Josep Callís , M. Lluïsa Fiol. (2005). Uno. [Versión electrónica]. Revista Uno 40

# "La xia de Gala". El mundo de las espirales

**Josep Callís**
**M. Lluïsa Fiol**

Es este un trabajo de reflexión sobre un elemento geométrico, las espirales, con múltiples posibilidades didácticas a distintos niveles de profundización, que quedan abiertas a lo largo del mismo. La conexión con el mundo del arte, tan antigua como la propia historia del arte, se apunta y queda reforzada matemáticamente, y se abren líneas de profundización y de trabajo posteriores.

**Palabras clave:** matemáticas, formas geométricas, estimación, métrica longitudinal, espirales

**The "xy" of Gala. The world of spirals**

*In this article we reflect about a geometrical element. The spirals with many teaching possibilities on distinct levels which are open throughout the process. The connection with the world of art as old as the very history of art is considered and is reinforced mathematically and we open lines of further research and works.*

## La espiral y el arte

Las espirales son elementos geométricos tan antiguos como la propia historia del arte. Todas la culturas primitivas comienzan sus trabajos artísticos con formas espirales, que, por otro lado, aparecen profusamente en la decoración de elementos utilitarios cerámicos, con propósitos que trascienden muchas veces la propia decoración. Por ello, nos hemos centrado en la reflexión sobre las formas espirales y el análisis y el trabajo escolar sobre las mismas, como forma de introducir, a través de las matemáticas, una forma fundamental y primigenia del arte como son las espirales.

## El porqué de la "xia de Gala"

Serpientes, virutas de madera y telarañas; helechos, hiedra, recorridos de insectos y de caida de semillas, zarcillos y enredaderas; berbiquíes y tornillos; muelles y amortiguadores; rizos; conchas y caracoles; cuernos y cornamentas; colmillos de elefantes y de jabalíes; nudos de carreteras y moños del cabello; huracanes y tifones; turbulencias y remolinos; estructuras moleculares y ADN, volutas jónicas, columnas salomónicas; escaleras y columnatas gaudinianas; ammonites y esponjas; agujeros negros y galaxias...

¡Cuántas estructuras y qué diversas! En todas ellas, de configuraciones tan distintas, unas correspondientes a seres vivos, otras a la naturaleza y otras a la creación tecnológica o artística humana, aparece la forma espiralada como elemento común. A veces como espiral, otras como hélice, fenómenos y formas que se producen según tengan relación, respectivamente, con la bidimensionalidad del plano o la tridimensionalidad del espacio.

Espirales y hélices forman parte de nuestro entorno y lo hacen de una manera que nos sorprende por su abundancia y diversidad. Desde los remolinos que hacemos por la mañana al remover el café con leche o que se producen en el agua que se escurre por el desagüe; la piel de fruta que dejamos en el plato después de pelar una manzana, naranja, patata; el movimiento con la aceitera cuando aliñamos el plato; la bufanda que nos ponemos alrededor del cuello, las disposiciones de los nudos de carretera... o los adornos que nos encontramos en multitud de rejas y balcones o en las molduras de muchos edificios o tal vez en los pendientes o los colgantes del collar... Una vez nos hemos entretenido y divertido localizando mentalmente tantas y tantas formas espirales se trata de justificar el título.

Empezamos pensando en "Serpientes, pechinas y galaxias", pero la palabra galaxia se nos descompuso en dos partes: *gala* y *xia*. *Gala* es el nombre de la mujer y musa de Dalí; pero *xia*, ¿tiene algún significado?

Inicialmente bastante escépticos empezamos por buscar, por tener el catalán como lengua materna, en el diccionario català-valencià-balear (1) y nos encontramos con la sorpresa de que "xia" está presente con tres significados:

- Mantón corto que se llevaba en señal de duelo.
- Especie de bufanda o pañuelo para abrigar el cuello. *Xia per al coll.*
- Pieza de tela roja que llevaban sobre el hombro los jurados como insignia de autoridad.

El segundo es el que más nos conviene en nuestro caso. "Gala con chía", o lo que es lo mismo: "Chía para el cuello de Gala". La chía de Gala, la fantástica bufanda-nebulosa para la Gaya-Gala. Hacemos desde aquí un surrealista homenaje a Gala y Dalí, a las nebulosas y a las espirales.

## Interés por el tema

Decidido el título, y con la mesa llena de papeles, fotos, revistas con espirales diversas, entran unos amigos al despacho y mientras curiosean nos dicen: "¿Desde cuándo tenéis tanto interés por las espirales?"

