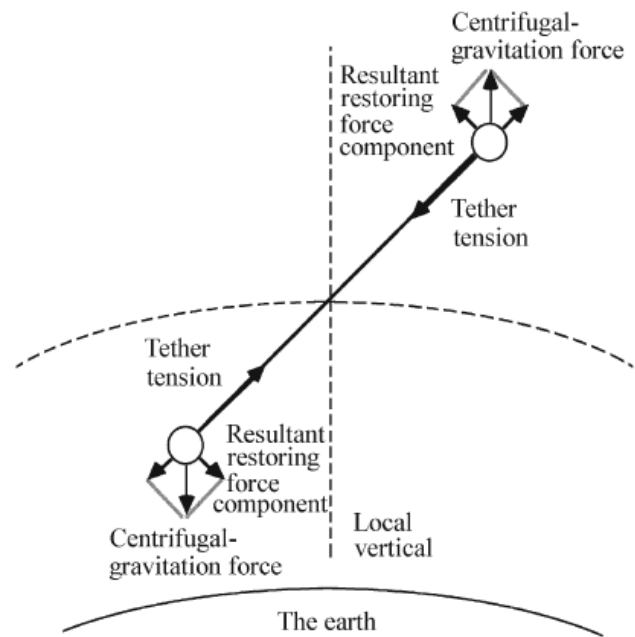


Figura 2: descomposició del sumatori de forces a cada cos extrem en el cas d'un tether inclinat respecte la vertical local.  
Font: [5].

### 2.3. Variants de tethers

Principalment, podem distingir dos grans grups de tethers en funció: els MET (*momentum Exchange tethers*) i els EDT (*Electrodynamic tether*).

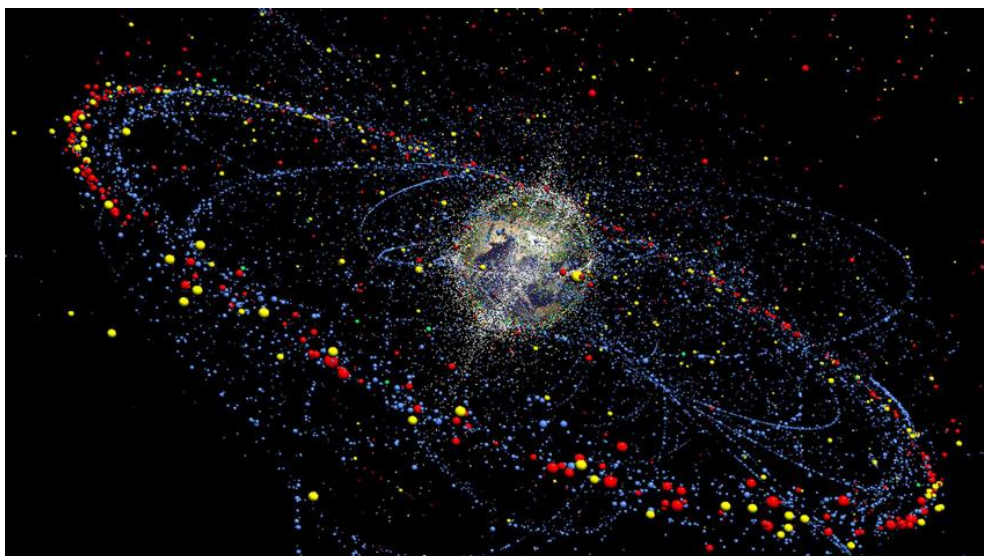
- *Momentum Exchange tethers*: aquests tethers tenen com objectiu la transmissió d'energia cinètica entre les masses extremes. Si en un moment determinat els cossos extrems d'un TSS es separen del tether, segons la equació 2.1 el cos superior ( $m_2$ ) augmentarà la seva altura orbital al desaparèixer la tensió. Per altra banda, el cos inferior ( $m_1$ ) disminuirà la seva altura orbital pel mateix motiu. Una aplicació pràctica dels MET és la de facilitar la tornada a la Terra de les naus espacials des de la Estació Espacial Internacional. Per fer-ho, s'uneix la estació amb la nau mitjançant un tether. En aquest cas, també resulta beneficiós el guany en altura de la pròpia estació.
- *Electrodynamic tether*: aquests tethers estan fabricats amb materials conductors de l'electricitat i fan ús del camp magnètic i la ionosfera terrestres per generar una força de Lorentz en el centre de gravetat del

TSS en la direcció del moviment del TSS, bé en el mateix sentit o en l'oposat. D'aquesta manera és possible variar la velocitat en la que orbita un TSS, que en conseqüència en varia la seva altura orbital. Aquesta aplicació dels EDT resulta molt interessant per aconseguir augmentar o disminuir l'altura orbital d'un cos sense haver de separar els cossos extrems del tether.

## 2.4. Aplicacions dels tethers

Actualment els tethers s'utilitzen, principalment, en missions de recerca de TSS per aprendre sobre la seva dinàmica i les possibilitats que ofereixen. Per altra banda, la aplicació més simple d'un tether és la de mesura de seguretat dels astronautes durant les sortides espacials.

Altres aplicacions que s'estan investigant són la de desorbitar brossa espacial (veure figura 3), augmentar l'òrbita de satèl·lit mitjançant un intercanvi d'energia cinètica entre els dos cossos extrems, el vol de diferents satèl·lits en formació mantenint-se units mitjançant una xarxa de tethers i, fins i tot, la possibilitat de crear un elevador espacial que permeti transportar objectes des de la superfície terrestre fins a una òrbita LEO.



*Figura 3: S'estima que uns 27.000 objectes de diàmetre igual o superior a 10 cm es troben orbitant la Terra. Font: [6].*

## 2.5. Model de referència: SEDS-II

En els tres models matemàtics que estudiem en aquest treball, prenem com a referència les magnituds físiques del TSS SEDS-II, extretes dels llibres [3] i [7].

El TSS SEDS-II va ser llançat l'any 1994 per *la Harvard-Smithsonian Center of Astrophysics* en col·laboració amb la *NASA Marshall Space Flight Center* i la universitat de Padua. La seva missió era avaluar el control del moviment de libració del tether.

Les dades del SEDS-II que hem utilitzat en els models estudiats són:

$$m_1 = m_2 = 26 \text{ kg} ,$$

$$d = 20.000 \text{ m} .$$

Cal dir que en certes ocasions prenem valors diferents a aquestes variables amb l'objectiu d'obtenir uns resultats fàcilment interpretables.

### 3- Model simplificat d'un tether al pla

En aquest capítol s'estudiarà el model d'un TSS no pertorbat en el pla i com afecta l'ús de tethers de diferents materials en la variació de la distància entre els dos cossos extrems.

#### 3.1. Presentació del model

El comportament real d'un tether es pot descompondre en un moviment dominant i unes pertorbacions, que s'ocasionen per l'efecte de forces externes que depenen o no del moviment dominant del sistema.

Aquestes pertorbacions són petites en comparació amb el moviment dominant. Per intervals de temps petits el moviment del tether serà pràcticament com un sistema sense pertorbacions. Com que l'objectiu d'aquest capítol no requereix l'estudi del tether per períodes de temps grans, l'ús d'un model no pertorbat és l'adequat. Estudiar els models pertorbats en general és difícil i té un cost computacional important.

Així, es considera el moviment d'un tether no pertorbat dins un pla, el qual gira al voltant de la Terra, on els dos cossos extrems es consideren masses puntuals

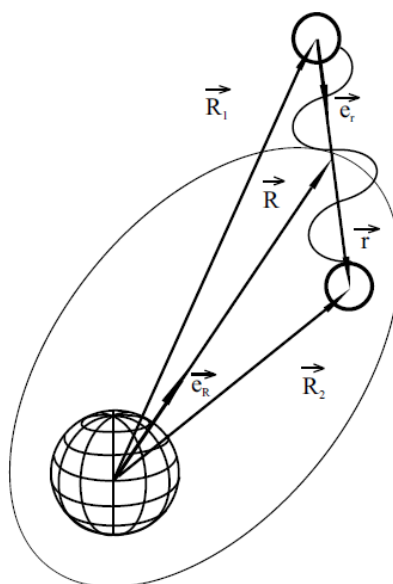


Figura 4: representació del model simplificat d'un tether. Apreciem les distàncies  $e_R$  i  $e_r$  entre la Terra i el TSS. Font (1).

i es negligeix la massa del tether. Les forces que actuen sobre les masses puntuals són la atracció gravitacional de la Terra i la tensió del tether.

La figura 4 representa el significat de les variables  $\vec{R}$ ,  $\vec{r}$ ,  $\vec{e}_R$  i  $\vec{e}_r$  que apareixen a les equacions 3.1.1 i 3.1.2. Així, aquestes representen la distància entre el centre de la Terra i el centre de masses del TSS, la distància entre les dues masses del sistema i els vectors unitaris en les respectives direccions.

El moviment del TSS es desacobla en dos. D'una banda, el sistema gira al voltant de la Terra i, de l'altre, les dues masses es mouen al voltant del seu centre de masses.

El moviment al voltant de la Terra ve descrit per la equació [4]:

$$\ddot{\vec{R}} = -\frac{\mu}{R^2} \vec{e}_R. \quad (3.1.1)$$

En aquest sistema la Terra es considera una massa puntual i el centre de masses del sistema segueix un moviment Keplerià. És conegut que totes les solucions acotades de 3.1.1 són òrbites circulars o el·líptiques.

Ens centrarem en l'estudi del moviment intern del TSS, que estarà governat per la tensió interna. Així, tenim l'equació [4]:

$$\ddot{\vec{r}} = -T \vec{e}_r. \quad (3.1.2)$$

En aquest capítol ens centrarem en la equació 3.1.2. Emprant coordenades polars ( $r \cos \phi$ ,  $r \sin \phi$ ), i considerant que el moment angular del sistema és constant, obtenim les equacions [4]:

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 &= -T, \\ r^2\dot{\phi} &= L, \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

on:

- T representa la tensió del tether [N].
- L representa el moment angular del TSS [kg·m<sup>2</sup>/s].
- r representa la distància entre els cossos extrems [m].

- $\phi$  representa l'angle format entre les dues masses extremes i la vertical local [rad].

Les equacions 3.1.3 representen un sistema d'equacions diferencials de segon ordre. Per poder realitzar la integració numèrica, cal expressar-ho com un sistema de primer ordre. Per això, definim les variables següents:

$$r = x_1 ,$$

$$\phi = x_2 ,$$

$$\dot{r} = x_3 .$$

Substituint ara aquestes igualtats a les equacions 3.1.3:

$$\dot{x}_1 = \dot{r} = x_3 ,$$

$$\dot{x}_2 = \dot{\phi} = \frac{L}{r^2} = \frac{L}{x_1^2} ,$$

$$\dot{x}_3 = \ddot{r} = -T + r\dot{\phi}^2 = -T + x_1 \left( \frac{L}{x_1^2} \right)^2 .$$

La segona equació representa la variació de l'angle  $\phi$ . Com que  $\dot{\phi} > 0$ ,  $\phi$  serà sempre creixent (les dues masses sempre giren al voltant del centre de masses en el mateix sentit). Observem que fixat un moment angular L, la segona equació queda desacoblada, per tant, ens centrarem a estudiar la primera i tercera equació per una tensió que vindrà definida per la llei de Hooke.

Les solucions d'aquest sistema defineixen el moviment intern d'un tether donada una tensió T.

Considerem com a tensió la llei de Hooke, de manera que el tether es comporta de manera elàstica quan la seva longitud és superior a la longitud nominal (es troba tensat) i no ofereix tensió quan la seva longitud és inferior a la nominal (es troba arronsat). Així definim [4]:

$$T = \frac{C_m}{d} (r - d)\delta , \quad \text{on } \delta = \begin{cases} 0 & \text{per a } r \leq d \\ 1 & \text{per a } r > d \end{cases} \quad (3.1.4)$$

$$C_m = C \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} . \quad (3.1.5)$$



- $d$  representa la distància nominal del tether [m].
- $r$  representa la distància real entre els cossos extrems a cada instant de temps [m].
- $C$  representa el coeficient de rigidesa del tether [ $\text{kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2$ ] i es calcula com:

$$C = EA . \quad (3.1.6)$$

- $E$  representa el mòdul de Young propi del material del que està compost el tether [Pa].
- $A$  representa la secció del tether [ $\text{m}^2$ ].
- $m_1$  i  $m_2$  representen les masses dels dos cossos extrems del TSS, sent  $m_1$  la massa més allunyada de la Terra i  $m_2$  la més propera.

Veiem la figura 5:

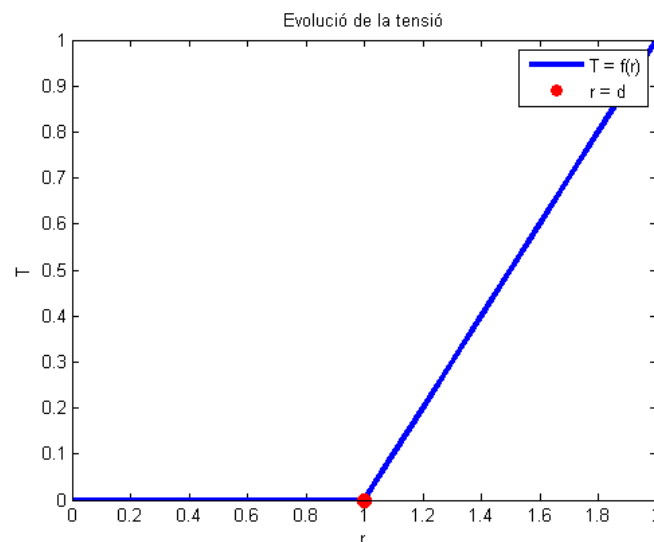


Figura 5: Evolució de  $T$  en funció de  $R$ .

Per tal d'entendre el model, en realitzarem un estudi analític i numèric.

### 3.2. Estudi analític del model

El sistema 3.1.3 és conservatiu. Així, existeix una quantitat anomenada energia que es conserva sobre cada solució. A continuació veurem com s'obté:

Les equacions 3.1.3 les podem combinar per tal d'eliminar la variable  $\dot{\phi}$  obtenint el resultat següent:

$$\dot{r} - r \left( \frac{L}{r^2} \right)^2 = -T.$$

Multiplicant ara tota la equació per  $\dot{r}$  obtenim:

$$\ddot{r}\dot{r} - \dot{r} \frac{L^2}{r^3} = -T(r)\dot{r}.$$

Integrant ara a banda i banda:

$$\frac{1}{2} \left( \dot{r}^2 + \frac{L^2}{r^2} \right) = h - \int T(r) dr, \quad (3.1.7)$$

on  $h$  és la constant d'integració i s'anomena energia. D'aquesta expressió podem deduir les característiques del comportament del TSS.

Si coneixem unes condicions inicials de  $r$  i  $\dot{r}$ , podem trobar l'energia a partir de la seva equació:

$$h = \frac{1}{2} \left( \dot{r}^2 + \frac{L^2}{r^2} \right) + \int_0^r T(x) dx. \quad (3.1.8)$$

Recordant l'expressió 3.1.4, podem calcular la part integral de l'equació 3.1.7 com:

$$\int T(r) dr = \frac{C_m}{d} \int (r - d) \delta dr, \quad \text{on } \delta = \begin{cases} 0 & \text{per } a r \leq d \\ 1 & \text{per } a r > d \end{cases}$$

Considerant que  $\delta$  està definida per trams, podem representar la variació de  $T$  en funció de  $r$  a la figura 5.

a) Si  $r < d \rightarrow T = 0$

$$\dot{r}^2 + \frac{L^2}{r^2} = 2h. \quad (3.1.9)$$

Aïllant  $\dot{r}$ , obtenim el comportament del TSS de manera independent a la variable  $C_m$ :

$$\dot{r} = \pm \sqrt{2h - L^2/r^2}.$$

Com que la relació entre  $r$  i  $\dot{r}$  és independent de la tensió, també ho serà de  $C_m$ . Aquesta expressió ens dóna explícitament la solució per a un valor de  $L$  i  $h$  fixat.

Per tal que el valor de  $\dot{r}$  sigui un nombre real, cal que l'interior de l'arrel quadrada sigui positiva. Així:

$$2h - L^2/r^2 > 0.$$

Aïllant ara  $r$ , obtenim:

$$r > \frac{L}{\sqrt{2h}} = r_{min}.$$

D'aquesta manera, concloem que  $r$  serà creixent, obtenint el seu valor mínim  $r_{min}$ , que s'obté per  $\dot{r} = 0$ . A la figura 6 observem aquest comportament en un exemple concret.

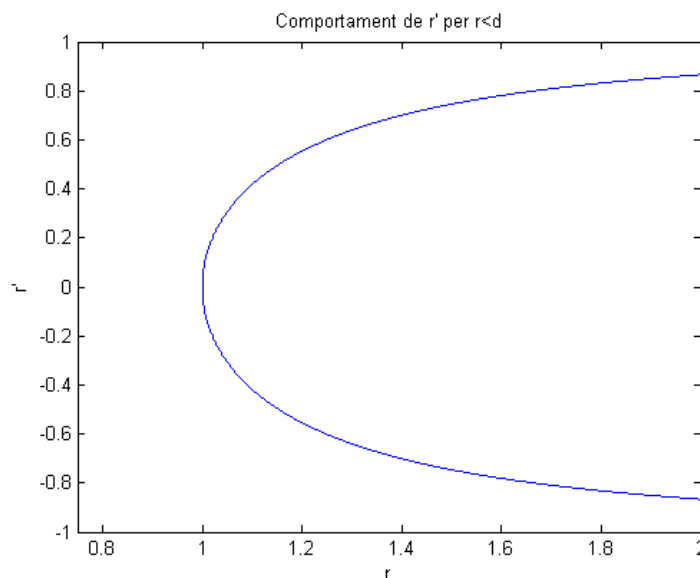


Figura 6: relació entre  $r$  i  $\dot{r}$  per  $r < d$  per  $L = h = 1$ .

b) Si  $r > d \rightarrow T = \frac{C_m}{d}(r - d)$

$$\dot{r}^2 + \frac{L^2}{r^2} = 2h - 2 \int \frac{C_m}{d}(r - d)\delta dr = 2h - 2 \frac{C_m}{d} \left( \frac{r^2}{2} - dr \right).$$

Aïllant  $\dot{r}$ , fixem el comportament del tether com:

$$\dot{r} = \pm \sqrt{2 \left( h - \frac{C_m}{d} r \left( \frac{r}{2} - d \right) \right) - \frac{L^2}{r^2}}.$$

De nou obtenim  $\dot{r}$  explícitament en funció de  $r$ . Ara, també depèn de  $C_m$ . Imposant de nou que l'expressió de dins l'arrel sigui  $\geq 0$ , obtenim el valor màxim admissible per  $r_{max}$  que coincideix de nou amb  $\dot{r} = 0$ . Aquesta  $r_{max}$  dependrà de  $C_m$ . A la figura 7 en veiem un exemple.

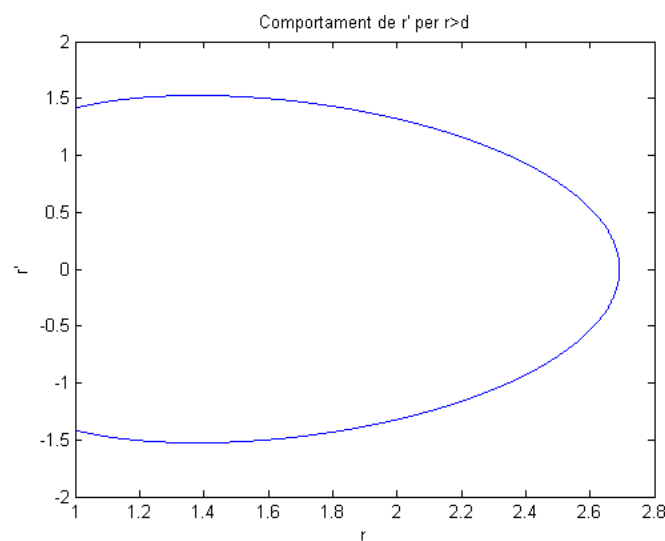


Figura 7: relació entre  $r$  i  $\dot{r}$  per  $r > d$  per  $L = h = C_m = 1$ .

### 3.3. Resultats i observacions

Emprant tethers composts de diferents materials, per a una secció concreta, els coeficients de rigidesa són proporcionals als mòduls de Young propis de cada material. Així, podem estudiar quin serà el comportament de cada tether en funció d'unes condicions inicials determinades. Estudiarem el valor de  $r_{max}$  segons diferents materials.

Concretament, els materials que hem triat per ser analitzats han estat:

1. Polímer reforçat amb fibra de vidre (CFRP per les seves sigles en anglès).  
Es tracta d'un material utilitzat habitualment en tethers.