¿Desde cuándo? Seguramente el interés central está relacionado por una parte con el trabajo sobre las formas geométricas (Fiol, 2003; Callís, 2003) y sus medidas y estimaciones por la otra (Callís, 2002). No hay duda, sin embargo, que el factor clave radica en el trabajo hecho durante un tiempo en torno a la estimación métrica longitudinal y el estudio de los procedimientos, recursos y estrategias que las personas utilizamos ante los problemas cotidianos de estimaciones de longitudes. En el test que diseñamos en una primera fase de la investigación se hizo evidente que la capacidad estimativa (procedimientos, recursos y estrategias) sobre las curvas (circunferencias, onduladas y espirales arquimedianas, http://www.grao.com/imgart/images/UN/UN40013U.jpg - figura 1) presenta diferencias constatables respecto a la capacidad estimativa efectuada sobre segmentos rectilíneos. Este trabajo de investigación, que tuvo un punto de inflexión con la defensa de la tesis doctoral de Josep Callís (2002), desveló a partir de los datos aportados una serie de nuevos interrogantes que abren nuevas vías de investigación.

Otro factor motivador del estudio de las espirales es averiguar las posibilidades didácticas de estas curvas. Y esto porque lo que querríamos es contribuir a aumentar la presencia del mundo de las curvas tanto en el plano como en el espacio de tres dimensiones en los currículos de educación primaria y educación secundaria. A pesar de que nuestro mundo se construye y funciona, prioritariamente, sobre y basándose en las estructuras curvas, estas solo aparecen de manera explícita en los currículos a través de la circunferencia, la elipse, la parábola y las sinoidales. ¿Se podría ampliar este catálogo? Creemos que sí, y de momento nuestra propuesta pasa por trabajar algunas espirales.

## Espirales: concepción y génesis

Hemos insistido y puesto de manifiesto desde el principio del artículo que las espirales y las hélices son formas presentes por todas partes, en la naturaleza y en las producciones humanas. Su existencia y generación no se debe a caprichos de la naturaleza, sino que viene determinada por inmutables leyes que rigen el Cosmos, por lo que hace referencia tanto a la estructura de la materia como a la estructura del espacio y el desplazamiento de objetos y fluidos. La espiral y las hélices son efectos y productos de fenómenos parecidos, si bien en el primer caso afecta al plano, por tanto tienen una estructura bidimensional, y en el segundo, al espacio, de manera que es una constitución tridimensional. Las primeras, definidas en la exposición "Y primero fue la forma", del Museu de la Ciència de Barcelona (2003), como estructuras que "empaquetan", y las segundas que "agarran".

En este artículo nos centraremos únicamente en hacer una aproximación al mundo de las espirales, estructuras que Peter S. Stevens (1986, pp. 48-49) describe, comparándolas con el diseño sinuoso, el diseño en forma de explosión y las formas ramificadas, en términos de cuatro parámetros fundamentales: uniformidad, optimización en la ocupación del espacio, máxima longitud total y acceso directo respecto al centro: "forma bellamente uniforme que se encurva sobre sí misma con perfecta regularidad. Puede ocupar todo el espacio bidimensional disponible y es capaz de experimentar una expansión infinita al mismo tiempo que es bastante corta, aunque en referencia a su conexión con el centro resulta en extremo indirecta."

Entre los fenómenos generadores de espirales cabe destacar:

- Las imposiciones derivadas de la física dinámica.
- Las optimizaciones ecológicas que determinan el proceso del crecimiento y estructuración de la materia.
- Los producidos por la doble incidencia o interdependencia.

*Imposiciones derivadas de la física dinámica*

Desde una perspectiva de física dinámica, una espiral o un remolino en espiral (http://www.grao.com/imgart/images/UN/UN40014U.jpg - figura 2) se produce cuando una corriente se ve sometida a una reducción de su energía en la superficie que la limita debido a una fricción lateral; consecuentemente, el flujo pierde velocidad y se fragmenta en partes que giran sobre sí mismas y muy a menudo a contracorriente y en número par de vórtices especulares. En el límite mismo de la superficie, el flujo tiene velocidad nula y a medida que aumenta la distancia de la superficie, la velocidad aumenta, y es esta diferencia de velocidad entre los puntos del flujo lo que la hace girar sobre sí misma, pudiendo llegar a que el propio centro, debido a su alta velocidad, genere una fuerza centrífuga tan alta que las partículas ya no se pueden concentrar y son lanzadas hacia el exterior, de manera que en el plano de rotación, el material desplazado del centro se dispone en largos brazos espirales. Al mismo tiempo, sin embargo, y perpendicularmente a su centro de rotación, la materia se mueve aún hacia el interior y va colapsándose paralelamente, fenómeno que produce que el propio sistema vaya aplanándose hasta convertirse en una forma discoidal como pueden ser las galaxias.

Desde la vertiente matemática, las espirales son el resultado o la trayectoria de la doble incidencia entre los movimientos de traslación y giro. (Fruto de esta génesis pueden presentarse dos tipologías generadoras según se atienda a la uniformidad de la velocidad de desplazamiento o bien al ángulo central y el sector recorrido).

*Optimización ecológica que determina el proceso de crecimiento y estructuración de la materia*

La espiral desde la concepción ecológica respecto al crecimiento y estructuración de la materia viene determinada por el hecho de que la naturaleza funciona, básicamente, sometida a la ley del ahorro energético y por tanto de procesos de optimización. Las formas o estructuras básicas de la forma y crecimiento se reducen a tres diseños preferenciales: el espiral, el radial o explosivo y el ramificado (http://www.grao.com/imgart/images/UN/UN40015U.jpg - figura 3). Las disposiciones estructurales de la materia tienen como objetivo permitir y hacer posible las intercomunicaciones entre sus puntos materiales para conseguir dar solución a la uniformidad de disposición y ocupación mínima de espacio, consiguiendo con la disposición espiral la máxima longitud total con la mínima distancia entre el acceso directo del exterior al centro y a la inversa. La espiral resulta ser, en la naturaleza, la forma de máxima versatilidad apareciendo, como hemos indicado desde un principio, tanto en el micromundo, como puede ser en la réplica de los virus, como en el macromundo, como sucede en la ordenación de la materia galáctica.

La estructura espiral respecto a la radial y explosiva reduce la distancia de comunicación y relación desde el centro a los restantes puntos de su entorno, si bien la distancia media de estos puntos respecto al centro es superior que en el radial, que tiene una longitud total superior, pero la conexión con las partes es más directa y rápida. La espiral es un buen recurso para itinerarios o situaciones donde hace falta buscar un recorrido global mínimo, si bien en las grandes estructuras vivas, que han de transportar los nutrientes a toda la periferia, resulta poco adecuada.

*Fenómenos producidos por la doble incidencia o interdependencia*

También la mutua interrelación de crecimiento y dinámica física explica la generación de espirales naturales. Cuando la expansión de la materia en crecimiento se produce como efecto o dilatación de igual intensidad y velocidad en toda la superficie o en sus extremos, entonces el crecimiento resulta lineal y si, al contrario, hay diferenciación entre extremos, entonces aparece la curvatura superficial, y el crecimiento más lento se manifiesta hacia el interior y el más rápido en el exterior, como en las cornamentas animales donde, si la parte delantera o anterior crece más que la posterior, el cuerno se curva hacia atrás y si es la parte interna la que crece más deprisa que la externa, entonces la curvatura es hacia fuera. Esta combinación produce una curvatura helicoidal o de espiral, como en el caso, por ejemplo de la cabra salvaje.

## Espirales arquimedianas y logarítmicas

Desde la geometría se habla de muy diversas curvas abiertas o cerradas. Entre las curvas abiertas, tenemos diversos tipos de espirales:

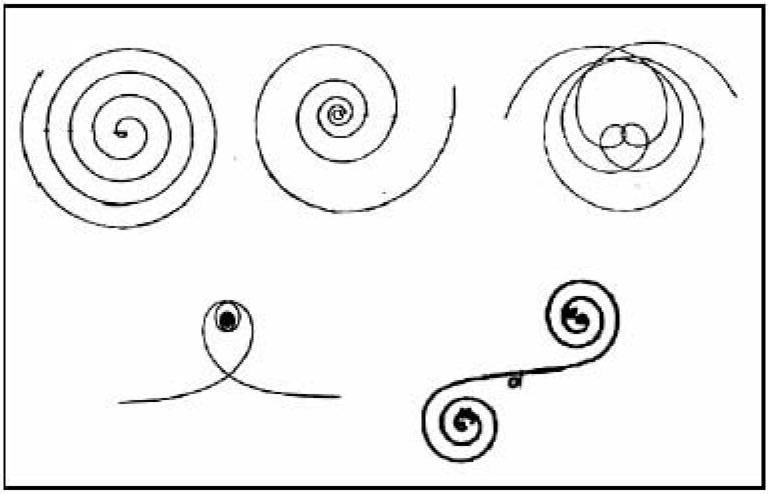
- La espiral constante o arquimediana.
- La espiral logarítmica o de Descartes.
- Espiral parabólica o de Fermat, o de Galileo.
- La espiral hiperbólica o de Bernouilli.
- La clotoide o espiral de Cornú, o espiral de Euler.