2. Polietilè de massa molecular molt elevada (UHMWP per les seves sigles en anglès). També es tracta d'un material molt emprat en la fabricació de tethers. Dins el catàleg de diferents variants, el model estudiat es coneix sota el seu nom comercial com Spectra-1000.
3. Aramida o kevlar, és un altre material utilitzat en tethers
4. Nano-tubs de paret simple (SWNT per les seves sigles en anglès). Es tracta d'un material experimental que només ha estat estudiat en laboratori. Per la seva estructura, presenta unes propietats mecàniques inusuals amb una densitat molt reduïda.

A la taula 1 hem pres les dades del TSS SEDS-II amb la intenció d'obtenir uns valors realistes de les dimensions i massa d'un tether. Així, considerem una secció de  $0,75 \text{ mm}^2$ , una longitud de  $d = 20 \text{ km}$ , unes masses  $m_1 = m_2 = 26 \text{ kg}$  i un moment angular de  $L = 3 \cdot 10^7 \text{ m}^2/\text{s}$ . Fixada la secció i emprant el mòdul de Young propi de cada material [9], [10], [11] i aplicant l'equació 3.1.6 es troben les rigideses a la taula.

Material	Mòdul de Young (GPa)	Rigidesa C (kg·m/s <sup>2</sup> )
CFRP	181	79963
UHMWP	98	43295
Aramida	112,4	49657
SWNT	1000	441786

Taula 1: Comparació dels diferents materials seleccionats (mòdul de Young, rigidesa, densitat i massa) per una secció de  $0,75 \text{ mm}^2$

En les figures següents, es pot observar el resultat de la simulació amb quatre condicions inicials de  $r$  amb valor inicial de  $\dot{r}$ :

$$\dot{r}_0 = 0 ; r_0 = \begin{cases} 0,25d \\ 0,5d \\ 0,75d \\ d \end{cases}$$

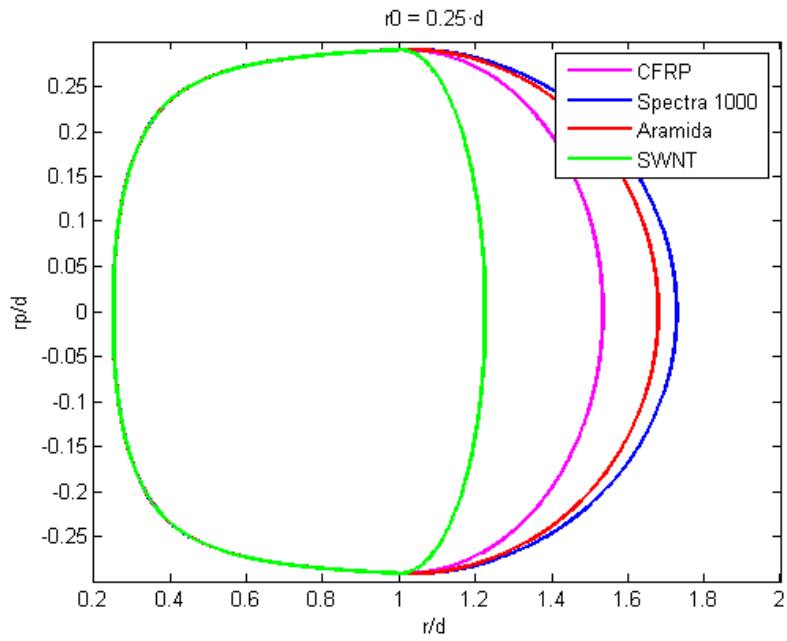


Figura 8: cas a) relació entre les variables  $r$  i  $r'$  per  $r_0=0,25d$

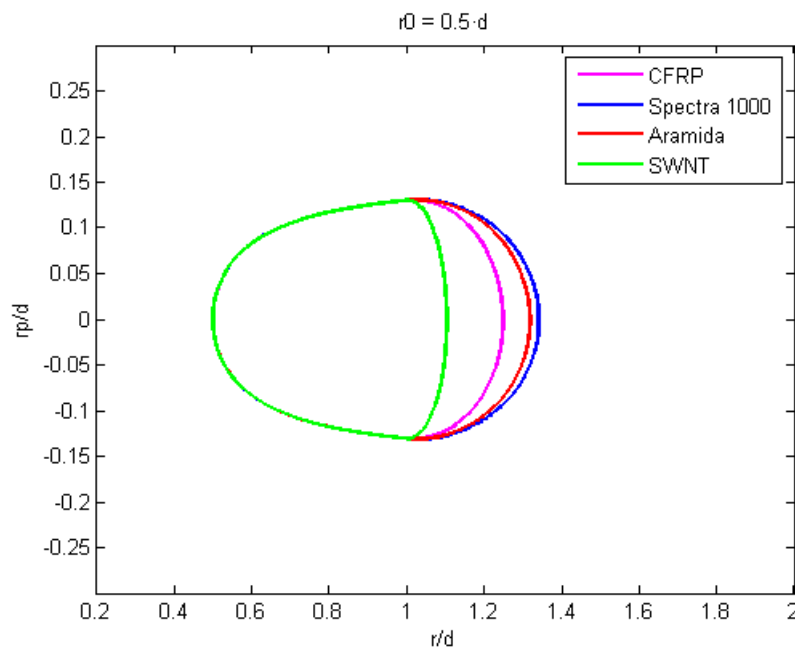


Figura 9: cas b) relació entre les variables  $r$  i  $r'$  per  $r_0=0,50d$

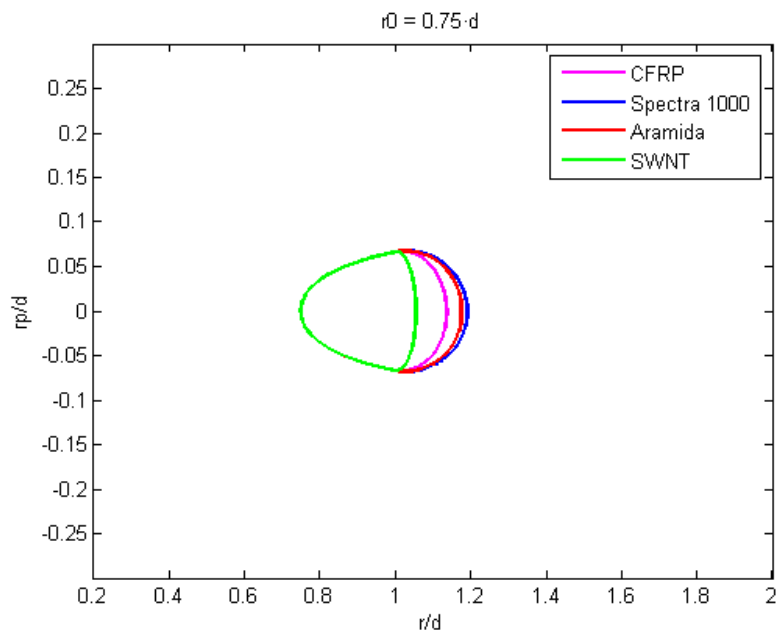


Figura 10: cas c) relació entre les variables  $r$  i  $r'$  per  $r_0=0,75d$

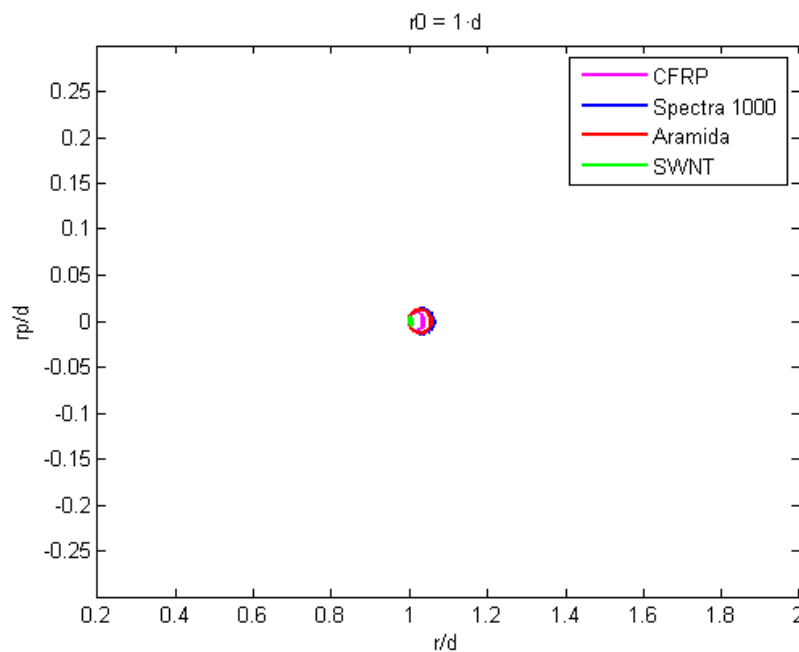


Figura 11: cas d) relació entre les variables  $r$  i  $r'$  per  $r_0=1,00d$

A les figures 8, 9, 10 i 11 podem veure el comportament de quatre tethers dels diferents materials esmentats per quatre condicions inicials de  $r$  segons el model no pertorbat pla. En aquestes figures s'ha representat la taxa de variació de la distància entre masses  $\dot{r}$  respecte la distància  $r$ , dividint en ambdós casos els

valors per la distància nominal  $d$  del tether, per obtenir valors fàcilment interpretables.

És interessant observar que per valors inferiors a la unitat de  $r/d$ , tots quatre materials presenten el mateix comportament, tal com l'estudi analític havia predit. Això es deu a que quan el tether no es troba sota tensió, l'únic paràmetre que els distingeix (el coeficient de rigidesa  $C$ ) no afecta al resultat del model. Per altra banda, per valors de  $r/d$  superiors a la unitat veiem que cada material influeix de manera diferent a la dinàmica del tether. En les quatre figures comprovem que a major rigidesa, menor és la elongació del tether.

Per analitzar la massa d'un tether en funció de cada material, cal prendre com a base un coeficient de rigidesa determinat. Així, la taula 2 mostra el resultat d'aquesta comparació. Hem obtingut la massa de cada tether a partir de les densitats de cada material i la secció fixada per l'equació 3.1.6.

Material	Mòdul de Young (GPa)	Rigidesa (kg·m/s <sup>2</sup> )	Densitat (kg/m <sup>3</sup> )	Massa (Kg)
CFRP	181	43295	1500	7,18
UHMWP	98	43295	970	8,57
Aramida	112,4	43295	1440	11,09
SWNT	1000	43295	1600	1,39

*Taula 2: Comparació dels diferents materials seleccionats (mòdul de Young, rigidesa, densitat i massa) per un coeficient de rigidesa  $C$  fixe.*

De la taula 2 podem concloure que el material SWNT, tot i tenir una densitat similar als altres materials, gràcies al seu mòdul de Young molt superior als materials convencionals permet obtenir un tether amb una massa molt inferior (més de 5 vegades més lleuger que el CFRP, que ofereix la segona millor opció en quant a massa). Una altra observació interessant és que el tether fabricat en UHMWP, tot i tenir el mòdul de Young més baix que el d'Aramida, presenta una massa 1,3 vegades inferior a aquest degut a la baixa densitat.

Per concloure aquest capítol, mostrem a la taula 3 la màxima variació de  $r$  respecte el seu valor inicial  $r_0$  (adimensional) i el període del moviment (segons) de cada cas concret (per cada material i per cada condició inicial de  $r_0$ ).



Material	Rigidesa C	0.25d		0.50d		0.75d		1.00d	
		$r_{m\grave{a}x}/r_0$	període	$r_{m\grave{a}x}/r_0$	període	$r_{m\grave{a}x}/r_0$	període	$r_{m\grave{a}x}/r_0$	període
<b>CFRP</b>	<b>79963</b>	6,13	12,16	2,50	17,37	1,51	19,29	1,03	11,05
<b>Spectra</b>	<b>43295</b>	6,91	14,21	2,68	19,50	1,59	21,58	1,06	14,74
<b>Aramida</b>	<b>49657</b>	6,72	13,70	2,64	18,97	1,57	21,01	1,05	13,83
<b>SWNT</b>	<b>441786</b>	4,90	8,87	2,21	13,99	1,41	15,72	1,01	4,79

*Taula 3: Variació màxima de r i període del moviment per cada cas de material i condicions inicials concretes.*

Una observació interessant és que tant la màxima variació de r com el període disminueixen a mesura que la rigidesa augmenta, sent preferible així tethers amb una rigidesa tan elevada com sigui possible.

## 4- Model ampliat d'un tether a l'espai

En aquest capítol estudiarem el model d'un tether que permet la inclinació d'aquest tant dins el pla de referència (el pla en què orbita el tether al voltant de la Terra), com perpendicular a aquest.

### 4.1. Presentació del model

Per estudiar l'estabilitat d'un tether sota moviment de llibració és necessari emprar un model que simuli aquest comportament de manera més realista que el model simplificat en el pla.

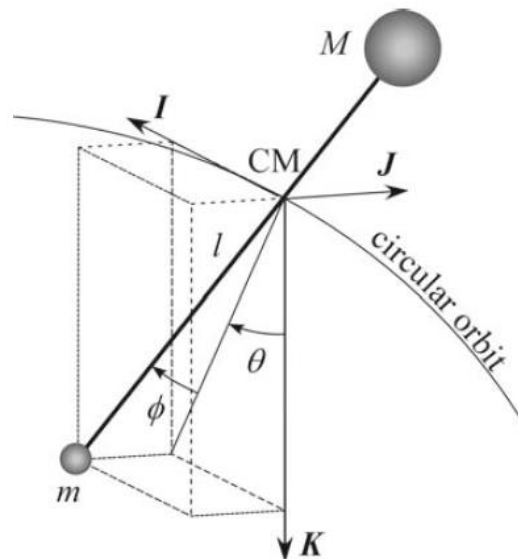


Figura 12: esquema de la descomposició de la inclinació del TSS en dos angles en un cas general ( $\theta$  es troba dins el pla de referència i  $\phi$  fora d'aquest).

Font: [5]

A la figura 12 observem un TSS realitzant una òrbita circular. El model que estudiem en aquest capítol considera la inclinació del tether respecte la vertical local en dues dimensions: la inclinació en el pla orbital ( $\theta$  o *pitch*) i la inclinació perpendicular a aquest pla ( $\phi$  o *roll*). Aquest model considera dues masses puntuals ( $M$  i  $m$ ) unides per un tether sense massa, on  $M \gg m$  i, per tant, es considera que el centre de masses es troba a  $M$ . En aquest sentit, el model es diferencia de la figura 12 en què aquesta representa un cas més general, on el centre de masses pot estar situat en un punt qualsevol entre  $M$  i  $m$ , mentre que

en el nostre cas està situat a  $M$ . A més, es considera l'elasticitat del tether de la mateixa manera que en el capítol anterior.

Així, les equacions que defineixen el model [8] són:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} - 2(\dot{\theta} - 1) \left( \dot{\phi} \tan \phi - \frac{\dot{\xi}}{\xi} \right) + 3 \sin \theta \cos \theta &= 0, \\ \ddot{\phi} + \frac{2\dot{\xi}\dot{\phi}}{\xi} + [(\dot{\theta} - 1)^2 + 3\cos^2\theta] \sin \phi \cos \phi &= 0, \\ \ddot{\xi} - \left[ \dot{\phi}^2 (\dot{\theta} - 1)^2 \cos^2 \phi + 3\cos^2 \phi \cos^2 \theta - 1 \right] \xi &= -u. \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

Sent  $\theta$  l'angle *pitch*,  $\phi$  l'angle *roll* i  $\xi$  la longitud adimensional del tether, tal que:

$$\xi = \frac{r}{d},$$

on  $d$  és la longitud de referència del tether i  $r$  representa la distància entre les dues masses.

A les equacions 4.1.1, la variable  $u$  es descriu com:

$$u = \frac{T}{m\Omega^2 d},$$

on  $T$  correspon a la tensió del tether segons la llei de Hooke, tal i com es mostra a la equació 3.1.4:

$$T = \frac{C_m}{d} (r - d) \delta \quad \text{on } \delta = \begin{cases} 0 & \text{per } r < d \\ 1 & \text{per } r > d \end{cases}$$

Per tal d'escriure la tensió en funció de  $\xi$ , podem expressar la igualtat com:

$$T = C_m (\xi - 1) \delta \quad \text{on } \delta = \begin{cases} 0 & \text{per } \xi < 1 \\ 1 & \text{per } \xi > 1 \end{cases}$$

$m$  representa la massa del cos petit.

$\Omega$  es descriu com:

$$\Omega = \sqrt{\mu/r_0^3}, \quad (4.1.2)$$

on:

$\mu = 3.986005 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$  és el paràmetre gravitacional de la Terra

$r_0$  és la distància del tether fins el centre de la Terra.

Definint ara que:

$$x_1 = \theta ,$$

$$x_2 = \phi ,$$

$$x_3 = \xi ,$$

$$x_4 = \dot{\theta} ,$$

$$x_5 = \dot{\phi} ,$$

$$x_6 = \dot{\xi} .$$

Derivant aquestes igualtats respecte el temps, podem expressar les equacions 4.1.1 com:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{\theta} = x_4 , & (4.1.3) \\ \dot{x}_2 &= \dot{\phi} = x_5 , \\ \dot{x}_3 &= \dot{\xi} = x_6 , \\ \dot{x}_4 &= \ddot{\theta} = 2(x_4 - 1) \left( x_5 \tan x_2 - \frac{x_6}{x_3} \right) - 3 \sin x_1 \cos x_1 , \\ \dot{x}_5 &= \ddot{\phi} = -2 \frac{x_6 x_5}{x_3} - ((x_4 - 1)^2 + 3 \cos^2 x_1) \sin x_2 \cos x_2 , \\ \dot{x}_6 &= \ddot{\xi} = (x_5^2 + (x_4 - 1)^2 \cos^2 x_2 + 3 \cos^2 x_2 \cos^2 x_1 - 1)x_3 \\ &\quad - \frac{C_m}{m\Omega^2 d} (x_3 - 1)\delta . \end{aligned}$$

El sistema d'equacions 4.1.3 el podem implementar per resoldre numèricament, ja que es tracta d'un sistema d'equacions diferencials de primer ordre, tal que  $\dot{X} = F(x)$ .

## 4.2. Anàlisi de l'estabilitat lineal dels punts d'equilibri

La simulació del comportament d'un tether seguint el model proposat presenta gran inestabilitat i trobar unes condicions inicials dels dos angles *pitch*, *roll* i de l'allargament  $\xi$  que no desestabilitzin el tether no és fàcil. Per tant, per obtenir condicions inicials que puguin donar lloc a un comportament estable, cal buscar primer els punts pels quals el TSS no realitza cap moviment (punts d'equilibri). No prendrem aquests punts d'equilibri com a condicions inicials, sinó que estudiarem el comportament del TSS en les proximitats d'aquests.

Per tant, l'estudi consisteix en:

- a) Trobar els punts d'equilibri del model. Els punts d'equilibri d'un sistema d'equacions diferencials són solucions estacionàries del sistema, és a dir, que les condicions inicials es mantenen constants al llarg de tot el temps. Per tant, la configuració interna del TSS es manté fixe mentre dona voltes al voltant de la Terra. Aquests punts d'equilibri es troben igualant les equacions 4.1.3 a zero per tal d'anul·lar les taxes de variació de les variables (els valors de les variables no varien respecte el temps). Igualant les equacions 4.1.3 obtenim les igualtats següents:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_4 = 0, \\ \dot{x}_2 &= x_5 = 0, \\ \dot{x}_3 &= x_6 = 0, \\ \dot{x}_4 &= \sin x_1 \cos x_1 = 0, \\ \dot{x}_5 &= (1 + 3 \cos^2 x_1) \sin x_2 \cos x_2 = 0, \\ \dot{x}_6 &= (\cos^2 x_2 + 3 \cos^2 x_2 \cos^2 x_1 - 1)x_3 - \frac{C_m}{m\Omega^2 d}(x_3 - 1)\delta = 0.\end{aligned}$$

D'ara endavant, denotarem genèricament els punts d'equilibri com:

$$p = (x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0).$$

- b) Un punt d'equilibri estable és aquell que afegint-hi una petita desviació, la solució es manté amb una configuració propera a la inicial mentre que els

punts d'equilibri inestables són aquells que per petites desviacions, els resultats difereixen molt del punt inicial. Afegint petites desviacions a aquests punts d'equilibri, trobem condicions inicials que poden donar lloc a un comportament estable o inestable. Trobem aquestes desviacions realitzant un estudi dels valors propis (VAPS) i els vectors propis corresponents (VEPS) associats als punts d'equilibri del sistema.