Las más conocidas son las espirales arquimedianas y las logarítmicas.

### Espiral parabólica

En realidad son muchos casos particulares. Fue Pierre Fermat quien en 1636 habló de ella por primera vez al estudiar el recorrido de un móvil que se desplazara en el interior de la Tierra y suponiendo una aceleración constante teniendo en cuenta la ley de Galileo. Es la curva que describen los bailarines que, en fila india y siguiendo a uno de ellos que lleva la mano alzada con un pañuelo, dan vueltas hacia dentro para después hacer el camino de salida. Robert Graves, en *La Diosa Blanca*, habla de esta danza como una danza ritual que llama el baile de la grulla.

**Figura 4.** Espiral arquimediana, logaritmica, parabólica, hiperbólica y clotoide.



### Espiral hiperbólica

Es una curva simétrica que en ciertas condiciones resulta ser la sombra de la hélice y también la inversa de la espiral de Arquímedes. Fue citada por primera vez por Varignon en 1704 y por Jean Bernouilli en 1710.

### Espiral clotoide

Aparece citada por primera vez por Euler en 1774. Cornú la usó para estudiar la difracción de la luz. Recibe también el nombre de "curva del acuerdo", debido a que permite conectar con rectas o con curvas, motivo por el cual es ampliamente usada para la construcción de nudos de comunicación. Su característica más interesante es su radio de curvatura que oscila entre 0 en los puntos asintóticos ($M_1$ y $M_2$) e infinito (en el origen), pasando con continuidad por todos los valores intermedios (R = a2 / s; a: constante y s: longitud del arco).

También el sentido de giro es otro factor clasificatorio, y así se pueden encontrar espirales dextrogiras, si crecen siguiendo la dirección de las agujas del reloj, y sinistrogiras o levògiras si lo hacen a la inversa.

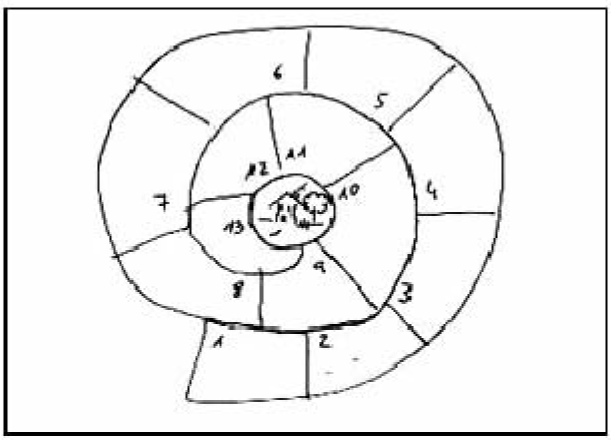
### Espiral arquimediana o constante

Si una semirecta gira uniformemente sobre su extremo, un punto P que al mismo tiempo se desplaza con velocidad constante a lo largo de la semirecta, describirá una espiral constante, nombre, entre otros, con el que se la identifica.

La espiral arquimediana que correspondería a lo que podría llamarse "cilindro enrollado", es conocida desde la Edad de Piedra. Muestras de este dominio las tenemos, por ejemplo, tanto entre los grabados rupestres del neolítico sahariano (5000 a.C.) de Tazzarine (Marruecos) como en el templo del Sol en Newgrange (Irlanda), uno de los monumentos megalíticos más espléndidos de Europa (hacia el 4000 a.C.). Su presencia, sin embargo, se manifiesta en muchas culturas a nivel de grafo decorativo o también como símbolo mítico y cosmogónico, como sucede, por ejemplo, en la gran mayoría de culturas amerindias, y especialmente en la maya, azteca e incaica, donde la serpiente forma parte de la divinidad y simbología de la vida, su origen, y del infinito. Fue, sin embargo, el griego Arquímedes (287 - 212 a.C.) quien la estudió y describió en su trabajo *Sobre espirales*, donde desarrolla su método de tangenciales (primer antecedente conocido del cálculo diferencial). Así, además de espiral constante se le llama espiral de Arquímedes o arquimediana. También hoy la encontramos, tanto en ambientes de decoración (collares y pendientes) como en multitud de juegos donde la espiral determina el campo de juego, como pueden ser la oca o los terrenos de los juegos de rayuela o semana.

**Figura 5.** Espiral neolitica de Tazzarine (Marruecos)

**Figura 6.** Rayuela peruana




Como ejemplo de ellas, bien fácil: ¡Una ensaimada! Un matasuegras; el tejido de alfombras y de cestería; la cuerda que un marinero va enrollando en cubierta; una cinta de cassette, vídeo, fotos; el cable de la aspiradora; un rollo de papel higiénico o de papel de aluminio o plástico; las volutas de los capiteles jónicos; las telarañas; el enroscamiento de una serpiente o de un milpiés; remolinos de pelo, etc.

### Espiral logarítmica

Si en lugar de desplazarse con una velocidad constante, el punto P se mueve a una velocidad que aumenta de forma proporcional a la distancia de P al centro o extremo de la semirecta, la trayectoria descrita será una espiral equiangular.

Aparece dibujada por primera vez en un libro de Albert Durero (1471-1528), *De la medida*, hacia 1528, y unos años más adelante René Descartes (1596-1650) la estudia con atención (1638) y por ello también se la conoce con el nombre de espiral de Descartes. Además del nombre de Descartes puede recibir el de logarítmica, debido a Jean Bernouilli o de progresión geométrica equiangular la llamó Roger Cortes, y Jackob Bernouilli la llamó también *spira mirabilis*. Aproximadamente se puede considerar como un "cono enrollado".

Entre estas podemos encontrar ejemplos en las conchas de los caracoles marinos y terrestres, en los fósiles de amonitas (http://www.grao.com/imgart/images/UN/UN40018U.jpg - figura 7: ammonites heliomorfo del Cretáceo Superior, 70 millones de años) parcialmente enrollado, nautilus...; en la disposición filotáxica de las hojas en el tallo de las plantas o de los pétalos de las flores, o de las semillas del girasol o las brácteas de las piñas; en la trompa de algunos insectos, en la trayectoria que recorren algunos insectos cuando se acercan a la luz, en la cola del caballito de mar...

## Espirilicemos: la construcción y formación de espirales. Aproximación didáctica

El mundo de las curvas está totalmente olvidado en los currículos matemáticos para centrarlos en el mundo exclusivamente rectilíneo. ¿Por qué este olvido, si el entorno inmediato, la naturaleza, está básicamente creado sobre el mundo curvilíneo? Nuestro objetivo es potenciar este conocimiento en el marco escolar como factor geométrico esencial para comprender nuestro entorno, el cual, solo con la atención rectilínea, queda totalmente incompleto y sesgado.

Los ejemplos de actividades que a continuación desarrollamos para el ciclo medio y superior de primaria y también para el primer ciclo de secundaria, no pretenden otra cosa que incentivar la comprensión conceptual de la espiral, fruto de experimentación vivencial y manipulativa y en ningún caso entramos en el tratamiento de su formulación o función algebraica, ni tampoco, en el tratamiento de su estimación métrica; factores que, ahora, dejamos de lado.

Evidentemente, la espiral se puede dibujar a mano alzada, pero el diseño difícilmente saldrá lo suficientemente correcto y en ningún caso se descubrirán los factores que la generan. Así pues, desde una vertiente didáctica, hemos de plantearnos el descubrimiento y comprensión de las espirales desde una perspectiva de desarrollo de propuestas de descubrimiento. Pensamos que es muy importante recoger material sobre las espirales, pero también generarlo y dibujarlo. Será todo esto lo que permitirá explicitar las propiedades que las generen, su clasificación y factores que las definen.

El listado de actividades está estructurado así:

- Trabajos de introducción a las espirales.
- Espirales arquimedianas.
- Espirales logarítmicas.
- Discriminando las espirales arquimedianas de las geométricas.

## Introducción a las espirales

*Actividad 1: Espiral y realidad*

Hacer una colección de fotos, imágenes de revistas, postales... y también de objetos donde aparezca la espiral. Con ellas organizar un mural o exposición.

*Actividad 2: La espiral empaqueta*

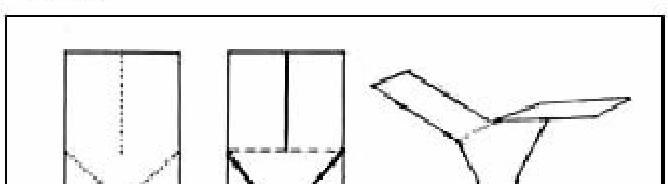
Dados unos elementos rectilíneos flexibles (cuerdas, tubo de manguera, alambre...) de una misma longitud, hay que situarlos, en el plano, de manera que ocupen el menor espacio posible.