Per trobar els VAPS i els VEPS associats amb cada punt d'equilibri del sistema ( $p$ ) trobem els VAPS i VEPS de la matriu:

$$Dx(p) = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_6} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \dot{x}_6}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \dot{x}_6}{\partial x_6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial \dot{x}_4}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_4}{\partial x_2} & \frac{\partial \dot{x}_4}{\partial x_3} & \frac{\partial \dot{x}_4}{\partial x_4} & \frac{\partial \dot{x}_4}{\partial x_5} & \frac{\partial \dot{x}_4}{\partial x_6} \\ \frac{\partial \dot{x}_5}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_5}{\partial x_2} & \frac{\partial \dot{x}_5}{\partial x_3} & \frac{\partial \dot{x}_5}{\partial x_4} & \frac{\partial \dot{x}_5}{\partial x_5} & \frac{\partial \dot{x}_5}{\partial x_6} \\ \frac{\partial \dot{x}_6}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_6}{\partial x_2} & \frac{\partial \dot{x}_6}{\partial x_3} & \frac{\partial \dot{x}_6}{\partial x_4} & \frac{\partial \dot{x}_6}{\partial x_5} & \frac{\partial \dot{x}_6}{\partial x_6} \end{pmatrix}$$

Els valors propis ens indiquen el comportament de les solucions al voltant de cada punt d'equilibri en la direcció del VEP corresponent. Cal dir que per cada punt d'equilibri s'obtenen 6 VAPS (coincidint amb la dimensió del sistema) emparellats de dos en dos. A continuació mostrem la classificació del comportament associat als diferents tipus de parelles de VAPS ( $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ ).

$$\begin{array}{l} \mathbf{VAPS\ reals:} \\ \mathbf{VAPS\ complexes:} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Sella} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 < 0 < \lambda_2 \\ \lambda_1 \rightarrow \text{estable} \\ \lambda_2 \rightarrow \text{inestable} \end{cases} \\ \mathbf{Pou} \rightarrow \lambda_1 \leq \lambda_2 < 0 \\ \mathbf{Font} \rightarrow 0 < \lambda_2 \leq \lambda_1 \\ \mathbf{Imagis\ purs} \rightarrow \text{Centre} \\ \mathbf{Complexes} \rightarrow \begin{cases} \text{Pou en espiral} \rightarrow a \pm bi \text{ on } a < 0 \\ \text{Font en espiral} \rightarrow a \pm bi \text{ on } a > 0 \end{cases} \\ a \pm bi, a \neq 0, b \neq 0 \end{array} \right.$$

No podem esperar trobar punts d'equilibri estables de manera global (cal tenir clar que cada punt d'equilibri té sis VAPS). Per tenir un punt d'equilibri totalment estable tots els VAPS d'aquest haurien de ser imaginaris purs, reals negatius o

complexes amb part real negativa. Així, si un VAP és, per exemple, imaginari pur, no implica que el punt sigui un centre i, per tant, estable, sinó que en la direcció d'aquest VAP hi ha estabilitat.

Per tant, estudiarem els punts d'equilibri que contenen algun centre, pou o pou en espiral i buscarem les direccions en què es troben. Així coneixerem les direccions en les que ens podem desviar respecte el punt d'equilibri de manera que el TSS es mantingui controlat prop de la posició d'equilibri. Tot això ho il·lustrem en l'apartat 4.3.2.

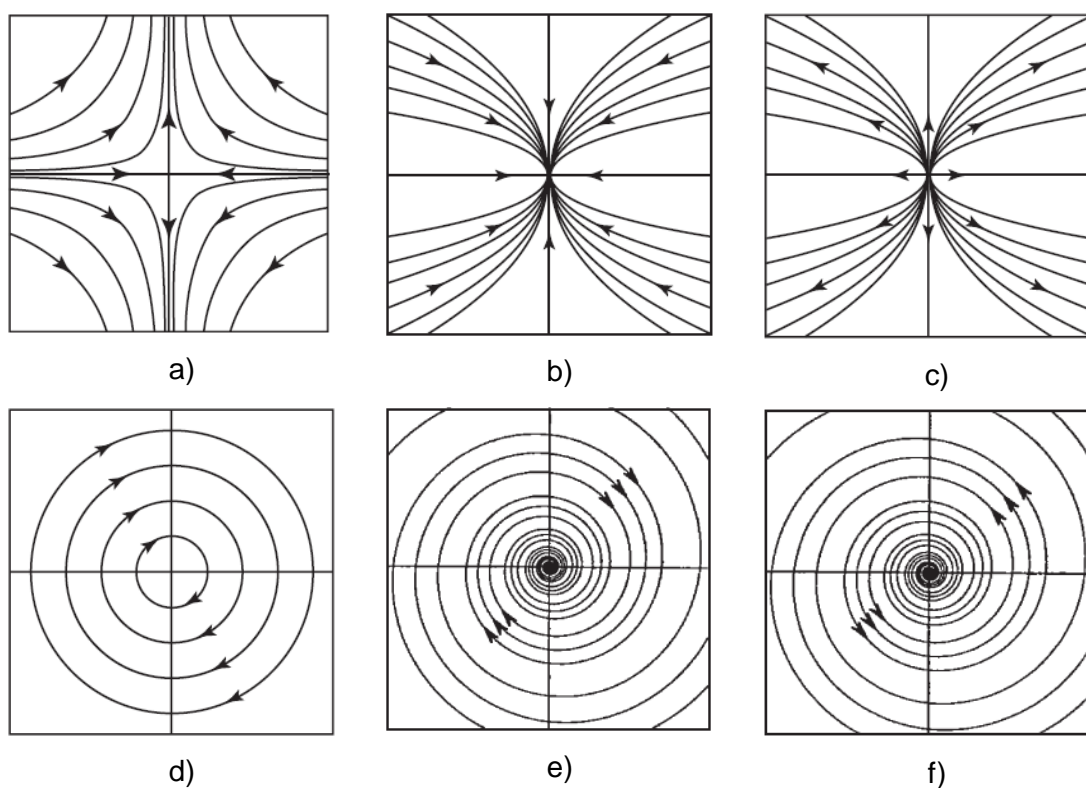


Figura 13: Representació del comportament de les variables d'un sistema de dues equacions diferencials a les proximitats d'un punt d'equilibri per: a) Sella, b) Pou, c) Font, d) Centre, e) Pou en espiral, f) Font en espiral. Font: [2]

### 4.3. Resultats i observacions

Hem pres les dades descrites al primer capítol, corresponents al SEDS-II. Així:

$$m = 26 \text{ kg} ,$$

$$d = 20.000 \text{ m} ,$$

$$C_m = 10.000 \text{ m/s}^2,$$

$$r_0 = 6728 \cdot 10^3 \text{ m},$$

segons l'equació 4.1.2:

$$\Omega = \sqrt{\frac{3.986005 \cdot 10^{14}}{6728 \cdot 10^3}} = 1.1440 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1},$$

on  $r_0$  representa la suma del radi de la Terra ( $6378 \cdot 10^3 \text{ m}$ ) i la distància del tether a la superfície de la Terra ( $350 \cdot 10^3 \text{ m}$ ). Agafem aquesta distància ja que considerem que el nostre tether es troba en una òrbita LEO.

#### 4.3.1. Punts d'equilibri i valors propis

Els punts d'equilibri del sistema d'equacions es troben representats a la taula 4.

Nº punt	$x_1$	$x_2$	$x_3$
1	0	0	1,0
2	0	$\pi$	1,0
3	$\pi$	0	1,0
4	$\pi$	$\pi$	1,0
5	$\pi/2$	0	1,0
6	$\pi/2$	$\pi$	1,0
7	$3\pi/2$	0	1,0
8	$3\pi/2$	$\pi$	1,0
9	0	0	0
10	0	$\pi$	0
11	$\pi$	0	0
12	$\pi$	$\pi$	0
13	0	$\pi/2$	0
14	0	$3\pi/2$	0
15	$\pi$	$\pi/2$	0
16	$\pi$	$3\pi/2$	0
17	$\pi/2$	0	0*
18	$\pi/2$	$\pi$	0*
19	$3\pi/2$	0	0*
20	$3\pi/2$	$\pi$	0*
21	$\pi/2$	$\pi/2$	0
22	$\pi/2$	$3\pi/2$	0
23	$\pi$	$\pi/2$	0
24	$3\pi/2$	$3\pi/2$	0

Taula 4: punts d'equilibri del sistema.



En els casos dels valors de  $x_3$  marcats amb \* hi ha infinits valors de  $x_3 \in [0,1)$ , de manera que tenim 20 punts d'equilibri i 4 més que en realitat són infinits punts però hem pres el valor 0 com un cas concret. Per tant, obtenim 24 punts d'equilibri.

En aquest treball, estudiem el comportament del TSS quan es troba desplegat. Per tant, no entren dins l'estudi aquells punts d'equilibri amb  $x_3 = 0$ . Així, els punts d'equilibri del sistema d'equacions amb  $x_3 \neq 0$  i els VAPS corresponents es troben representats a la taula 5. S'hi poden realitzar dues observacions interessants:

1. Tots els VAPS dels punts 1, 2, 3 i 4 són imaginaris purs. Per tant, és d'esperar que aquests punts siguin completament estables ja que existeixen solucions periòdiques.
2. Hi ha dues parelles de VAPS dels punts 5, 6, 7 i 8 iguals a zero. En aquest cas, els VAPS no són un bon indicador de l'estabilitat i, per tant, no podem preveure com seran les solucions amb aquest estudi de primer ordre.

Nº Punt	$x_1$	$x_2$	$x_3$	vap 1	vap 2	vap 3	vap 4	vap 5	vap 6
1	0	0	1,0	1,7i	-1,7i	121,2i	-121,2i	2i	-2i
2	0	$\pi$	1,0	121,2i	-121,2i	1,7i	-1,7i	2i	-2i
3	$\pi$	0	1,0	121,2i	-121,2i	1,7i	-1,7i	2i	-2i
4	$\pi$	$\pi$	1,0	121,2i	-121,2i	1,7i	-1,7i	2i	-2i
5	$\pi/2$	0	1,0	0	0	i	-i	0	0
6	$\pi/2$	$\pi$	1,0	0	0	i	-i	0	0
7	$3\pi/2$	0	1,0	0	0	i	-i	0	0
8	$3\pi/2$	$\pi$	1,0	0	0	i	-i	0	0

Taula 5: VAPS per cada punt d'equilibri. Es troben emparellats (1,2), (3,4) i (5,6).

Per a tots els punts,  $x_4 = x_5 = x_6 = 0$ .

Per obtenir condicions inicials properes als punts d'equilibri, afegim als punts d'equilibri una petita desviació en la direcció de cada VEP associat als parells de VAPS. Així, la expressió per trobar les condicions inicials és:

$$c. i. = p. eq. + b(VEP_{real} \cos a + VEP_{imaginari} \sin a),$$

Concretament, hem pres els valors de  $a = 45^\circ$  i  $b = 10^{-4}$ .

A l'apartat següent il·lustrarem el moviment del TSS per diferents condicions inicials proposades.

### 4.3.2. Resultats i il·lustracions

Resulta de gran interès estudiar les direccions en les que es pot desviar el TSS des d'un punt d'equilibri sense desestabilitzar-se. També és essencial conèixer per quines direccions, una desviació del punt d'equilibri requerirà ser controlada. Així, hem estudiat el comportament que s'origina de tots els valors propis obtinguts.

Considerarem que el tether és estable si la màxima variació de qualsevol dels dos angles és menor a  $\pi$  unitats i la màxima variació de  $\xi$  és de una unitat al llarg de tot el període d'integració. Hem calculat el comportament del tether al llarg de  $20\pi$  unitats.

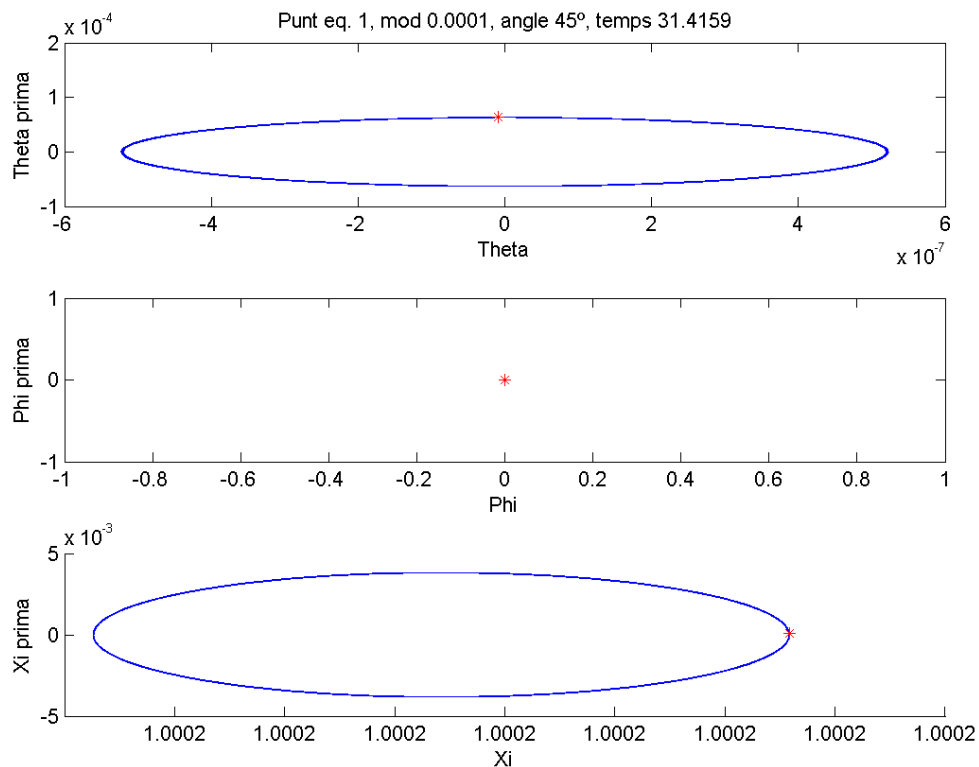


Figura 14: trajectòria del tether a partir del punt d'equilibri 1 pel segon parell de VAPS i un temps de  $20\pi$  unitats.

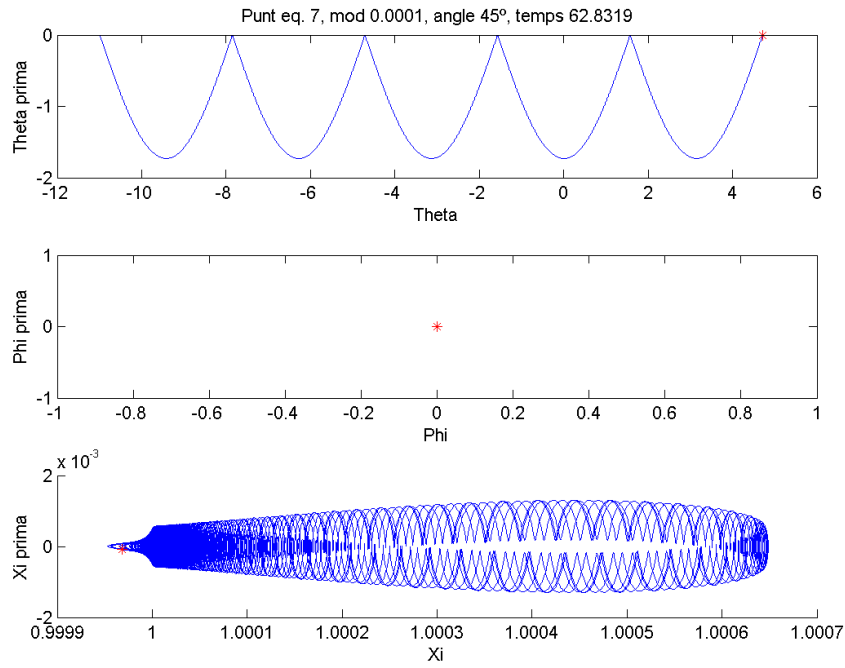


Figura 15: trajectòria del tether a partir del punt d'equilibri 7 pel segon parell de VAPS i un temps de  $20\pi$  unitats.

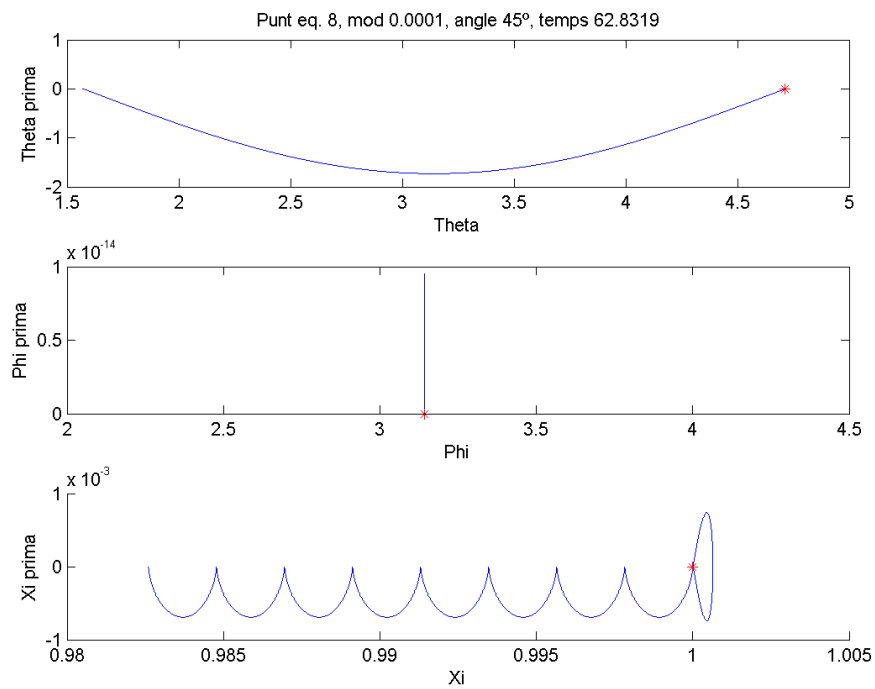


Figura 16: trajectòria del tether a partir del punt d'equilibri 8 pel quart parell de VAPS i un temps de  $20\pi$  unitats.

A les figures 14, 15 i 16 podem veure la variació de les variables  $\theta$ ,  $\phi$  i  $\xi$  respecte les seves derivades al llarg del període de  $20\pi$  unitats de temps. L'asterisc vermell indica el punt inicial a partir del qual s'ha calculat tota la trajectòria. Cada figura correspon a un punt d'equilibri diferent.

- La figura 14 correspon a una variació del punt d'equilibri 1 pel segon parell de VAPS.
- La figura 15 correspon a una variació del punt d'equilibri 7 pel segon parell de VAPS.
- La figura 16 correspon a una variació del punt d'equilibri 8 pel tercer parell de VAPS.

Aquestes tres figures representen el comportament de les condicions inicials proposades. Així, pels quatre primers punts d'equilibri, una petita desviació per qualsevol dels seus vectors propis comporta un moviment estable, que es manté proper al punt d'equilibri. Pels quatre últims punts, en canvi, sempre hi ha com a mínim una variable que tendeix a allunyar-se del punt d'equilibri.

Una observació interessant és que, en cap cas, l'angle roll presenta inestabilitat de manera clara.

Concloem que per els punts d'equilibri 5, 6, 7 i 8 caldrà un sistema de control de l'estabilitat del TSS, mentre que pels punts 1, 2, 3 i 4 no.

## 5- Model d'un tether electrodinàmic

En aquest capítol estudiarem el model d'un tether fabricat amb material conductor de la electricitat (EDT). Per això, al estar en presència del camp magnètic terrestre es crea una diferència de potencial entre els dos extrems del tether. Aquesta diferència de potencial, juntament amb la presència de ions de la ionosfera terrestre causa la aparició d'una intensitat induïda.

En òrbites no equatorials, el camp magnètic varia al llarg del temps, que amb interacció amb la intensitat induïda dona lloc a l'aparició d'una força de Lorentz al llarg del tether, que es pot simplificar com una força puntual al centre de masses. Com que el centre de masses i el centre de gravetat del tether no coincideixen al trobar-se a distàncies a la Terra diferents, apareix un parell de Lorentz que tendeix a desestabilitzar el tether fent-lo rotar sobre ell mateix. A la figura 17 es pot observar un diagrama especificant tots els factors involucrats en la aparició d'aquest parell de Lorentz.

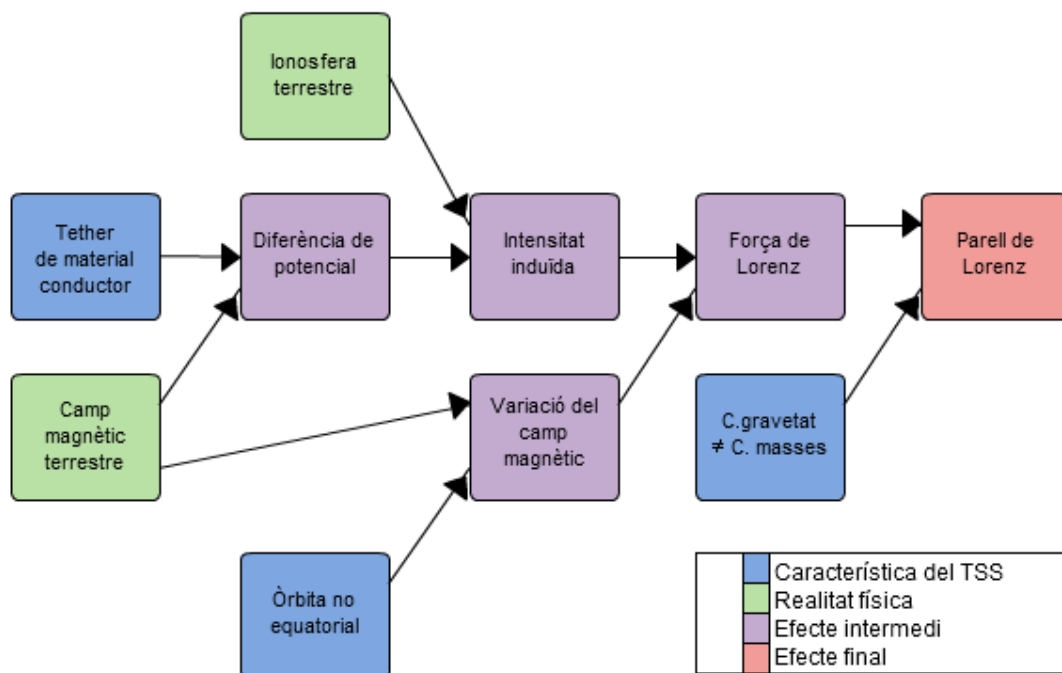


Figura 17: esquema amb tots els factors implicats en la aparició d'un parell de Lorentz en els EDT.

L'objectiu del capítol és estudiar quines condicions inicials permeten que el tether es mantingui estable al llarg d'un temps que hem fixat.

## 5.1. Presentació del model

Els tethers electrodinàmics o EDT són tethers fabricats amb materials conductors de l'electricitat. Aquests tethers, pel fet d'orbitar la Terra travessen el seu camp magnètic, creant així una diferència de potencial entre els dos cossos extrems. Com que, alhora, el TSS es troba envoltat per la ionosfera terrestre, la interacció entre aquesta i la diferència de potencial del tether genera una intensitat elèctrica.

Els paràmetres relacionats amb la desestabilització del tether a tenir en compte dins el model matemàtic que simuli aquest tipus de TSS són:

- 1) L'angle format entre el pla orbital del tether i el pla equatorial terrestre ( $i$ ).
- 2) La incidència del parell de Lorenz en el comportament del tether ( $\varepsilon$ ).

Les equacions [12] que componen el model descriuen una òrbita circular no equatorial al voltant de la Terra:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} - 2(1 + \dot{\theta})\dot{\varphi} \tan \varphi + \frac{3}{2} \sin 2\theta &= f_{\theta}, \\ \ddot{\varphi} + \sin \varphi \cos \varphi ((1 + \dot{\theta})^2 + 3 \cos^2 \theta) &= f_{\varphi}, \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

on  $f_{\theta}$  i  $f_{\varphi}$  són:

$$\begin{aligned} f_{\theta} &= -\varepsilon(\sin i \tan \varphi (2 \sin \nu \cos \theta - \cos \nu \sin \theta) + \cos i), \\ f_{\varphi} &= \varepsilon \sin i (2 \sin \nu \sin \theta + \cos \nu \cos \theta), \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

on:

- $\theta$  representa l'angle *pitch* [rad].
- $\varphi$  representa l'angle *roll* [rad].
- $\varepsilon$  quantifica la incidència del parell de Lorenz en el comportament del tether [adimensional].
- $i$  representa l'angle del pla orbital respecte el pla equatorial [rad].
- $\nu$  representa l'anomalia verdadera [adimensional]. És la variable independent,

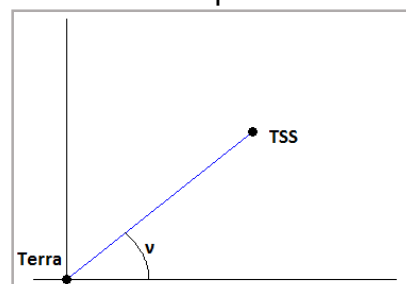


Figura 18: Representació de l'angle polar  $\nu$



Ara, podem introduir les equacions 5.1.2 dins les expressions anteriors per obtenir, finalment, les equacions que implementarem per resoldre el model numèricament:

$$\dot{x}_1 = x_3 ,$$

$$\dot{x}_2 = x_4 ,$$

$$\dot{x}_3 = -\varepsilon(\sin i \tan \varphi [2\sin \nu \cos \theta - \cos \nu \sin \theta] + \cos i) + 2(1 + \dot{\theta})x_4 \tan x_2 - \frac{3}{2}\sin(2x_1) ,$$

$$\dot{x}_4 = \varepsilon \sin i (2\sin \nu \sin \theta + \cos \nu \cos \theta) - \sin x_2 \cos x_2 ((1 + x_3)^2 + 3\cos^2 x_1) .$$

És interessant estudiar la dinàmica interna del tether per multitud de condicions inicials. Volem controlar quantes voltes fa un TSS al voltant d'ell mateix. Un TSS que faci moltes voltes es pot considerar inestable i per això cal definir una condició a partir de la qual es considera que el sistema és poc estable. Considerarem que el tether ha deixat de ser estable quan hagi realitzat una volta sencera sobre ell mateix. És a dir, quan qualsevol dels dos angles (*pitch* o *roll*) siguin iguals o superiors a  $2\pi$  unitats.

## 5.2. Resultats i observacions

Segons l'article *Control de amarres electrodinàmicas auto equilibradas* [12], coneixem la existència de condicions inicials que donen lloc a òrbites periòdiques (òrbites que descriuen exactament la mateixa trajectòria infinites vegades). En aquest capítol estudiem l'estabilitat d'aquestes òrbites periòdiques, escollint condicions inicials properes a les de les òrbites periòdiques.

Com a condició d'estabilitat, hem establert que si qualsevol dels dos angles  $\theta$  o  $\varphi$  supera el valor de  $2\pi$  en algun moment al llarg del període d'integració es considera no estable.

Per tal de trobar les condicions òptimes per a una estabilitat màxima del TSS, hem comptabilitzat el nombre de voltes que realitza el tether sobre ell mateix durant un temps d'integració fixat. Per proposar un conjunt de valors dels



paràmetres  $i$  i  $\varepsilon$  i de condicions inicials interessants ens hem basat en l'article [12], d'on hem triat:

- a) Les 9 combinacions possibles de  $i = \{40^\circ, 50^\circ, 60^\circ\}$  i  $\varepsilon = \{0.5, 1.0, 1.5\}$ .  
D'aquestes combinacions, hem escollit els valors  $i = 60$  i  $\varepsilon = 1$  juntament amb un temps d'integració de  $10\pi$  unitats per realitzar-ne un estudi ampliat, amb l'objectiu de plasmar els resultats en una sèrie de gràfics. Hem triat aquest valors ja que ofereixen resultats fàcilment interpretables.
- b) El conjunt de condicions inicials de tal manera que siguin properes a les òrbites periòdiques descrites a l'article:

$$\theta \in [0, -\pi/4] \quad \varphi = 0 \quad \dot{\theta} = V \cos(A) \quad \dot{\varphi} = V \sin(A)$$

On:

$$V \in [0, 0.5] \quad A \in [0, \pi/2]$$

Hem pres 6 valors de  $\theta$ , mentre que n'hem pres 100 per  $V$  i  $A$  per l'estudi ampliat i 13 per la resta d'estudis. Per l'estudi ampliat hem elaborat dos gràfics en funció de  $A$  i  $V$  per cada valor de  $\theta$ . En el primer gràfic es mostra el nombre de voltes que el tether realitza sobre ell mateix per un període d'integració de  $10\pi$  unitats, mentre que en el segon ens mostra quines condicions inicials són estables o inestables segons el nostre criteri i en aquest mateix període d'integració.

- Les figures 20 i 21 corresponen a un valor inicial de  $\theta = 0$ .

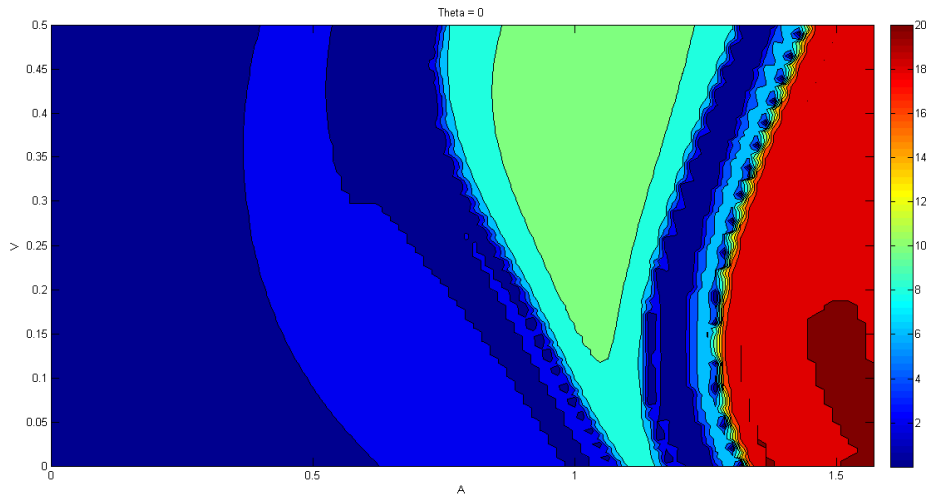


Figura 20: voltes completades pel tether sobre ell mateix en un temps d'integració de  $10\pi$  unitats. L'eix x representa la variable 'A' mentre que l'eix y representa la variable 'V'. La figura es correspon a un valor inicial de  $\theta = 0$ ,  $i = 60^\circ$  i  $\varepsilon = 1$ .

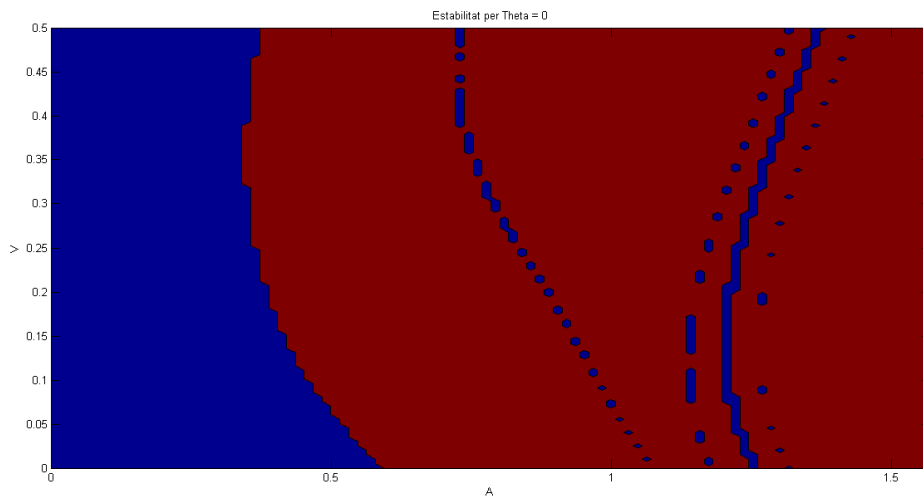


Figura 21: Classificació de les condicions inicials que donen lloc a estabilitat (blau) o inestabilitat (vermell) per un temps d'integració de  $10\pi$  per  $\theta = 0$ ,  $i = 60^\circ$  i  $\varepsilon = 1$ .

- Les figures 22 i 23 corresponen a un valor inicial de  $\theta = -\pi/20$ .

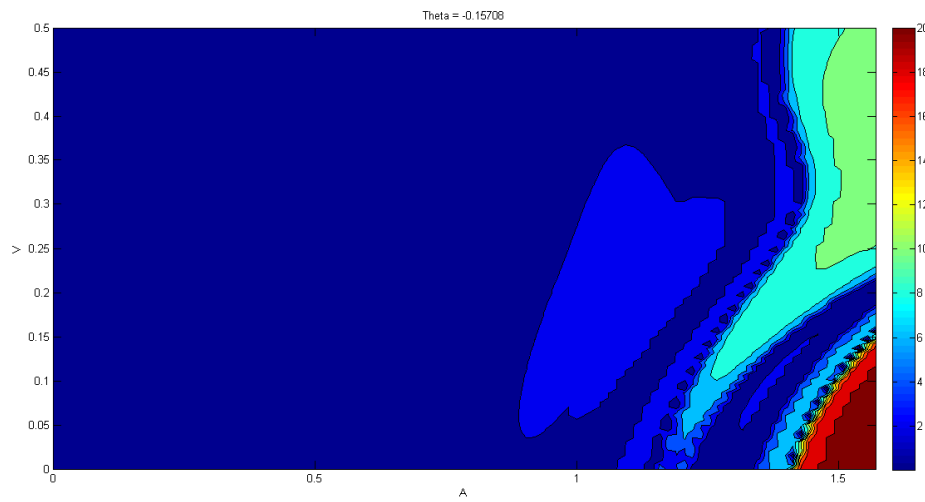


Figura 22: voltes completades pel tether sobre ell mateix en un temps d'integració de  $10\pi$  unitats. L'eix x representa la variable 'a' mentre que l'eix y representa la variable 'v'. La figura es correspon a un valor inicial de  $\theta = -\pi/20$ ,  $i = 60^\circ$  i  $\varepsilon = 1$ .

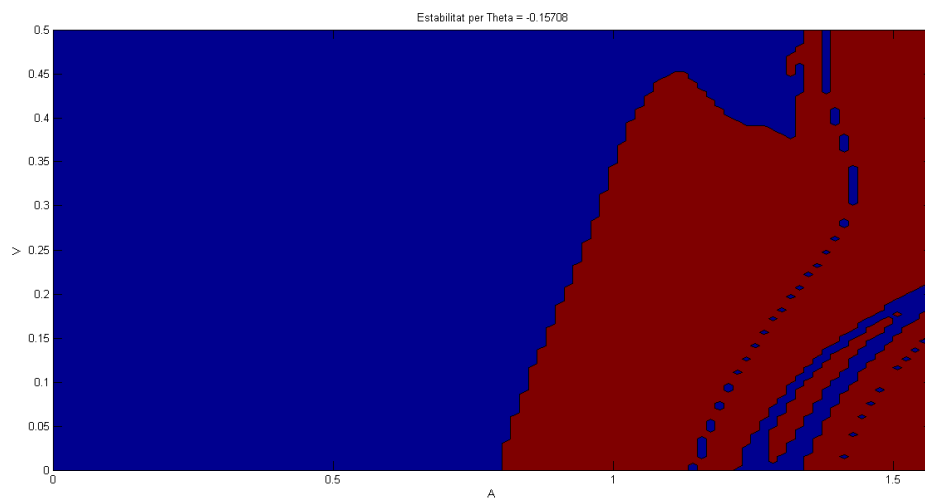


Figura 23: Classificació de les condicions inicials que donen lloc a estabilitat (blau) o inestabilitat (vermell) per un temps d'integració de  $10\pi$  per  $\theta = -\pi/20$ ,  $i = 60^\circ$  i  $\varepsilon = 1$ .

- Les figures 24 i 25 corresponen a un valor inicial de  $\theta = -\pi/10$ .

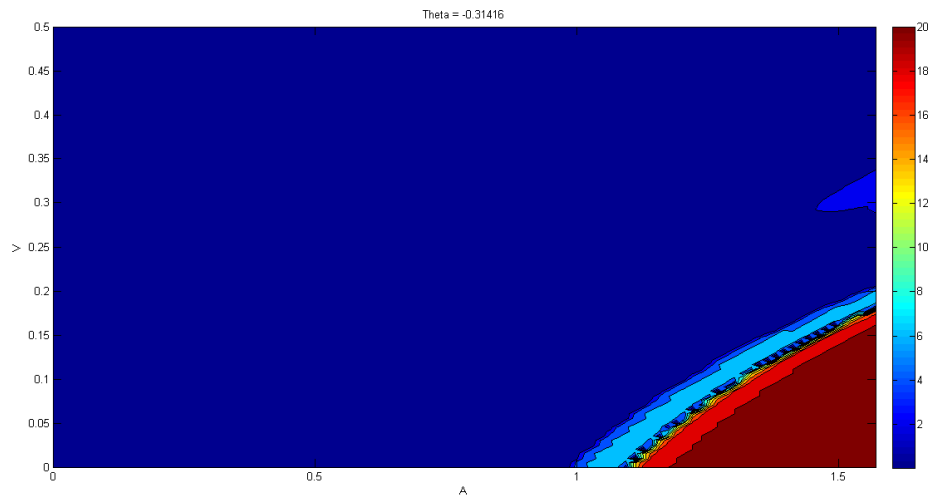


Figura 24: voltes completades pel tether sobre ell mateix en un temps d'integració de  $10\pi$  unitats. L'eix x representa la variable 'a' mentre que l'eix y representa la variable 'v'. La figura es correspon a un valor inicial de  $\theta = -\pi/10$ ,  $i = 60^\circ$  i  $\varepsilon = 1$ .

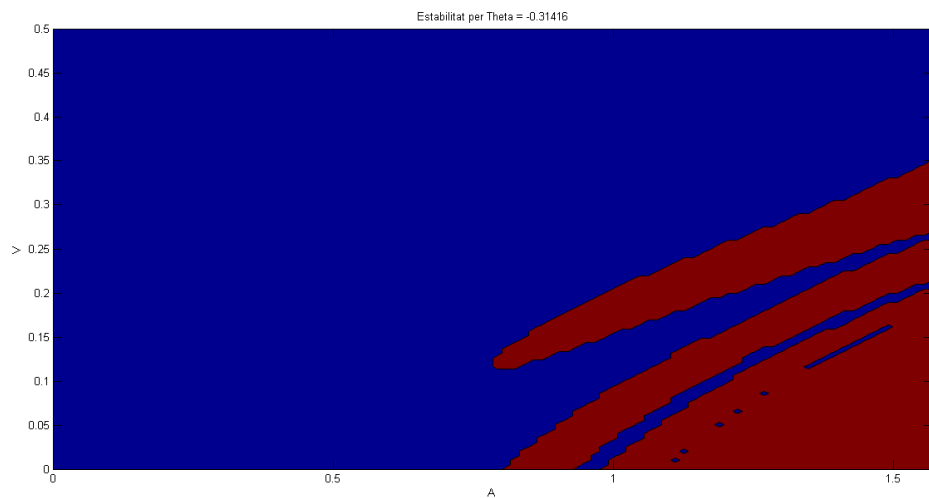


Figura 25: Classificació de les condicions inicials que donen lloc a estabilitat (blau) o inestabilitat (vermell) per un temps d'integració de  $10\pi$  per  $\theta = -\pi/10$ ,  $i = 60^\circ$  i  $\varepsilon = 1$ .

- Les figures 26 i 27 corresponen a un valor inicial de  $\theta = -3\pi/20$ .

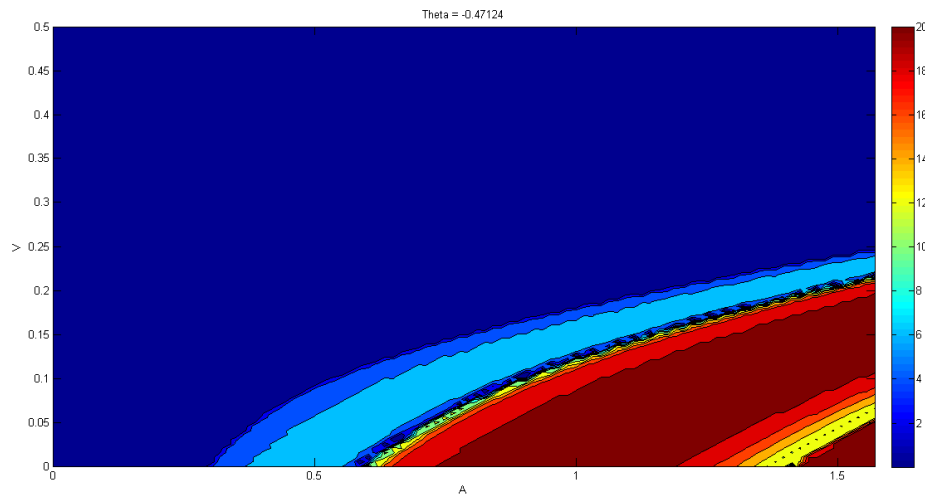


Figura 26: voltes completades pel tether sobre ell mateix en un temps d'integració de  $10\pi$  unitats. L'eix x representa la variable 'a' mentre que l'eix y representa la variable 'v'. La figura es correspon a un valor inicial de  $\theta = -3\pi/20$ ,  $i = 60^\circ$  i  $\varepsilon = 1$ .