*Actividad 3: Generar espirales*

- Tomamos una cinta y la pegamos al extremo de un palo. Hacemos mover el palo en movimiento circular y observamos la disposición de la cinta. El movimiento hay que hacerlo de manera que poco a poco la rotación de la mano se haga con el menor radio posible.
- Actividad de papiroflexia.

Construcción de un "helicóptero", lo dejaremos caer libremente al suelo y observaremos el recorrido.

**Figura 8.** Construcción de un helicóptero, recortar , plegar



- A partir de una hoja Din A4, hacer cuatro rectángulos iguales y de cada uno de ellos hacer dos rectángulos más alargados (de medidas aproximadamente 14,8 x 5,2). Coger uno. Con las tijeras se hacen tres cortes tal como está indicado en la primera figura.
- Ahora se ha de plegar el papel. Empezar por los dos triángulos rectángulos y a continuación hacer los dos pliegues de la parte inferior.
- Las dos pestañas superiores se doblan una hacia delante y la otra hacia detrás. Han de quedar dobladas horizontalmente, ligeramente hacia arriba.
- Doblar ahora la parte inferior, marcando mucho el pliegue.

El helicóptero está a punto para volar. Se recomienda ponerse derecho, coger el helicóptero con la mano derecha, levantarla y soltarlo. Y tenemos dos hélices.

## Espiral arquimediana

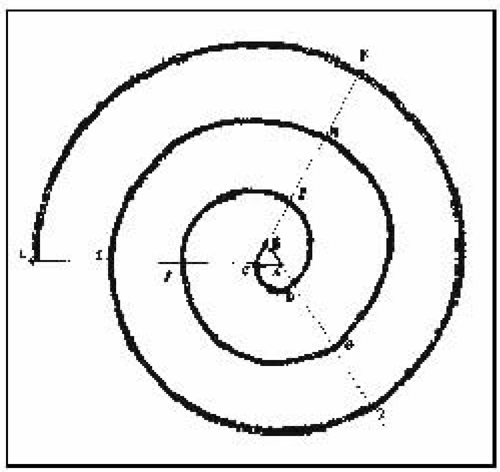
*Actividad 4: Descubrimos la espiral*

Envolvemos con una cinta un palo cualquiera o la pierna o cintura de una persona, elemento que se mantendrá fijo durante el ejercicio. En el otro extremo de la cinta atamos otro palo o bien una tiza para poder dibujar en el suelo el recorrido que resulte del desenrollamiento de la cinta, mientras la mantenemos siempre bien tensa y vamos girando para desenrollarla.

Antes de hacer la actividad y para que quede dibujado sobre el suelo el recorrido del desenrollamiento, pedimos que dibujen lo que creen que saldrá. De entre las diferentes propuestas y esquemas establecemos un diálogo respecto al porqué de la forma escogida o supuesta. A continuación se hace el desenrollamiento y se contrasta la realidad con las "suposiciones".

Probablemente este fue el método de la maravillosa espiral hecha por los incas en el desierto de Atacama.

**Figura 9.** Construcción a partir de un triángulo equilátero



*Actividad 5: Conozcamos un método geométrico para su construcción*

Otro método es el de trazar sectores circulares a partir de un triángulo equilátero central, donde uno de los vértices se sitúa en el origen o centro de la espiral y de longitud de los lados igual a la mitad del "paso de espira" o distancia uniforme que existe entre dos puntos de dos espiras o vueltas situadas sobre una misma semirecta, que tiene el origen en el centro de la espiral. A partir de este triángulo central se alarga cada uno de los lados en una sola dirección, de manera que sus vértices A, B y C se convierten en vértices de tres ángulos de 120º. Ya solo queda que con el compás empecemos desde A, a dibujar un sector de radio igual a la mitad del paso de espira. A continuación, desde B, después desde C y desde A, etc. de manera circular hacer arcos de radio igual al paso de espira, acto seguido desde B, C y A, con radio doble del paso de espira; después, triple, cuádruple y así sucesivamente. De forma análoga se puede dibujar a partir de un cuadrado, de un pentágono regular, etc.

*Actividad 6: Dibujar la espiral con plantillas de sectores circulares iguales*

Otro método es el que usa un círculo subdividido en partes iguales. Por ejemplo, el que tenemos en la http://www.grao.com/imgart/images/UN/UN400212.jpg - figura 10, que está subdividido en 36 ángulos de 10º cada uno y círculos concéntricos situados a igual distancia entre ellos.