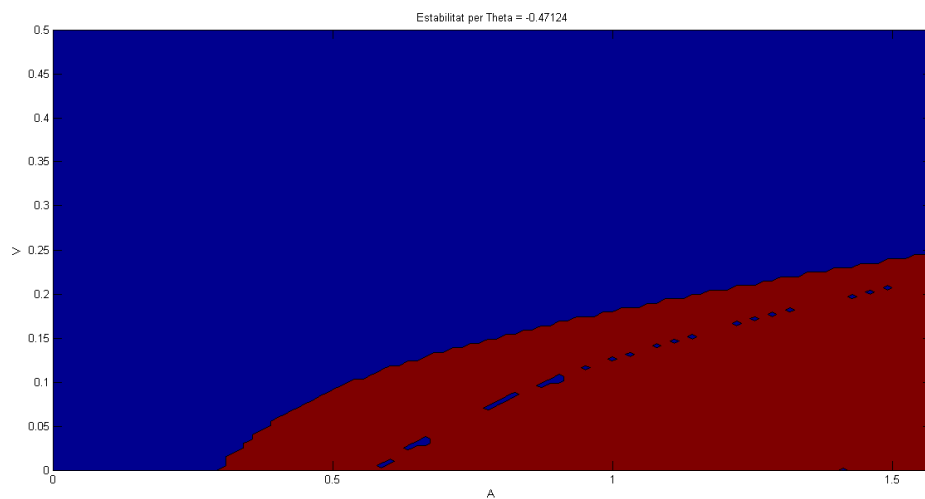


Figura 27: Classificació de les condicions inicials que donen lloc a estabilitat (blau) o inestabilitat (vermell) per un temps d'integració de  $10\pi$  per  $\theta = -3\pi/20$ ,  $i = 60^\circ$  i  $\varepsilon = 1$ .

- Les figures 28 i 29 corresponen a un valor inicial de  $\theta = -\pi/5$ .

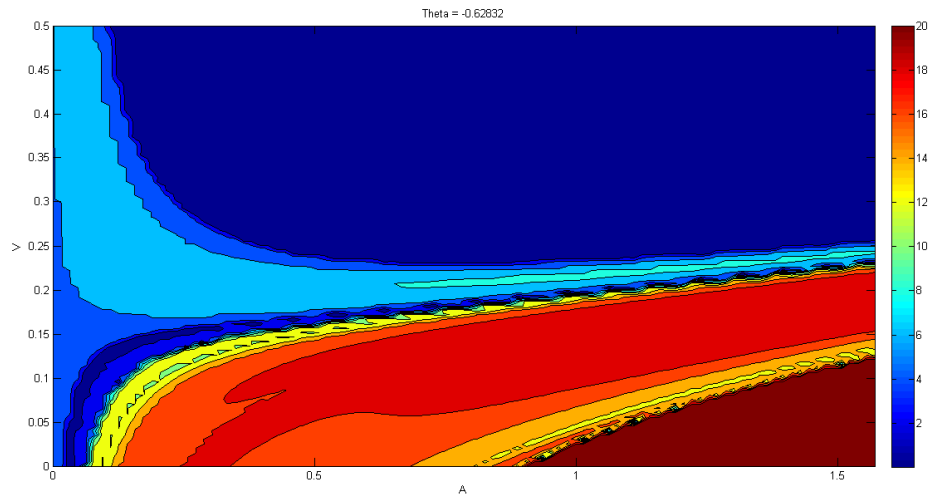


Figura 28. voltes completades pel tether sobre ell mateix en un temps d'integració de  $10\pi$  unitats. L'eix x representa la variable 'a' mentre que l'eix y representa la variable 'v'. La figura es correspon a un valor inicial de  $\theta = -\pi/5$ ,  $i = 60^\circ$  i  $\varepsilon = 1$ .

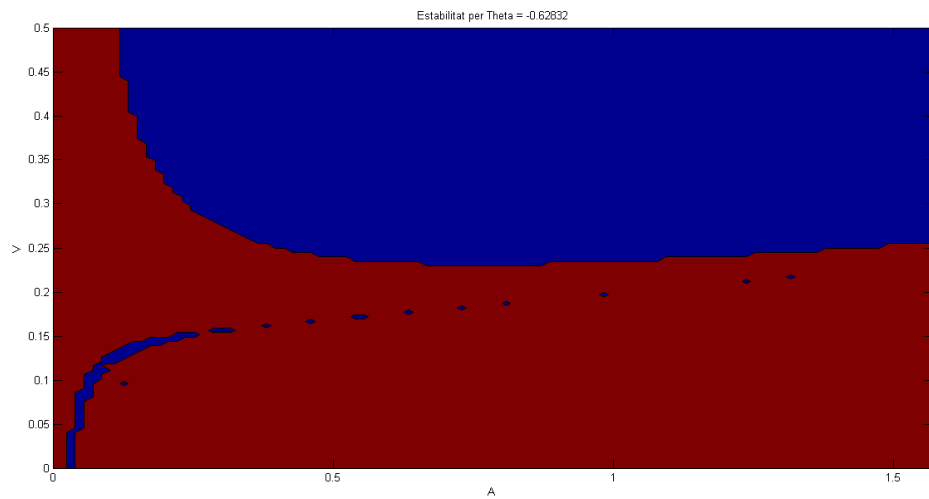


Figura 29: Classificació de les condicions inicials que donen lloc a estabilitat (blau) o inestabilitat (vermell) per un temps d'integració de  $10\pi$  per  $\theta = -\pi/5$ ,  $i = 60^\circ$  i  $\varepsilon = 1$ .

- Les figures 30 i 31 corresponen a un valor inicial de  $\theta = -\pi/4$ .

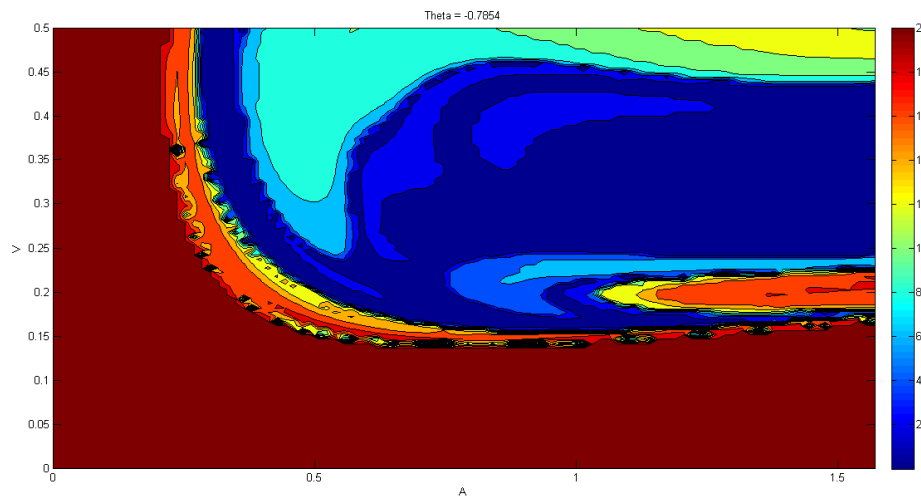


Figura 30: voltes completades pel tether sobre ell mateix en un temps d'integració de  $10\pi$  unitats. L'eix x representa la variable 'a' mentre que l'eix y representa la variable 'v'. La figura es correspon a un valor inicial de  $\theta = -\pi/4$ ,  $i = 60^\circ$  i  $\varepsilon = 1$ .

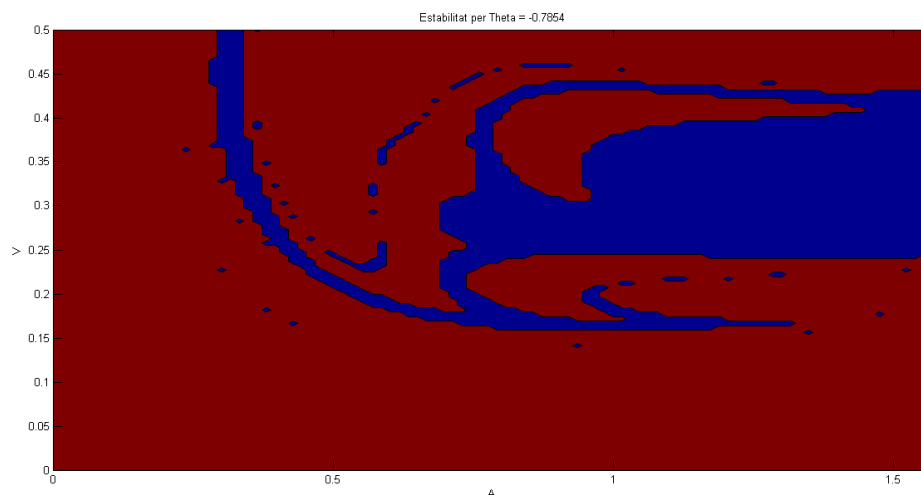


Figura 31: Classificació de les condicions inicials que donen lloc a estabilitat (blau) o inestabilitat (vermell) per un temps d'integració de  $10\pi$  per  $\theta = -\pi/4$ ,  $i = 60^\circ$  i  $\varepsilon = 1$ .

Podem observar:

- Tal com esperàvem, la forma de cada parell de gràfics coincideix.
- Pels valors de  $\theta = -\pi/20$ ,  $-\pi/10$ ,  $-3\pi/20$ , l'àrea estable és major que pels valors de  $\theta = 0$ ,  $-\pi/5$ ,  $-3\pi/4$ .
- Podem observar diferents transicions entre estabilitat i inestabilitat. Mentre que a les figures 20 i 28 la transició és progressiva, a la resta aquesta transició és molt sobtada.

- És interessant observar que en alguns gràfics, en una zona on pràcticament totes les condicions són inestables, apareixen algunes d'estables.
- Sempre trobem inestabilitat pels valors més grans de  $A$  i més petits de  $V$ , a la part inferior dreta dels gràfics.

Els estudis realitzats considerant diferents valors de les variables  $i$  i  $\varepsilon$  per avaluar els rangs d'estabilitat sota multitud de casos han emprat un total de 1014 condicions inicials diferents per cada combinació de  $i$  i  $\varepsilon$ . Cal destacar que quan les dues variables  $i$  i  $\varepsilon$  prenen valors elevats, el tether té més tendència a desestabilitzar-se, mentre que si prenen valors reduïts, es guanya estabilitat. A continuació hem resumit els resultats dels estudis en diverses taules.

Estudis per $i=40^\circ$ i $\varepsilon=0,5$		Estudis per $i=50^\circ$ i $\varepsilon=0,5$		Estudis per $i=60^\circ$ i $\varepsilon=0,5$	
$\theta$	% Estabilitat	$\theta$	% Estabilitat	$\theta$	% Estabilitat
0	100	0	100	0	100
$-\pi/20$	100	$-\pi/20$	100	$-\pi/20$	100
$-\pi/10$	100	$-\pi/10$	100	$-\pi/10$	100
$-3\pi/20$	100	$-3\pi/20$	100	$-3\pi/20$	100
$-\pi/5$	100	$-\pi/5$	100	$-\pi/5$	100
$-\pi/4$	100	$-\pi/4$	100	$-\pi/4$	100

Estudis per $i=40^\circ$ i $\varepsilon=1,0$		Estudis per $i=50^\circ$ i $\varepsilon=1,0$		Estudis per $i=60^\circ$ i $\varepsilon=1,0$	
$\theta$	% Estabilitat	$\theta$	% Estabilitat	$\theta$	% Estabilitat
0	17,8	0	15,4	0	29,1
$-\pi/20$	53,8	$-\pi/20$	48,5	$-\pi/20$	66,6
$-\pi/10$	78,7	$-\pi/10$	67,5	$-\pi/10$	80,3
$-3\pi/20$	96,4	$-3\pi/20$	85,2	$-3\pi/20$	73,7
$-\pi/5$	95,9	$-\pi/5$	81,1	$-\pi/5$	46,1
$-\pi/4$	91,1	$-\pi/4$	42,0	$-\pi/4$	22,4

Estudis per $i=40^\circ$ i $\varepsilon=1,5$		Estudis per $i=50^\circ$ i $\varepsilon=1,5$		Estudis per $i=60^\circ$ i $\varepsilon=1,5$	
$\theta$	% Estabilitat	$\theta$	% Estabilitat	$\theta$	% Estabilitat
0	0	0	0	0	0
$-\pi/20$	0	$-\pi/20$	0	$-\pi/20$	0
$-\pi/10$	0	$-\pi/10$	0	$-\pi/10$	0
$-3\pi/20$	0	$-3\pi/20$	0,6	$-3\pi/20$	0,6
$-\pi/5$	0	$-\pi/5$	0	$-\pi/5$	0,6
$-\pi/4$	0	$-\pi/4$	0	$-\pi/4$	0

Taula 6: Resum dels percentatges d'estabilitat en funció de theta,  $i$  i  $\varepsilon$  per un temps d'integració de  $10\pi$  unitats.



### 5.3. Conclusions

Observem que el paràmetre que més influeix en l'estabilitat d'un TSS és  $\varepsilon$ . Com major és aquest paràmetre, major és la influència del parell de Lorenz en el comportament del TSS. Hem observat que al augmentar  $\varepsilon$ , creix el nombre d'òrbites que es desestabilitzen. Això es deu a que el parell de Lorenz tendeix a fer rotar el TSS, de manera que com més influeix aquest moment al comportament del sistema, més fàcil serà que arribi a completar una volta sencera.

El segon paràmetre que més influeix en l'estabilitat és  $\theta$ . Aquest paràmetre maximitza l'estabilitat del TSS per valors intermedis entre 0 i  $-\pi/4$ , sent aquest dos extrems menys estables.

També observem que  $i$  (inclinació del pla orbital respecte el pla equatorial) influeix poc en l'estabilitat del TSS.

Per acabar de validar aquestes observacions hauríem de fer un anàlisi estadístic més profund.

## 6- Resum del pressupost

El resum general del pressupost és:

PRESSUPOST D'EXECUCIÓ	21.346,50 €
14% de despeses generals d'empresa	2988,51 €
6% de benefici industrial	1280,79 €
<b>PRESSUPOST D'EXECUCIÓ TOTAL A FALTA D'IVA</b>	<b>25.615,80 €</b>

El pressupost d'execució a falta d'iva és de vint-i-cinc mil sis-cents quinze euros amb vuitanta cèntims.

## 7- Conclusions

La dinàmica dels TSS és complexa i pot ser estudiada amb molts models matemàtics diferents, depenent del tipus de tether a estudiar i del grau de exactitud que es vulgui aconseguir. Així, els models més simples són útils per estudiar el comportament dels tethers per períodes de temps petits. Si volem analitzar el comportament d'un TSS de manera més precisa, però, haurem fer ús de models més elaborats.

En aquest treball hem estudiat el comportament dominant d'un TSS en funció del material del què està fabricat mitjançant el model simplificat en el pla, l'estabilitat de diferents punts d'equilibri amb el model ampliat d'un tether a l'espai i l'estabilitat de les òrbites periòdiques d'un tether electrodinàmic.

El capítol 3 ha servit essencialment per entendre la dinàmica interna d'un tether, assolint així els conceptes bàsics per poder entendre els models més complexos. A més, hem observat que tant la màxima variació de la distància entre els dos cossos extrems com el període del moviment del tether disminueixen a mesura que el mòdul de Young del material del tether augmenta. Això fa que materials experimentals com els nano tubs de carboni siguin de gran interès.

En el capítol 4 hem il·lustrat el comportament del TSS per condicions inicials properes als punts d'equilibri fent ús dels valors propis i els vectors propis del sistema en aquells punts. Així, hem observat la existència de punts estables i altres inestables. Un TSS situat sobre un punt estable haurà de fer ús de sistemes de control de l'estabilitat.

En el capítol 5 hem analitzat la influència de les variables  $\varepsilon$ ,  $i$  i  $\theta$  en l'estabilitat de les òrbites periòdiques [12]. En primera aproximació podem concloure que el paràmetre que més influeix en desestabilitzar el TSS és  $\varepsilon$ , que mesura la influència del parell de Lorenz en el comportament del sistema. Així, per valors elevats de  $\varepsilon$  serà molt difícil mantenir el TSS estable, sent molt necessària la introducció de mesures de control de l'estabilitat. Per altra banda, la variable  $i$  resulta poc rellevant en la estabilitat del TSS.

Havent aconseguit els objectius que ens havíem proposat en aquest treball, creiem que seria interessant estudiar l'estabilitat d'un TSS durant la fase de desplegament. També seria interessant estudiar en profunditat els tethers electrodinàmics.

## 8- Relació de documents

La relació de documents que componen aquest treball és:

- 1- Memòria i Annexos

## 9- Bibliografia

- [1] - BATE R., MUELLER D. i WHITE J. Fundamentals of astrodynamics. 1971.
- [2] - HIRSCH M., SMALE S. i DEVANEY R. Differential Equations, Dynamical Systems & An Introduction to Chaos. 2004.
- [3] - COSMO M. i LORENZINI E. Tethers In Space Handbook. 1997.
- [4] - ALPATOV A. et. al. Dynamics of Tethered Space Systems. 2010.
- [5] - WEN H., JIN D. i HU H. Advances in dynamics and control of tethered satellite systems. P. 229-241. 2008.
- [6] - THE ASSOCIATED PRESS. Robots, harpoons could clean up space junk. (<http://www.cbc.ca/news/technology>, 25 d'abril de 2013).
- [7] - LORENZINI E. et. al. Control and Flight Performance of Tethered Satellite Small Expendable Deployment System-II. 1996.
- [8] - WEN H., JIN D. i HU H. Optimal feedback control of the Deployment of a tethered subsatellite subject to perturbations. P. 501-514. 2008.
- [9] - DEMERCHANT C. Aramid Fibers, trade names Kevlar, Twaron, Nomex, Technora. ([http://www.christinedemerchant.com/aramid\\_characteristics.html](http://www.christinedemerchant.com/aramid_characteristics.html)).
- [10] - PILLING J. Properties of selected fibres. (<http://www.mse.mtu.edu>, 2005).
- [11] - HONEYWALL ADVANCED FIBERS AND COMPOSITES. Fibre Capability Guide. (<https://www.honeywell-spectra.com>, juny de 2013).
- [12] - SANJURJO M. i PELÁEZ J. Control de amarres electrodinámicas auto equilibradas. P. 115-136. 2006.
- [13] - IÑARREA M. et. al. Attitude stabilization of electrodynamic tethers in elliptic orbits by time-delay feedback control. P. 280-295. 2008.

## 10- Glossari

- **Tether:** en català s'anomena amarratge. Són cables llargs que poden ser utilitzats per unir dos o més cossos.
- **TSS** (*Tethered Satellite System*): s'anomena TSS al conjunt del tether i els cossos extrems que hi estan units.
- **EDT** (*Electrodynamic Tether*): es tracta d'un tether fabricat amb material conductor de l'electricitat i fa ús de la ionosfera i el camp magnètic terrestres per generar una força de Lorentz induïda al seu centre de masses.
- **MET** (*Momentum Exchange Tether*): es tracta d'un tether destinat a l'intercanvi d'energia cinètica entre els cossos que hi estan connectats.
- **LEO** (*Low Earth Orbit*): es classifiquen com LEO aquells satèl·lits o altres tipus de naus espacials que orbiten a una altura d'entre 200 i 2.000 km respecte el nivell del mar.
- **MEO** (*Medium Earth Orbit*): es classifiquen com MEO aquells satèl·lits o altres tipus de naus espacials que orbiten a una altura d'entre 2000 i 35.786 km respecte el nivell del mar.
- **GSO** (*Geosynchronous Orbit*): es classifiquen com MEO aquells satèl·lits o altres tipus de naus espacials que orbiten a una altura de 35.786 km respecte el nivell del mar. Tenen la particularitat de tenir un període orbital igual al període de rotació terrestre.
- **GEO** (*Geostationary Earth Orbit*): són un cas particular de les GSO. Es troben en el pla equatorial de la Terra i es troben permanentment sobre el mateix punt respecte la superfície terrestre.
- **HEO** (*High Earth Orbit*): es classifiquen com MEO aquells satèl·lits o altres tipus de naus espacials que orbiten a una altura superior a 35.786 km respecte el nivell del mar.
- **VAP:** valor propi.
- **VEP:** vector propi.
- **Pitch:** l'angle pitch és l'angle format per la inclinació del tether respecte la vertical local dins el pla orbital.
- **Roll:** l'angle roll és l'angle format per la inclinació del tether respecte la vertical local perpendicular al pla orbital.

## Annexos

### A- Codi informàtic

#### A.3- Codi del model simplificat d'un tether al pla

```

% Tether pla
% Variables de sortida:
% r (m)
% phi (rad)
% r' (m/s)

clear;clc
format short;
% PREPROCESS
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
fun = @(t,x,C,delta,L,m1,m2,d) [ x(3)
                                L/(x(1)^2)
                                -(C*(m1+m2)/(m1*m2))/d)*(x(1)-
d)*delta+L^2/(x(1)^3) ];
pint = [1 0 1
        0 0 1
        1 0 0
        0 1 0
        1 1 0];
% Propietats del TSS
rigidesa = [ 7.996328e4 % CFRP
            4.329504e4 % Spectra 1000
            4.965676e4 % Aramida
            4.4178609e5 ];% SWNT
d = 20000; %m
L = 0.075*d^2; %m^2/s
m1 = 26; m2 = 26; %Kg
fun = @(t,x,C,delta) fun(t,x,C,delta,L,m1,m2,d);

% Valors inicials
r = (0.25:0.25:1)*d;
phi = 0;
vel = 0;
temps = 25; tspan=[0 temps];
tol = 1e-13;
hmax = 1e-2;

% PROCESS
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
resuT=zeros(temps*12e2,4);
rMax=zeros(length(r)*length(rigidesa),1);
rMin=rMax;
rMax_r0=rMax;
rpMax=zeros(length(r)*length(rigidesa),2);
periode=zeros(length(r)*length(rigidesa),1);
index=1;
indexR=0;
for i = 1:length(r) %Calcul de r, phi i rp de t=[t0,tF] per cada
material per cada r inicial
    ab = [r(i),phi,vel];

    for j=1:length(rigidesa)

```



```

        indexR=indexR+1;
        C=rigidesa(j);
        funDet = @(t,x,delta) fun(t,x,C,delta);
        [t,x] = ode78(funDet,tspan,ab,0,tol,0,0,hmax,d);
resu=[t,x];
        rMax(indexR)=max(resu(:,2)/d);
        rMax_r0(indexR) = rMax(indexR)/(r(i)/d);
        rMin(indexR)=min(resu(:,2)/d);
        [rpMaxi,ri] = max(resu(:,4)/d);
        rpMax(indexR,:)= [rpMaxi resu(ri,2)/d];
        resuT(index:length(t)-1,:)=resu;
        index=index+length(t);
        for k = 1:size(resu,1)-1
            if resu(k,4)*resu(k+1,4) < 0 && resu(k,2)/d < 1+1e-3
                periode(indexR) = resu(k,1);
                break
            end
        end
    end
end

end

% POSTPROCESS
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
tT=resuT(:,1); grups=1; iniciGrup(grups)=1;
for i=1:length(tT)-1 %Compta el nombre de grups i on comencen
    ti=tT(i);    tj=tT(i+1);
    if tj<ti
        grups=grups+1;
        iniciGrup(grups)=i+1;
    end
end
iniciGrup(grups+1)=length(tT)+1; %Indica la posició on començaria
un últim grup imaginari

% r/d vs rp/d
% figure(1); % Comentar per plots separats
for i=1:length(r)
    index=(i-1)*grups/length(r);
    figure(i+1); % Comentar per un sol plot
% subplot(2,2,i); % Comentar per plots separats
    for j=1:grups/length(r)
        plot(resuT(iniciGrup(index+j):iniciGrup(index+j+1)-
1,2)/d,...
            resuT(iniciGrup(index+j):iniciGrup(index+j+1)-
1,4)/d,...
            'LineWidth', 2,'Color',pint(j,:)); hold on
    end
    title(['r0 = ',num2str(r(i)/d),' ·d']);
    xlabel('r/d'); ylabel('rp/d');
    axis([0.2 2 -0.3 0.3]);
    legend('CFRP','Spectra 1000','Aramida','SWNT');
    hold off
end
display(rMax_r0)
display(periode)

```

```

% Tether pla, càlcul de períodes
% Variable de sortida:
% P (s)

% PREPROCESS
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
fun = @(t,x,C,delta,L,m1,m2,d) [ x(3)
                                L/(x(1)^2)
                                -(C*(m1+m2)/(m1*m2))/d)*(x(1)-
d)*delta+L^2/(x(1)^3) ];

% Propietats del TSS
rigidesa = [ 7.996328e4 % CFRP
             4.329504e4 % Spectra 1000
             4.965676e4 % Aramida
             4.4178609e5 ];% SWNT
d = 20000; %m
L = 0.075*d^2; %m^2/s
m1 = 26; m2 = 26; %Kg
fun = @(t,x,C,delta) fun(t,x,C,delta,L,m1,m2,d);
% Valors inicials
r = (0.25:0.25:1)*d;
phi = 0;
vel = 0;
dt = 1e-1; tspan = [0 dt];
tol = 1e-13;
hmax = 1e-2;
nPS = 1;
variablePS = 3;

% PROCESS
períodes = zeros(length(r)*length(rigidesa),3);
index = 0;
for i = 1:length(r)
    for j = 1:length(rigidesa)
        ab = [r(i),phi,vel];
        index=index+1;
        C = rigidesa(j);
        períodes(index,1:2)=[ r(i) C ]';
        iPS=0; tspan = [0 dt];
        funDet = @(t,x,delta) fun(t,x,C,delta);
        while iPS<1
            [t,x] = ode78(funDet,tspan,ab,0,tol,0,0,hmax,d);
        end
        resu=[t,x]';
        if x(1,variablePS)*x(end,variablePS)<0
            [ Ti,~ ] = Biseccio(
            resu,variablePS,funDet,tol,hmax*1e-2,d);
            períodes(index,end) = 2*Ti;
            iPS=iPS+1;
        else
            ab = resu(2:end,end);
            tspan = tspan+dt;
        end
    end
end
end
display(períodes)

```

```

T = @(r,delta,Cm,d) (Cm/d)*(r-d)*delta ; % Defineixo la funció T

Cm = 1;
d = 1;

T=@(r,delta) T(r,delta,Cm,d); % Redueixo el nombre de variables de 'T'
                                % Per fer el gràfic, no ens cal saber
                                % 'Cm' i 'd'
                                % Estableixo 'd=1' perquè al gràfic
                                % quedarà bé.

R = 0:0.1:2; % Defineixo varis valors de 'R' de 0 a 2 amb increments
de 0.01
tensio = zeros(1,length(R)); % Creo un vector de zeros per augmentar
la
                                % velocitat d'execució del programa.

for i=1:length(R)
    r = R(i); % Dono un valor concret a la 'r'

    if r<1 % Trio si 'delta' és '0' o '1'
        delta = 0;
    else
        delta = 1;
    end

    tensio(i) = T(r,delta); % Calculo la tensió per cada valor de 'r'
i la
                                % 'delta' que toca.
end

Ti = find(tensio==0); % 'Ti' conté la posició dels valors del vector
'tensió'
                                % iguals a zero. La comanda 'find' és molt útil.
ri = R(Ti(end)); % 'ri' pren el valor de la posició de 'R' al qual li
% correspon l'últim valor de 'T' igual a zero

figure(1); % Crea una figura anomenada 'Figure 1' on es farà el plot
plot(R,tensio,'LineWidth',3); hold on % 'hold on' manté el grafic
actiu
                                % per poder-hi treballar i
                                % 'LineWidth' defineix gruix de
linia
scatter(ri,0,67,'r','fill'); % Dibuixa un cercle a (ri,0) de mida 67,
color 'r' i ple
    xlabel('r'); ylabel('T'); % Poso nom als eixos.
    title('Evolució de la tensió'); % Poso títol al gràfic.
    legend('T = f(r)', 'r = d'); % Crea una llegenda per entendre
millor el gràfic
hold off % 'hold off' fa que ja no pugui canviar res al gràfic.

```

```

function [ Ti,Yi ] = Biseccio( resu,variablePS,fun,precisio,hmax,d)
%Bisecció troba l'instant de temps pel qual una variable es fa zero

loopLimit=1500; loopBS=0; variablePS=variablePS+1;

BSspan=[resu(1,1) , resu(1,end)];

while loopBS<loopLimit
    loopBS=loopBS+1; if mod(loopBS,250)==0; display(loopBS); end

    %Valor de la variable intermedi
    mida=size(resu); esSenar=mod(mida(2),2);
    switch esSenar
        case 0; pos=mida(2)/2;
        otherwise; pos=mida(2)/2+0.5;
    end
    %Tria dels valors extrems i intermedis de theta prima.
    a=resu(variablePS,1); b=resu(variablePS,end); ...
    c=resu(variablePS,pos); %Valors de la variable
    %Registre de la secció en cas que es compleixi el criteri de
    precisio
    if abs(c)<precisio
        Yi = resu(2:end,pos);
        Ti = resu(1,pos);
    %
        display('Bisecció finalitzada al '); display(loopBS);
        break
    end %if

    if a*c<0 && c*b>0; BSspan=[resu(1,1) , resu(1,pos)];...
        xy=resu(2:end,1);
    elseif a*c>0 && c*b<0; BSspan=[resu(1,pos) ,
resu(1,end)];...
        xy=resu(2:end,pos);
    elseif a*c<0 && c*b<0; error('Hi ha més d''1 tall a secc.
\n');
    elseif a*c>0 && c*b>0; error('No hi ha tall a secció \n');
    end %if
    %Integració amb seguretat contra bucles infinits
    if abs(BSspan(2)-BSspan(1))>=1e-15
        [t,x] = ode78(fun,BSspan,xy,0,precisio,0,0,hmax,d);
    resu2=[t,x]';
    else
        resu2=[];
    end
    %Registre de la secció en cas que no es pugui continuar integrant.
    sizeTest=size(resu2); punts=[a,c,b];
    if sizeTest(2)<3; [~,posicio]=min(abs(punts));
        switch posicio
            case 1; coord = resu(:,1);
                Yi = resu(2:end,posicio);
                Ti = resu(1,posicio);

            case 2; coord = resu(:,pos);
                Yi = resu(2:end,posicio);
                Ti = resu(1,posicio);

            case 3; coord = resu(:,end);
                Yi = resu(2:end,posicio);
                Ti = resu(1,posicio);
        end
end

```

```
        display(punts); display(coord);
        break
    else
        resu=resu2;
    end %if
end
if loopBS==loopLimit
    error('No s''ha completat amb èxit la bisecció');
end %if
end
```

```

function [tout,xout] =
ode78 (FUN,tspan,x0,ode_fcn_format,tol,trace,count,hmax,d)

% Copyright (C) 2001, 2000 Marc Compere
% This file is intended for use with Octave.
% ode78.m is free software; you can redistribute it and/or modify it
% under the terms of the GNU General Public License as published by
% the Free Software Foundation; either version 2, or (at your option)
% any later version.
%
% ode78.m is distributed in the hope that it will be useful, but
% WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
% MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the GNU
% General Public License for more details at
www.gnu.org/copyleft/gpl.html.
%
% -----
%
% ode78 (v1.14) Integrates a system of ordinary differential equations
using
% 7th order formulas.
%
% This is a 7th-order accurate integrator therefore the local error
normally
% expected is  $O(h^8)$ . However, because this particular implementation
% uses the 8th-order estimate for xout (i.e. local extrapolation)
moving
% forward with the 8th-order estimate will yield errors on the order
of  $O(h^9)$ .
%
% The order of the RK method is the order of the local *truncation*
error, d,
% which is the principle error term in the portion of the Taylor
series
% expansion that gets dropped, or intentionally truncated. This is
different
% from the local error which is the difference between the estimated
solution
% and the actual, or true solution. The local error is used in
stepsize
% selection and may be approximated by the difference between two
estimates of
% different order,  $l(h) = x_0(h+1) - x_0(h)$ . With this
definition, the
% local error will be as large as the error in the lower order method.
% The local truncation error is within the group of terms that gets
multiplied
% by h when solving for a solution from the general RK method.
Therefore, the
% order-p solution created by the RK method will be roughly accurate
to  $O(h^{(p+1)})$ 
% since the local truncation error shows up in the solution as  $h^d$ ,
which is
% h times an  $O(h^p)$  term, or rather  $O(h^{(p+1)})$ .
% Summary: For an order-p accurate RK method,
%
% - the local truncation error is  $O(h^p)$ 
%
% - the local error used for stepsize adjustment and that
% is actually realized in a solution is  $O(h^{(p+1)})$ 
%
% This requires 13 function evaluations per integration step.
%

```

```

% Relevant discussion on step size choice can be found on pp.90,91 in
% U.M. Ascher, L.R. Petzold, Computer Methods for Ordinary
Differential Equations
% and Differential-Algebraic Equations, Society for Industrial and
Applied Mathematics
% (SIAM), Philadelphia, 1998
%
% More may be found in the original author's text containing numerous
% applications on ordinary and partial differential equations using
Matlab:
%
%   Howard Wilson and Louis Turcotte, 'Advanced Mathematics and
%   Mechanics Applications Using MATLAB', 2nd Ed, CRC Press, 1997
%
%
% [tout, xout] =
ode78(FUN,tspan,x0,ode_fcn_format,tol,trace,count,hmax)
%
% INPUT:
% FUN    - String containing name of user-supplied problem description.
%         Call: xprime = fun(t,x) where FUN = 'fun'.
%         t      - Time (scalar).
%         x      - Solution column-vector.
%         xprime - Returned derivative COLUMN-vector; xprime(i) =
dx(i)/dt.
% tspan - [ tstart, tfinal ]
% x0    - Initial value COLUMN-vector.
% ode_fcn_format - this specifies if the user-defined ode function is
in
%         the form:      xprime = fun(t,x)    (ode_fcn_format=0,
default)
%         or:           xprime = fun(x,t)    (ode_fcn_format=1)
%         Matlab's solvers comply with ode_fcn_format=0 while
%         Octave's lsode() and sdirk4() solvers comply with
ode_fcn_format=1.
% tol   - The desired accuracy. (optional, default: tol = 1.e-6).
% trace - If nonzero, each step is printed. (optional, default: trace
= 0).
% count - if nonzero, variable 'rhs_counter' is initalized, made
global
%         and counts the number of state-dot function evaluations
%         'rhs_counter' is incremented in here, not in the state-dot
file
%         simply make 'rhs_counter' global in the file that calls
ode78
% hmax  - limit the maximum stepsize to be less than or equal to hmax
%
% OUTPUT:
% tout  - Returned integration time points (row-vector).
% xout  - Returned solution, one solution column-vector per tout-
value.
%
% The result can be displayed by: plot(tout, xout).

%   Daljeet Singh & Howard Wilson
%   Dept. Of Electrical Engg., The University of Alabama.
%   11-24-1988.
%
% modified by:
% Marc Compere
% CompereM@asme.org

```

```

% created : 06 October 1999
% modified: 19 May 2001

% The Fehlberg coefficients:
alpha_ = [ 2./27., 1/9, 1/6, 5/12, 0.5, 5/6, 1/6, 2/3, 1/3, 1, 0, 1
]';
beta_   = [ 2/27, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ;
            1/36, 1/12, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ;
            1/24, 0, 1/8, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ;
            5/12, 0, -25/16, 25/16, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ;
            0.05, 0, 0, 0.25, 0.2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ;
            -25/108, 0, 0, 125/108, -65/27, 125/54, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0
;
            31/300, 0, 0, 0, 61/225, -2/9, 13/900, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ;
            2, 0, 0, -53/6, 704/45, -107/9, 67/90, 3, 0, 0, 0, 0, 0 ;
            -91/108, 0, 0, 23/108, -976/135, 311/54, -19/60, 17/6, -
1/12, 0, 0, 0, 0 ;
            2383/4100, 0, 0, -341/164, 4496/1025, -301/82, 2133/4100,
45/82, 45/164, 18/41, 0, 0, 0 ;
            3/205, 0, 0, 0, 0, -6/41, -3/205, -3/41, 3/41, 6/41, 0, 0, 0
;
            -1777/4100, 0, 0, -341/164, 4496/1025, -289/82, 2193/4100,
51/82, 33/164, 12/41, 0, 1, 0 ]';
chi_   = [ 0, 0, 0, 0, 0, 34/105, 9/35, 9/35, 9/280, 9/280, 0, 41/840,
41/840]';
psi_   = [ 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, -1 ]';

pow = 1/8; % see p.91 in the Ascher & Petzold reference for more
infomation.

if nargin < 8, hmax = (tspan(2) - tspan(1))/2.5; end
if nargin < 7, count = 0; end
if nargin < 6, trace = 0; end
if nargin < 5, tol = 1.e-6; end
if nargin < 4, ode_fcn_format = 0; end

% Initialization
t0 = tspan(1);
tfinal = tspan(2);
t = t0;
% the following step parameters are used in ODE45
% hmax = (tfinal - t)/5;
% hmin = (tfinal - t)/20000;
% h = (tfinal - t)/100;
% The following parameters were taken because the integrator has
% higher order than ODE45. This choice is somewhat subjective.
%hmin = (tfinal - t)/10000;
hmin = (tfinal - t)/1e20;
h = (tfinal - t)/50;
x = x0(:); % the ':' ensures x is initialized as a column
vector
f = x*zeros(1,13); % f needs to be an Nx13 matrix where N=number of
rows in x
tout = t;
xout = x.';
tau = tol * max(norm(x,'inf'), 1);

if count==1,

```



```

global rhs_counter
if ~exist('rhs_counter'),rhs_counter=0; end
end % if count

if trace
% clc, t, h, x
% clc, t, x
clc, display(t)
end

% The main loop
while (t < tfinal) && (h >= hmin)
    if t + h > tfinal, h = tfinal - t; end
    %AFEGIT CRISTINA -->
    mida=size(xout);
    if xout((mida(1)),1) < d
        delta=0;
    else
        delta=1;
    end
    %A més, he afegit variable delta als 4 feval
    %<-- AFEGIT CRISTINA

    % Compute the slopes
    if (ode_fcn_format==0), % (default)
        f(:,1) = feval(FUN,t,x,delta);
        for j = 1: 12,
            f(:,j+1) = feval(FUN, t+alpha_(j)*h,
x+h*f*beta_(:,j),delta);
        end
    else % ode_fcn_format==1
        f(:,1) = feval(FUN,x,t,delta);
        for j = 1: 12,
            f(:,j+1) = feval(FUN, x+h*f*beta_(:,j),
t+alpha_(j)*h,delta);
        end
    end % if (ode_fcn_format==1)

    % increment rhs_counter
    if count==1, rhs_counter = rhs_counter + 13; end

    % Truncation error term
    gammal = h*41/840*f*psi_;

    % Estimate the error and the acceptable error
    delta = norm(gammal,'inf');
    tau = tol*max(norm(x,'inf'),1.0);

    % Update the solution only if the error is acceptable
    if delta <= tau
        t = t + h;
        x = x + h*f*chi_; % this integrator uses local extrapolation
        tout = [tout; t];
        xout = [xout; x.'];
    end
    if trace
%         home, t, h, x
%         home, t, x
%         home, t, h

```

```
end

% Update the step size
if delta == 0.0
    delta = 1e-16;
end
h = min(hmax, 0.8*h*(tau/delta)^pow);

end;

if (t < tfinal)
    disp('SINGULARITY LIKELY.')
    display(t)
end
```

## A.4- Codi del model ampliat d'un tether a l'espai

```

format short e
clear; clc

% ----- PRE PROCESS -----

d = 20000; % Longitud nominal del tether
m = 26; % Massa petita
Cm = 0.5*d;

t = 20*pi; % Temps d'integració

a = 1e-4; % Quantitat de desviació.
b = pi/4; % Proporció de desviació entre part real i imaginària.

mU = 3.986005e14; % Constant gravitacional de la Terra
r0 = 6728e3; % Distància del tether al centre de la Terra

[nEstables,iVap,iPunt,CIs,ct] = analisi(a,b,d,mU,r0,m,Cm);
save('resuAnalisi.mat','nEstables','iVap','iPunt','CIs','ct',...
     'a','b','t')

% ----- PROCESS -----
nota = strcat(['Hi ha ',num2str(nEstables),' VAPS estables.']);
display(nota)
proces = input('Vols crear-ne els arxius .txt? (y/[])\n','s');
graficar = input('Vols crear-ne els gràfics corresponents?
(y/[])\n','s');
if strcmpi(proces,'y') == 1
    % Calcular la òrbita de cada C.I. proposada durant un determinat
    temps.
    rotulacio = [' temps ',' theta ',' phi ',' xi ',...
                ' thetaP ',' phiP ',' xiP '];
    for i = 1:nEstables
        titol = strcat(['Punt eq. ',num2str(iPunt(i)),...
                       ', vap ',num2str(iVap(i)),', mod ',num2str(a),...
                       ', angle ',num2str(b*180/pi),'°',...
                       ', temps ',num2str(t)]);
        display(i)
        display(titol)
        [ resu ] = nInt( CIs(i,:) , [0 t], titol, rotulacio, ct );
    end
end
if strcmpi(graficar,'y') == 1
    plotter;
end