## La espiral logarítmica

*Actividad 7: Descubramos la espiral logarítmica*

Haremos lo mismo que en la actividad 4, pero ahora haciendo contrastar dos actuaciones diferentes y con la variación que ahora el punto central será móvil y girará sobre su propio eje. En primer lugar se hará que el palo central o la persona que tiene envuelta la cinta gira o se mueve de manera uniforme, o sea que siempre gira a la misma velocidad (por ejemplo, hemos dibujado un círculo con centro en el palo o la persona, y hemos dibujado unos cuantos sectores iguales: cuatro, seis, ocho, diez...) de manera que gira uno o más sectores al mismo tiempo (por ejemplo, cada dos segundos un sector, dos...).

La segunda variación se hace modificando la velocidad de giro del elemento central, reduciendo el tiempo de recorrido de cada sector. Si hemos marcado, por ejemplo, cuatro sectores, el primer movimiento en el primer cuadrante hay que hacerlo con un determinado tiempo y cada nuevo cuadrante hay que reducir, siempre, una misma cantidad de segundos; por ejemplo 30 segundos para hacer el primer cuadrante y después ir reduciendo, cada vez 5 segundos menos en cada sector; el segundo cuadrante lo hacemos con 25; el tercero con 15; el cuarto con 10, volvemos al primero con 5...

Planteada la propuesta, invitar a que todo el mundo dibuje el recorrido que crea que se generará en cada caso y razonar el porqué del supuesto dibujado. Se lleva a la práctica y se contrastan los resultados.

*Actividad 8: ¿Qué pasa si la velocidad aumenta siempre el doble o el triple?*

Hay que buscar conclusiones para leer a partir del recorrido dibujado, atendiendo al paso de espira y su relación con la velocidad que lo ha generado.

*Actividad 9: ¿Qué pasa si el punto central está inmóvil y el que gira externamente aumenta su velocidad de manera constante en cada sector? Hazlo también doblando, triplicando la velocidad.*

Hay que dejar que por grupos lleven a la práctica el descubrimiento pertinente y descubrir la formación de la espiral logarítmica y la capacidad de saber leer la forma y su relación con la velocidad de giro.

*Actividad 10: La espiral logarítmica y los puntos Fibonnacci*

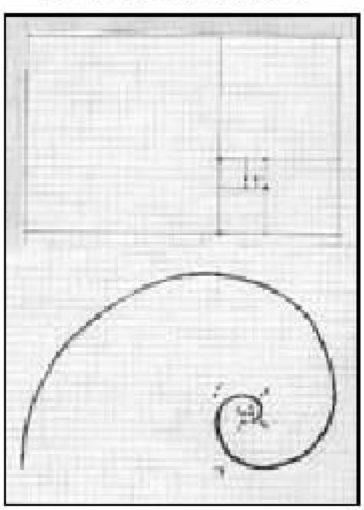
Un método, en el caso particular de las espirales logarítmicas, utiliza la serie llamada de Fibonnacci (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21... valores obtenidos de la suma de los dos anteriores).

Con estos valores como medida de los lados de cuadrados, podemos generar dos espirales logarítmicas fibonnacianas, una de ellas se dibuja conexionando un vértice con el vértice consecutivo del cuadrado inmediatamennte superior; la otra puede construirse aplicando este mismo procedimiento pero a partir del centro de los lados (http://www.grao.com/imgart/images/UN/UN40022U.jpg - figura 11).

*Actividad 11: La espiral logarítmica áurea*

Dibujamos un rectángulo de proporciones áureas (b/a = 1,6180339874...). En él construimos el cuadrado correspondiendo al lado menor. En el nuevo rectángulo que se forma volvemos a hacer lo mismo y así sucesivamente. Si unimos los sucesivos vértices de los cuadrados que se van formando, se genera la espiral áurea.

**Figura 12.** Espiral áurea



La espiral de Fibonnacci está construida encima de unos cuadrados, uno de los cuales es el menor. Por el contrario, la espiral áurea se hunde sin fin y tiende a un punto M alrededor del cual se enrosca cada vez más. El punto M se llama punto asíntota o centro de la espiral.

### Discriminación de espirales arquimedianas y logarítmicas

*Actividad 12: Diferenciaciones entre la espiral arquimediana y la logarítmica*

El objetivo es llegar a la generalización conceptual de sus propiedades definitorias a partir de trabajar, por ejemplo, la tabla adjunta como síntesis de las actividades anteriores.