```

```

function [nEstables,iVap,iPunt,CIs,ct] = analisi (a,b,d,mU,r0,m,Cm)
% ANALISI Troba els VAPS imaginaris del model
% i proposa condicions inicials properes als punts estables
(centes)

% DF =
% | d(x'1)/d(x1) . . . d(x'1)/d(x6) |
% | . . . . |
% | . . . . |
% | d(x'6)/d(x1) . . . d(x'6)/d(x6) |

% T>=0 (article) --> x(3)>=1 --> delta=1

% 'ct' és el valor contant de la equació de 'u'
ct = Cm/(m*d*(mU/(r0^3)));
tol = 1e-6;

punts_eq = [ 0 0 -ct/(3-ct) % Cas 1 (delta = 1)
             0 pi -ct/(3-ct)
             pi 0 -ct/(3-ct)
             pi pi -ct/(3-ct)
             pi/2 0 1 % Cas 3 (delta = 1)
             pi/2 pi 1
             3*pi/2 0 1
             3*pi/2 pi 1 ];

% 0 0 0 % Cas 1 (delta = 0)
% 0 pi 0
% pi 0 0
% pi pi 0
% 0 pi/2 0 % Cas 2 (delta = 0)
% 0 3*pi/2 0
% pi pi/2 0
% pi 3*pi/2 0
% pi/2 0 0 % Cas 3 (delta = 0) (prenem
x3 = 0)
% pi/2 pi 0
% 3*pi/2 0 0
% 3*pi/2 pi 0
% pi/2 pi/2 0 % Cas 4 (delta = 0)
% pi/2 3*pi/2 0
% 3*pi/3 pi/2 0
% 3*pi/2 3*pi/2 0 ];

punts_eq = [punts_eq zeros(size(punts_eq,1),3)];
display(punts_eq(:,1:3))
% xlswrite('punts_eq.xlsx',punts_eq);

DF = @(x,K) [ 0 0 0 1 0 0
             0 0 0 0 1 0
             0 0 0 0 0 1
             -3*cos(2*x(1)) 2*(x(4)-1)*x(5)*(sec(x(2)))^2 2*(x(4)-
1)*x(6)/(x(3)^2) 2*(x(5)*tan(x(2))-x(6)/x(3)) 2*(x(4)-1)*tan(x(2))
(2-2*x(4))/x(3)
             6*sin(x(2))*cos(x(2))*sin(x(1))*cos(x(1)) -
0.5*(cos(2*x(2)))*(3*cos(2*x(1))+2*(x(4))^2-4*x(4)+5)
2*x(6)*x(5)/((x(3))^2) -(x(4)-1)*sin(2*x(2)) -2*x(6)/x(3) -
2*x(5)/x(3)

```

```

        -6*x(3)*(cos(x(2)))^2*sin(x(1))*cos(x(1)) x(3)*(-
6*(cos(x(1)))^2*sin(x(2))*cos(x(2))-2*(x(4)-1)^2*sin(x(2))*cos(x(2)))
3*(cos(x(1)))^2*(cos(x(2)))^2+(x(4)-1)^2*(cos(x(2)))^2-K*x(5)^2-1
2*x(3)*(x(4)-1)*(cos(x(2)))^2 2*x(3)*x(5) 0 ]);

nPunts = size(punts_eq,1);
nDF     = size(punts_eq,2);
K = zeros(nPunts,1);
K(punts_eq(:,3)>1) = ct;

% Estudiar vaps i veps de cada punt d'equilibri
% veps i vaps són tensors de mida 6 x 6 x nPunts
% Cada matriu '6 x 6 x i' mostra els valors corresponents al punt
'i'
% Cada vep '6 x j' mostra els veps del vap 'j x j'
vEps = zeros(nDF,nDF,nPunts);
vAps = vEps;

for i = 1:nPunts
    [vEps(:,:,i),vAps(:,:,i)] = eig(DF(punts_eq(i,:),K(i)));
end % Trobar VAPS i VEPS

% Anàlisi vaps
list = zeros(size(vAps,3),size(vAps,1)*2);
for i = 1:size(vAps,3)
    for j = 1:size(vAps,1)
        list(i,2*j-1) = real(vAps(j,j,i));
        list(i,2*j)   = imag(vAps(j,j,i));
    end
end % Crea llista vaps
list = [punts_eq(:,1:3) list];
list(abs(list)<tol) = 0;

VAPSaparellats = zeros(8,6);
list = list(:,4:end);

for i = 1:8
    for j = 1:6
        if i <=4
            VAPSaparellats(i,j) = complex(list(i,2*j-1),list(i,2*j));
        elseif i > 4 && j == 1
            VAPSaparellats(i,j) = complex(list(i,2*j-
1),list(i,2*j));
            VAPSaparellats(i,j+1) = complex(list(i,end-
1),list(i,end));
        elseif i > 4 && j > 1 && j < 4
            VAPSaparellats(i,j+1) = complex(list(i,2*j-
1),list(i,2*j));
        end
    end
end % Aparellar VAPS
listVAPS = zeros(8,6*2);
for i = 1:8
    for j = 1:6
        listVAPS(i,2*j-1) = real(VAPSaparellats(i,j));
        listVAPS(i,2*j)   = imag(VAPSaparellats(i,j));
    end
end % Crear llista VAPS per excel

VEPSaparellats = zeros(8*6,6);

```

```

for i = 1:8
    for j = 1:6
        if i <= 4
            VEPSaparellats(6*i-5:6*i,j) = vEps(:,j,i);
        elseif i > 4 && j == 1
            VEPSaparellats(6*i-5:6*i,j) = vEps(:,j,i);
            VEPSaparellats(6*i-5:6*i,j+1) = vEps(:,end,i);
        elseif i > 4 && j > 1 && j < 6
            VEPSaparellats(6*i-5:6*i,j+1) = vEps(:,j,i);
        end
    end
end % Aparellar VEPS
listVEPS = zeros(8*6,6*2);
for i = 1:8
    for j = 1:6
        listVEPS(6*i-5:6*i,2*j-1) = real(VEPSaparellats(6*i-
5:6*i,j));
        listVEPS(6*i-5:6*i,2*j) = imag(VEPSaparellats(6*i-
5:6*i,j));
    end
end % Crear llista VEPS per excel
listVEPS(abs(listVEPS)<tol) = 0;
% xlswrite('vaps.xlsx',listVAPS)
% xlswrite('vapsPunts.xlsx',[punts_eq(:,1:3) listVAPS])
% xlswrite('veps.xlsx',listVEPS)

% Buscar els vAps interessants
noReal = find(abs(real(vAps))<tol);
siImag = find(abs(imag(vAps))>tol);
realneg = find((real(vAps))<-tol);
iCentres = intersect(noReal,siImag);
indexs = union(iCentres,realneg);
estables = vAps(indexs);
[~,iVap,iPunt] = ind2sub([nDF,nDF,nPunts],indexs);
v = vEps(:,iVap,iPunt);
nEstables = length(estables);

% Proposar una C.I. propera a cada punt d'equilibri amb un vAp
interessant
% Afegir al punt d'equilibri una petita desviació emprant el vEp
CIs = zeros(nEstables,nDF);

for i = 1:nEstables
    vr = real(v(:,iVap(i),iPunt(i))) /
norm(real(v(:,iVap(i),iPunt(i)))));
    vi = imag(v(:,iVap(i),iPunt(i))) /
norm(imag(v(:,iVap(i),iPunt(i)))));
    CIs(i,:) = punts_eq(iPunt(i),:) + a*(cos(b)*vr + sin(b)*vi)';
end % Calcular condicions inicials

end

```

```

clear; clc
load('resuAnalisi.mat')

for i = 1:nEstables

    titol = strcat(['Punt eq. ', num2str(iPunt(i)), ...
        ', vap ', num2str(iVap(i)), ', mod ', num2str(a), ...
        ', angle ', num2str(b*180/pi), '°', ...
        ', temps ', num2str(t)]);

    titolPlot = strcat(['Punt eq. ', num2str(iPunt(i)), ...
        ', mod ', num2str(a), ...
        ', angle ', num2str(b*180/pi), '°', ...
        ', temps ', num2str(t)]);

    titolArxiu = strcat([titol, '.txt']);
    if exist(titolArxiu, 'file') == 2

        [resu] = carrega(titolArxiu, 7);

        figure(i)
        s(1) = subplot(3,1,1); %3 files, 1 columnes, posició 1
        s(2) = subplot(3,1,2); %3 files, 1 columnes, posició 2
        s(3) = subplot(3,1,3); %3 files, 1 columnes, posició 3
        plot(s(1), resu(2,:), resu(5,:), resu(2,1), resu(5,1), 'r*'); hold
on
            xlabel(s(1), 'Theta'); ylabel(s(1), 'Theta prima');
            title(s(1), titolPlot);
        plot(s(2), resu(3,:), resu(6,:), resu(3,1), resu(6,1), 'r*');
            xlabel(s(2), 'Phi'); ylabel(s(2), 'Phi prima');
        plot(s(3), resu(4,:), resu(7,:), resu(4,1), resu(7,1), 'r*');
            xlabel(s(3), 'Xi'); ylabel(s(3), 'Xi prima');
        hold off
        saveas(i, strcat(['plot_', num2str(i)], '.png'))
        close(i)
    end
end

```

```

function [ resu ] = nInt( ab , tspan, titol, rotulacio, ct )
% global m2 d ct ro Cm;
%Resol un sistema d'ED's mitjançant l'algorisme ode78
%Serveix per sistemes de n ED's (de 1 a inf)
% ode_fcn_format = 0;
ode_fcn_format = 0;
% tol = tolerància màxima
tol = 1e-12;
% trace = 0;
trace = 0;
% count = 0;
count = 0;
% hmax = pas màxim
hmax = 1e-3;

% T=E*A*x3 fun = @(t,x,delta) [ x(4) ; x(5) ; x(6) ; 2*(x(4)-
1)*(x(5)*tan(x(2))-x(6)/x(3))-3*sin(x(1))*cos(x(1)) ; -
2*x(6)*x(5)/x(3)-(((x(4)-1)^2+3*(cos(x(1)))^2))*sin(x(1))*cos(x(2)) ;
((x(5))^2+(x(4)-1)^2*(cos(x(2))))^2+3*(cos(x(2)))^2*(cos(x(1)))^2-
1)*x(3)-x(3)*(0.01^2/4)*7.996328e4/(m2*(ct/(ro^3))*d) ];
fun = @(t,x,delta,ct) [ x(4) % In plane angle (pitch)
x(5) % Out of plane angle (roll)
x(6) % Dimensionless distance (l/lc) between m1
and m2
2*(x(4)-1)*(x(5)*tan(x(2))-x(6)/x(3))-
3*sin(x(1))*cos(x(1))
-2*x(6)*x(5)/x(3)-(((x(4)-
1)^2+3*(cos(x(1)))^2))*sin(x(2))*cos(x(2))
((x(5))^2+(x(4)-
1)^2*(cos(x(2))))^2+3*(cos(x(2)))^2*(cos(x(1)))^2-1)*x(3)-(ct*(x(3)-
1)*delta) ];

fun=@(t,x,delta) fun(t,x,delta,ct);

[t , y] = ode78 (fun, tspan, ab, ode_fcn_format, tol, trace, count,
hmax);
resu = [t , y];
resu=resu';

if size(resu,2) > 1
fileID = fopen(strcat([titol,'.txt']), 'w');
fprintf(fileID, '%15s %15s %15s %15s %15s %15s
%15s\r\n', rotulacio);
fprintf(fileID, '\r\n');
fprintf(fileID, '\r\n %16.16f %16.16f %16.16f %16.16f %16.16f
%16.16f %16.16f ', resu); %n EDOS
fclose(fileID);
end
end

```



```

function [tout,xout] =
ode78(FUN,tspan,x0,ode_fcn_format,tol,trace,count,hmax)

% Copyright (C) 2001, 2000 Marc Compere
% This file is intended for use with Octave.
% ode78.m is free software; you can redistribute it and/or modify it
% under the terms of the GNU General Public License as published by
% the Free Software Foundation; either version 2, or (at your option)
% any later version.
%
% ode78.m is distributed in the hope that it will be useful, but
% WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
% MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the GNU
% General Public License for more details at
www.gnu.org/copyleft/gpl.html.
%
% -----
%
% ode78 (v1.14) Integrates a system of ordinary differential equations
using
% 7th order formulas.
%
% This is a 7th-order accurate integrator therefore the local error
normally
% expected is  $O(h^8)$ . However, because this particular implementation
% uses the 8th-order estimate for xout (i.e. local extrapolation)
moving
% forward with the 8th-order estimate will yield errors on the order
of  $O(h^9)$ .
%
% The order of the RK method is the order of the local *truncation*
error, d,
% which is the principle error term in the portion of the Taylor
series
% expansion that gets dropped, or intentionally truncated. This is
different
% from the local error which is the difference between the estimated
solution
% and the actual, or true solution. The local error is used in
stepsize
% selection and may be approximated by the difference between two
estimates of
% different order,  $l(h) = x_0(h+1) - x_0(h)$ . With this
definition, the
% local error will be as large as the error in the lower order method.
% The local truncation error is within the group of terms that gets
multiplied
% by h when solving for a solution from the general RK method.
Therefore, the
% order-p solution created by the RK method will be roughly accurate
to  $O(h^{p+1})$ 
% since the local truncation error shows up in the solution as  $h^d$ ,
which is
% h times an  $O(h^p)$  term, or rather  $O(h^{p+1})$ .
% Summary: For an order-p accurate RK method,
%
% - the local truncation error is  $O(h^p)$ 
%
% - the local error used for stepsize adjustment and that
%
% is actually realized in a solution is  $O(h^{p+1})$ 
%
% This requires 13 function evaluations per integration step.
%

```

```

% Relevant discussion on step size choice can be found on pp.90,91 in
% U.M. Ascher, L.R. Petzold, Computer Methods for Ordinary
Differential Equations
% and Differential-Algebraic Equations, Society for Industrial and
Applied Mathematics
% (SIAM), Philadelphia, 1998
%
% More may be found in the original author's text containing numerous
% applications on ordinary and partial differential equations using
Matlab:
%
%   Howard Wilson and Louis Turcotte, 'Advanced Mathematics and
%   Mechanics Applications Using MATLAB', 2nd Ed, CRC Press, 1997
%
%
% [tout, xout] =
ode78(FUN,tspan,x0,ode_fcn_format,tol,trace,count,hmax)
%
% INPUT:
% FUN    - String containing name of user-supplied problem description.
%         Call: xprime = fun(t,x) where FUN = 'fun'.
%         t        - Time (scalar).
%         x        - Solution column-vector.
%         xprime   - Returned derivative COLUMN-vector; xprime(i) =
dx(i)/dt.
% tspan  - [ tstart, tfinal ]
% x0     - Initial value COLUMN-vector.
% ode_fcn_format - this specifies if the user-defined ode function is
in
%         the form:      xprime = fun(t,x)    (ode_fcn_format=0,
default)
%         or:           xprime = fun(x,t)    (ode_fcn_format=1)
%         Matlab's solvers comply with ode_fcn_format=0 while
%         Octave's lsode() and sdirk4() solvers comply with
ode_fcn_format=1.
% tol    - The desired accuracy. (optional, default: tol = 1.e-6).
% trace  - If nonzero, each step is printed. (optional, default: trace
= 0).
% count  - if nonzero, variable 'rhs_counter' is initalized, made
global
%         and counts the number of state-dot function evaluations
%         'rhs_counter' is incremented in here, not in the state-dot
file
%         simply make 'rhs_counter' global in the file that calls
ode78
% hmax   - limit the maximum stepsize to be less than or equal to hmax
%
% OUTPUT:
% tout   - Returned integration time points (row-vector).
% xout   - Returned solution, one solution column-vector per tout-
value.
%
% The result can be displayed by: plot(tout, xout).

%   Daljeet Singh & Howard Wilson
%   Dept. Of Electrical Engg., The University of Alabama.
%   11-24-1988.
%
% modified by:
% Marc Compere
% CompereM@asme.org

```

```

% created : 06 October 1999
% modified: 19 May 2001

% The Fehlberg coefficients:
alpha_ = [ 2./27., 1/9, 1/6, 5/12, 0.5, 5/6, 1/6, 2/3, 1/3, 1, 0, 1
]';
beta_   = [ 2/27, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ;
            1/36, 1/12, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ;
            1/24, 0, 1/8, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ;
            5/12, 0, -25/16, 25/16, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ;
            0.05, 0, 0, 0.25, 0.2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ;
            -25/108, 0, 0, 125/108, -65/27, 125/54, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0
;
            31/300, 0, 0, 0, 61/225, -2/9, 13/900, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ;
            2, 0, 0, -53/6, 704/45, -107/9, 67/90, 3, 0, 0, 0, 0, 0 ;
            -91/108, 0, 0, 23/108, -976/135, 311/54, -19/60, 17/6, -
1/12, 0, 0, 0, 0 ;
            2383/4100, 0, 0, -341/164, 4496/1025, -301/82, 2133/4100,
45/82, 45/164, 18/41, 0, 0, 0 ;
            3/205, 0, 0, 0, 0, -6/41, -3/205, -3/41, 3/41, 6/41, 0, 0, 0
;
            -1777/4100, 0, 0, -341/164, 4496/1025, -289/82, 2193/4100,
51/82, 33/164, 12/41, 0, 1, 0 ]';
chi_   = [ 0, 0, 0, 0, 0, 34/105, 9/35, 9/35, 9/280, 9/280, 0, 41/840,
41/840]';
psi_   = [ 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, -1 ]';

pow = 1/8; % see p.91 in the Ascher & Petzold reference for more
infomation.

if nargin < 8, hmax = (tspan(2) - tspan(1))/2.5; end
if nargin < 7, count = 0; end
if nargin < 6, trace = 0; end
if nargin < 5, tol = 1.e-6; end
if nargin < 4, ode_fcn_format = 0; end

% Initialization
t0 = tspan(1);
tfinal = tspan(2);
t = t0;
% the following step parameters are used in ODE45
% hmax = (tfinal - t)/5;
% hmin = (tfinal - t)/20000;
% h = (tfinal - t)/100;
% The following parameters were taken because the integrator has
% higher order than ODE45. This choice is somewhat subjective.
%hmin = (tfinal - t)/10000;
hmin = (tfinal - t)/1e20;
h = (tfinal - t)/50;
x = x0(:); % the ':' ensures x is initialized as a column
vector
f = x*zeros(1,13); % f needs to be an Nx13 matrix where N=number of
rows in x
tout = t;
xout = x.';
tau = tol * max(norm(x, 'inf'), 1);

if count==1,

```

```

global rhs_counter
if ~exist('rhs_counter'), rhs_counter=0; end
end % if count

if trace
% clc, t, h, x
% clc, t, x
clc, t
end

% The main loop
minuteLim = now*24*60+5;
while (t < tfinal) && (h >= hmin)
    if t + h > tfinal, h = tfinal - t; end

    %AFEGIT CRISTINA -->
    minute = now*24*60;
    if minute == minuteLim
        beep
        display('Error al punt')
        tout = 0;
        xout = 0;
        break
    end

    mida=size(xout);
    if xout((mida(1)),3) < 1
        delta=0;
    else
        delta=1;
    end
    %A més, he afegit variable delta als 4 feval
    %<-- AFEGIT CRISTINA

    % Compute the slopes
    if (ode_fcn_format==0), % (default)
        f(:,1) = feval(FUN,t,x,delta);
        for j = 1: 12,
            f(:,j+1) = feval(FUN, t+alpha_(j)*h,
x+h*f*beta_(:,j),delta);
        end
    else % ode_fcn_format==1
        f(:,1) = feval(FUN,x,t,delta);
        for j = 1: 12,
            f(:,j+1) = feval(FUN, x+h*f*beta_(:,j),
t+alpha_(j)*h,delta);
        end
    end % if (ode_fcn_format==1)

    % increment rhs_counter
    if count==1, rhs_counter = rhs_counter + 13; end

    % Truncation error term
    gamma1 = h*41/840*f*psi_;

    % Estimate the error and the acceptable error
    delta = norm(gamma1,'inf');
    tau = tol*max(norm(x,'inf'),1.0);

```

```
% Update the solution only if the error is acceptable
if delta <= tau
    t = t + h;
    x = x + h*f*chi_; % this integrator uses local extrapolation
    tout = [tout; t];
    xout = [xout; x.'];
end
if trace
    home, t, h, x
    home, t, x
    home, t, h
end

% Update the step size
if delta == 0.0
    delta = 1e-16;
end
h = min(hmax, 0.8*h*(tau/delta)^pow);

end;

if (t < tfinal)
    disp('SINGULARITY LIKELY.')
    t
end
```

## A.5- Codi del model d'un tether electrodinàmic

```

%Resolució de sistemes d'equacions diferencials per n equacions
%Necessita els scripts 'nInt' i 'ode78'.

% fun= @(variables) [funció1 ; funció2 ; ... ; funcióN];
% 'fun' vector columna de les ED f1(X,t);...;fn(X,t)
% 'x(i)' indica la variable 'x' amb posició 'i' al vector de variables
'X'
inclinacio=40;
epsilon=0.5;
nVoltes_min=10;
nVoltes_max=60;
pasVoltes=10;
nt=5; nv=4; na=4;
PuntsTotals=(nt+1)*(nv+1)*(na+1)*((nVoltes_max-
nVoltes_min)/pasVoltes+1);
%FI VARIABLES A CANVIAR
%Valors constants
i=inclinacio*pi/180; %Inclinació en graus
phi= 0;   thetaMAX=-pi/4;   vMAX=0.5;   aMAX=pi/2;
%'titol' string de títol del .txt on es guardaran les dades
tTitol='voltes_'; iTitol='i'; eTitel='_e'; extensio='.txt';
%'rotulacio' string de noms de les variables: temps, x(1), x(2), ...,
x(n)
titols = ['epsilon ', ' i ', ' theta ', ' phi ', ' thetaP ', ' phiP ', ...
' a ', ' v ', ' Voltes_Theta ', ' Voltes_Phi ', ' Estabilitat' ];
resultats= ['N°Simulacions', ' N°Inestables', ' Singularitats'];
tic;
parfor nV=1:(nVoltes_max-nVoltes_min)/pasVoltes+1
    nVoltes=nVoltes_min+pasVoltes*(nV-1);
    tspan = [0 , 2*pi*nVoltes]; %tspan = [tInicial , tfinal]

    tStr=num2str(nVoltes); iStr=num2str(inclinacio);
    eStr=num2str(epsilon*10);
    titol=strcat(tStr,tTitel,iTitel,iStr,eTitel,eStr,extensio);
    fileID = fopen(titol,'w'); fprintf(fileID,'%8s %3s %6s %5s %8s
%6s %3s %3s %14s %12s %12s',titols); fclose(fileID);
    fileID = fopen(titol,'a');

    simulacions=0; inestables=0; loop=0; singularitats=0;
    for it=0:nt
        theta = it*thetaMAX/nt;
        for iv=0:nv
            v = iv*vMAX/nv;
            for ia=0:na
                a = ia*aMAX/na;
                ab = [ theta,phi,v*cos(a),v*sin(a) ];
                [ resu ] = nInt( ab , tspan, epsilon, i );
                [%~,posTMax]=max(abs(resu(2,:))/(2*pi)); ...
                [%~,posPMax]=max(abs(resu(3,:))/(2*pi));
                vTheta=resu(2,posTMax); vPhi=resu(3,posPMax);
                vTheta=resu(2,end)/(2*pi); vPhi=resu(3,end)/(2*pi);
                if abs(vTheta)<1 && abs(vPhi)<1; estable=1;
                else estable=0; end
                valorsDades=[epsilon,i,ab,a,v,vTheta,vPhi,estable];
                if resu(1,end)~= tspan(2)
                    fprintf(fileID,'\r\n\r\n %13s','SINGULARITAT:');
                    singularitats=singularitats+1;

```

```
        end
        fprintf(fileID, '\r\n %12.6f %12.6f %12.6f %12.6f
%12.6f %12.6f %12.6f %12.6f %12.6f %12.6f %1.0f', valorsDades);
        simulacions=simulacions+1;
        if estable==0; inestables=inestables+1; end
        loop=loop+1; display('% calculat:');
        display((loop/PuntsTotals)*100);
    end
end
    fprintf(fileID, '\r\n\r\n');
end
    resum=[simulacions,inestables,singularitats];
    fprintf(fileID, '\r\n %13s %13s %14s', resultats);
    fprintf(fileID, '\r\n %7.0f %7.0f', resum);
    fclose(fileID);
end
tCalcul=toc; display(tCalcul);
load handel; sound(y, 1.5*Fs)
```

```

%Resolució de sistemes d'equacions diferencials per n equacions
%Necessita els scripts 'nInt' i 'ode78'.

% fun= @(variables) [funció1 ; funció2 ; ... ; funcióN];
% 'fun' vector columna de les ED f1(X,t);...;fn(X,t)
% 'x(i)' indica la variable 'x' amb posició 'i' al vector de variables
'X'
global i epsilon;
inclinacio=60;
epsilon=1.0;
nVoltes=5;
nt=5; nv=99; na=99;          PuntsTotals=(nt+1)*(nv+1)*(na+1);
PuntsTotals=(nv+1)*(na+1);
%FI VARIABLES A CANVIAR

%Valors constants
i=inclinacio*pi/180; %Inclinació en graus
tspan = [0 , 2*pi*nVoltes]; %tspan = [tInicial , tfinal]
phi= 0;   thetaMAX=-pi/4;   vMAX=0.5;   aMAX=pi/2;
%'titol' string de títol del .txt on es guardaran les dades
tTitol='UltimaTheta_voltes_'; iTitol='i'; eTitol='_e';
extensio='.txt';
tStr=num2str(nVoltes); iStr=num2str(inclinacio);
eStr=num2str(epsilon*10);
titol=strcat(tStr,tTitol,iTitol,iStr,eTitol,eStr,extensio);
%'rotulacio' string de noms de les variables: temps, x(1), x(2), ...,
x(n)
titols = ['epsilon ', ' i ', ' theta ', ' phi ', ' thetaP ', ' phiP ', ...
         ' a ', ' v ', ' Voltes_Theta ', ' Voltes_Phi ', ' Estabilitat ' ];
resultats= ['N°Simulacions', ' N°Inestables'];
fileID = fopen(titol,'w');
fprintf(fileID, '%8s %3s %6s %5s %8s %6s %3s %3s %14s %12s
%12s',titols);
fclose(fileID);
fileID = fopen(titol,'a');
tic;
% for inclinacio=40:10:60
%   i=inclinacio*pi/180;
%   for epsilon=0.5:0.25:1
simulacions=0; inestables=0; loop=0;
for it=nt:nt %ATENCIÓ: mod per fer la última theta
    theta = it*thetaMAX/nt;
%   theta = -0.2*pi; %MOD per fer una sola Theta
    for iv=0:nv
        v = iv*vMAX/nv;
        for ia=0:na
            a = ia*aMAX/na;
            ab = [ theta,phi,v*cos(a),v*sin(a) ];

            [ resu ] = nInt( ab , tspan, epsilon, i );
            vTheta=resu(2,end)/(2*pi); vPhi=resu(3,end)/(2*pi);
            if abs(vTheta)<1 && abs(vPhi)<1; estable=1; else
estable=0; end
            valorsDades=[epsilon,i,ab,a,v,vTheta,vPhi,estable];
            fprintf(fileID, '\r\n %12.6f %12.6f %12.6f %12.6f %12.6f
%12.6f %12.6f %12.6f %12.6f %12.6f %1.0f',valorsDades);
            simulacions=simulacions+1;
            if estable==0; inestables=inestables+1; end
            resum=[simulacions,inestables];
            loop=loop+1; display('% calculat:');
            display((loop/PuntsTotals)*100);

```



```
        end
    end
    fprintf(fileID, '\r\n\r\n');
end
%     end %for epsilon
% end %for inclinacio
fprintf(fileID, '\r\n %13s %13s', resultats);
fprintf(fileID, '\r\n %7.0f %7.0f', resum);    fclose(fileID);

tCalcul=toc; display(tCalcul);
load handel; sound(y,1.5*Fs)
```

```

%Dades document
nColumnes = 11;
nt=5; %Atenció! Cal que es correspongui al document a analitzar
thetaMAX=-pi/4; vMAX=0.5; aMAX=pi/2; nt=nt+1;

%Carrega les dades desitjades
nomDocument=input('Escriu el nom del document:\n','s');
g=input('Escriu el grup de theta (1-6):\n');
fId=fopen(nomDocument,'r');fgetl(fId);
dades=fscanf(fId,'%f');dades=reshape(dades,nColumnes,[]);dades=dades.'
;
fclose(fId);

nFilCol = size (dades);
n = nFilCol(1); n = sqrt(n/6);
na = n; nv = n;

pI = nv*na*(g-1)+1;
pF = g*nv*na;
vTheta=num2str(dades(pI,3));
strTheta=['Theta = ',vTheta];
%Tria valors de 'a' 'v' 'Estabilitat' i 'angle' com el màxim de theta
i phi
a=dades(pI:pI+na-1,7);
v=dades(pI:na:pF,8);
estabilitat=dades(pI:pF,11);
estabilitat=estabilitat*-1+1; %Inverteix vector per igualar la
coloracio
voltesT=dades(pI:pF,9);
voltesP=dades(pI:pF,10);
voltesMAX=max(abs(voltesT),abs(voltesP));
canvi = find(voltesMAX>20);
voltesMAX(canvi) = 20;
%Crea els mallats necessaris per graficar
[mesh_A,mesh_V]=meshgrid(a,v);
mesh_Est=reshape(estabilitat,na,nv); mesh_Est=mesh_Est.';
mesh_VMAX=reshape(voltesMAX,na,nv); mesh_Est=mesh_Est.';
triang = delaunay(mesh_A,mesh_V);

%GRÀFICS --> 1-anàlisi de l'estabilitat | 2-estudi del gir màxim del
tether
    % figure;contourf(mesh_A,mesh_V,mesh_Est,1); hold on
    % titol=['Estabilitat per ',strTheta];
    % colormap(jet); title(titol);
    % xlabel('A'); ylabel('V'); hold off
% figure;trisurf(triang,mesh_A,mesh_V,mesh_VMAX); hold on
% FIGURES 3D
% figure;surf(mesh_A,mesh_V,mesh_VMAX); hold on
% titol=strTheta;
% colormap(jet); title(titol); zlabel('voltes')
% xlabel('A'); ylabel('V'); colorbar; hold off
% FIGURES 2D
% figure;contourf(mesh_A,mesh_V,mesh_VMAX); hold on
% titol=strTheta;
% colormap(jet); title(titol);
% xlabel('A'); ylabel('V'); colorbar; hold off

estables = length(find(dades(pI:pF,11)==1));
Xestables = 100*estables/(nFilCol(1)/6);
display(strTheta); display(estables); display(Xestables);

```

```

function [ resu ] = nInt( ab , tspan , epsilon , i)
% global i epsilon;
%Resol un sistema d'ED's mitjançant l'algorisme ode78
%Serveix per sistemes de n ED's (de 1 a inf)
% ode_fcn_format = 0;
ode_fcn_format = 0;
% tol = tolerància màxima
tol = 1e-12;
% trace = 0;
trace = 0;
% count = 0;
count = 0;
% hmax = pas màxim
hmax = 1e-2;
% fun = @(t,x,delta) [ theta ; phi ; theta prima ; phi prima ];
fun = @(t,x,delta) [ x(3)
                    x(4)
                    -epsilon*(sin(i)*tan(x(2))*(2*sin(t)*cos(x(1))-
cos(t)*sin(x(1)))+cos(i))+2*(1+x(3))*x(4)*tan(x(2))-3/2*sin(2*x(1))

epsilon*sin(i)*(2*sin(t)*sin(x(1))+cos(t)*cos(x(1)))-
sin(x(2))*cos(x(2))*((1+x(3))^2+3*(cos(x(1)))^2) ];

[t , y] = ode78 (fun, tspan, ab, ode_fcn_format, tol, trace, count,
hmax, epsilon, i);
resu = [t , y];
resu=resu';
end

```

```

function [tout,xout] =
ode78(FUN,tspan,x0,ode_fcn_format,tol,trace,count,hmax, epsilon, i)

% Copyright (C) 2001, 2000 Marc Compere
% This file is intended for use with Octave.
% ode78.m is free software; you can redistribute it and/or modify it
% under the terms of the GNU General Public License as published by
% the Free Software Foundation; either version 2, or (at your option)
% any later version.
%
% ode78.m is distributed in the hope that it will be useful, but
% WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
% MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the GNU
% General Public License for more details at
www.gnu.org/copyleft/gpl.html.
%
% -----
%
% ode78 (v1.14) Integrates a system of ordinary differential equations
using
% 7th order formulas.
%
% This is a 7th-order accurate integrator therefore the local error
normally
% expected is  $O(h^8)$ . However, because this particular implementation
% uses the 8th-order estimate for xout (i.e. local extrapolation)
moving
% forward with the 8th-order estimate will yield errors on the order
of  $O(h^9)$ .
%
% The order of the RK method is the order of the local *truncation*
error, d,
% which is the principle error term in the portion of the Taylor
series
% expansion that gets dropped, or intentionally truncated. This is
different
% from the local error which is the difference between the estimated
solution
% and the actual, or true solution. The local error is used in
stepsize
% selection and may be approximated by the difference between two
estimates of
% different order,  $l(h) = x_{(O(h+1))} - x_{(O(h))}$ . With this
definition, the
% local error will be as large as the error in the lower order method.
% The local truncation error is within the group of terms that gets
multiplied
% by h when solving for a solution from the general RK method.
Therefore, the
% order-p solution created by the RK method will be roughly accurate
to  $O(h^{(p+1)})$ 
% since the local truncation error shows up in the solution as  $h*d$ ,
which is
% h times an  $O(h^p)$  term, or rather  $O(h^{(p+1)})$ .
% Summary: For an order-p accurate RK method,
% - the local truncation error is  $O(h^p)$ 
% - the local error used for stepsize adjustment and that
% is actually realized in a solution is  $O(h^{(p+1)})$ 
%
% This requires 13 function evaluations per integration step.

```

```

%
% Relevant discussion on step size choice can be found on pp.90,91 in
% U.M. Ascher, L.R. Petzold, Computer Methods for Ordinary
Differential Equations
% and Differential-Algebraic Equations, Society for Industrial and
Applied Mathematics
% (SIAM), Philadelphia, 1998
%
% More may be found in the original author's text containing numerous
% applications on ordinary and partial differential equations using
Matlab:
%
%   Howard Wilson and Louis Turcotte, 'Advanced Mathematics and
%   Mechanics Applications Using MATLAB', 2nd Ed, CRC Press, 1997
%
%
% [tout, xout] =
ode78(FUN,tspan,x0,ode_fcn_format,tol,trace,count,hmax)
%
% INPUT:
% FUN    - String containing name of user-supplied problem description.
%         Call: xprime = fun(t,x) where FUN = 'fun'.
%         t        - Time (scalar).
%         x        - Solution column-vector.
%         xprime   - Returned derivative COLUMN-vector; xprime(i) =
dx(i)/dt.
% tspan - [ tstart, tfinal ]
% x0    - Initial value COLUMN-vector.
% ode_fcn_format - this specifies if the user-defined ode function is
in
%         the form:      xprime = fun(t,x)   (ode_fcn_format=0,
default)
%         or:           xprime = fun(x,t)   (ode_fcn_format=1)
%         Matlab's solvers comply with ode_fcn_format=0 while
%         Octave's lsode() and sdirk4() solvers comply with
ode_fcn_format=1.
% tol   - The desired accuracy. (optional, default: tol = 1.e-6).
% trace - If nonzero, each step is printed. (optional, default: trace
= 0).
% count - if nonzero, variable 'rhs_counter' is initialized, made
global
%         and counts the number of state-dot function evaluations
%         'rhs_counter' is incremented in here, not in the state-dot
file
%         simply make 'rhs_counter' global in the file that calls
ode78
% hmax  - limit the maximum stepsize to be less than or equal to hmax
%
% OUTPUT:
% tout  - Returned integration time points (row-vector).
% xout  - Returned solution, one solution column-vector per tout-
value.
%
% The result can be displayed by: plot(tout, xout).

%   Daljeet Singh & Howard Wilson
%   Dept. Of Electrical Engg., The University of Alabama.
%   11-24-1988.
%
% modified by:
% Marc Compere

```

```

% CompereM@asme.org
% created : 06 October 1999
% modified: 19 May 2001

% The Fehlberg coefficients:
alpha_ = [ 2./27., 1/9, 1/6, 5/12, 0.5, 5/6, 1/6, 2/3, 1/3, 1, 0, 1
]';
beta_ = [ 2/27, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ;
          1/36, 1/12, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ;
          1/24, 0, 1/8, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ;
          5/12, 0, -25/16, 25/16, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ;
          0.05, 0, 0, 0.25, 0.2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ;
          -25/108, 0, 0, 125/108, -65/27, 125/54, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0
;
          31/300, 0, 0, 0, 61/225, -2/9, 13/900, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ;
          2, 0, 0, -53/6, 704/45, -107/9, 67/90, 3, 0, 0, 0, 0, 0 ;
          -91/108, 0, 0, 23/108, -976/135, 311/54, -19/60, 17/6, -
1/12, 0, 0, 0, 0 ;
          2383/4100, 0, 0, -341/164, 4496/1025, -301/82, 2133/4100,
45/82, 45/164, 18/41, 0, 0, 0 ;
          3/205, 0, 0, 0, 0, -6/41, -3/205, -3/41, 3/41, 6/41, 0, 0, 0
;
          -1777/4100, 0, 0, -341/164, 4496/1025, -289/82, 2193/4100,
51/82, 33/164, 12/41, 0, 1, 0 ]';
chi_ = [ 0, 0, 0, 0, 0, 34/105, 9/35, 9/35, 9/280, 9/280, 0, 41/840,
41/840]';
psi_ = [ 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, -1 ]';

pow = 1/8; % see p.91 in the Ascher & Petzold reference for more
infomation.

if nargin < 8, hmax = (tspan(2) - tspan(1))/2.5; end
if nargin < 7, count = 0; end
if nargin < 6, trace = 0; end
if nargin < 5, tol = 1.e-6; end
if nargin < 4, ode_fcn_format = 0; end

% Initialization
t0 = tspan(1);
tfinal = tspan(2);
t = t0;
% the following step parameters are used in ODE45
% hmax = (tfinal - t)/5;
% hmin = (tfinal - t)/20000;
% h = (tfinal - t)/100;
% The following parameters were taken because the integrator has
% higher order than ODE45. This choice is somewhat subjective.
%hmin = (tfinal - t)/10000;
hmin = (tfinal - t)/1e20;
h = (tfinal - t)/50;
x = x0(:); % the '(:)' ensures x is initialized as a column
vector
f = x*zeros(1,13); % f needs to be an Nx13 matrix where N=number of
rows in x
tout = t;
xout = x.';
tau = tol * max(norm(x, 'inf'), 1);

```

```

if count==1,
    global rhs_counter
    if ~exist('rhs_counter'),rhs_counter=0;;end
end % if count

if trace
% clc, t, h, x
% clc, t, x
    clc, t
end

% The main loop
while (t < tfinal) && (h >= hmin)
    if t + h > tfinal, h = tfinal - t; end
    %AFEGIT CRISTINA -->
    global d;
    mida=size(xout);
    if xout((mida(1)),1) < d
        delta=0;
    else
        delta=1;
    end
    %A més, he afegit variable delta als 4 feval
    %<-- AFEGIT CRISTINA

    % Compute the slopes
    if (ode_fcn_format==0), % (default)
        f(:,1) = feval(FUN,t,x);
        for j = 1: 12,
            f(:,j+1) = feval(FUN, t+alpha_(j)*h, x+h*f*beta_(:,j));
        end
    else % ode_fcn_format==1
        f(:,1) = feval(FUN,x,t);
        for j = 1: 12,
            f(:,j+1) = feval(FUN, x+h*f*beta_(:,j), t+alpha_(j)*h);
        end
    end % if (ode_fcn_format==1)

    % increment rhs_counter
    if count==1, rhs_counter = rhs_counter + 13; end

    % Truncation error term
    gamma1 = h*41/840*f*psi_;

    % Estimate the error and the acceptable error
    delta = norm(gamma1,'inf');
    tau = tol*max(norm(x,'inf'),1.0);

    % Update the solution only if the error is acceptable
    if delta <= tau
        t = t + h;
        x = x + h*f*chi_; % this integrator uses local extrapolation
        tout = [tout; t];
        xout = [xout; x.'];
    end
    if trace
%         home, t, h, x
%         home, t, x
%         home, t, h

```

```
end

% Update the step size
if delta == 0.0
    delta = 1e-16;
end
h = min(hmax, 0.8*h*(tau/delta)^pow);

end;

if (t < tfinal)
    disp('SINGULARITY LIKELY.')
    t
end
```



## B- Pressupost

El pressupost desglossat es troba a la taula següent:

	<b>Cost horari (€/h)</b>	<b>Hores</b>	<b>Import (€)</b>
Recerca bibliogràfica	70,20	20	1.404,00
Programació de codi	70,20	150	10.530,00
Elaboració de documents	70,20	125	8.775,00
Amortització d'equips informàtics	0,90	500	450,00
Amortització de software	0,50	375	187,50
		<b>Total</b>	<b>21.346,50</b>

Les dades del cost horari d'un enginyer informàtic (oficial de 1<sup>a</sup>) han estat extretes de la base de dades BEDEC.