<table>
<tr><th>Esquema (Dibujo de la espiral)</th><th>Nombre</th><th>Movimiento punto central</th><th>Movimiento punto giro exterior</th><th>Paso de espira</th><th>Otras observaciones</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="6">Movimiento punto central: (fijo, giro, traslación)<br>Movimiento punto giro exterior: (velocidad constante, uniforme variable, variable...)<br>Paso de espira: (igual, mismo incremento, diferente incremento...)</td></tr>
</table>

*Actividad 13: La espiral y la naturaleza*

Coleccionar diferentes objetos (conchas de caracoles, cuernos, ensaimada...) o fotos de elementos o adornos que tengan estructuras espiraloides (pueden ser los de la actividad 1) y hacer una clasificación para perfeccionar la muestra inicial.

*Actividad 14: Ampliemos el conocimiento de las espirales*

- ¿Qué pasaría si el punto de enrollamiento de la cinta siguiera un movimiento rectilíneo y siempre a una misma velocidad mientras se va desenrollando por el exterior?
- ¿Qué pasaría si el punto de enrollamiento de la cinta siguiera un movimiento rectilíneo y con una velocidad uniformemente variable, mientras se va desarollando por el exterior?
- ¿Qué pasaría si el punto de enrollamiento de la cinta sigue un movimiento circular con velocidad uniforme mientras se va produciendo el proceso de desenrollamiento?
- ¿Qué pasaría si el punto de enrollamiento de la cinta sigue un movimiento circular con velocidad variable uniformemente mientras se va produciendo el proceso de desenrollamiento?

*Actividad 15: Leemos e interpretamos espirales*

Dadas unas cuantas espirales, explicar lo que podamos de cada una de ellas y sus características.

*Actividad 16: La espiral y el arte*

Utilizar la espiral como estructura de creación artística es otra nueva propuesta didáctica que hay que aprovechar. Entre estas opciones diseñar estructuras espiraloides compuestas.

## Las espirales y el arte

Ya que hemos comenzado citando y homenajeando a Gala y Dalí, acabaremos haciéndolo también con otros artistas plásticos: Matisse y Escher.

Matisse aplica la técnica de recortar y pegar polígonos por disposiciones de colores para obtener la espiral logarítmica. En los últimos años de su vida, tenía las manos que le temblaban y no podía pintar, pero sí podía trabajar con tijeras, papel y ropa para hacer sus célebres *collages*. Uno de sus cuadros, *El caracol* (http://www.grao.com/imgart/images/UN/UN40024U.jpg - figura 13), que se encuentra en la Tate Gallery de Londres, realizado en 1953 y por tanto una de sus últimas obras, lo definió como un "panel abstracto sobre una raíz de realidad" y pretende evocar al caracol a partir de generar una espiral, estructura geométrica que trabajó repetidamente.

Escher utiliza las espirales para generar el sentido de la infinitud y fuga, añadido al de crecimiento y progressión. Entre la gran cantidad de obra que utiliza la espiral para generar estos sentimientos caben destacar los correspondiestes a las series de Desarrollo o la de las Metamorfosis (http://www.grao.com/imgart/images/UN/UN400251.jpg - figura 14).

Reproducimos, también, una obra creada por alumnos de primaria hecha basándose en cuadrados que tienen lados distintos ordenados de menor a mayor (http://www.grao.com/imgart/images/UN/UN400252.jpg - figura 15). Seguramente cualquier alumno o alumna, después de trabajar polígonos semejantes, ¡podrá superarlo con facilidad!

Aparte de todos estos argumentos dados a favor del trabajo con espirales, se puede aprovechar para hacer la siguiente reflexión: cuando estamos hablando de dibujos, fotos o grabados a la piedra las estructuras son estáticas; pero en la naturaleza lo más destacado es el cambio, que en cierta manera todo fluye. Entonces, si las condiciones cambian ligeramente, un caracol cambiará un poco la estructura de su concha y un flujo de agua cambiará los remolinos si el agua corre, ahora, con más fuerza.

*Las rosas, las rojas rosas rojas, mirad bien la naturaleza: las espirales nos esperan!*

## Bibliografía


ALSINA, C. (2003): "Invitación a las hélices" en *SUMA*, n.44, pp. 99-100.

ARANDA, F.D; FUENTE, M. (2001): *Matemáticas, naturaleza y arte*. Córdoba. Junta de Andalucía.

ARNHEIM, R. (1987): *Arte y Percepción visual. Psicología de la percepción creadora*. Buenos Aíres. EUDEBA-SEM (editorial Universitaria de Buenos Aíres).

BLANCO, MªF. (Ed.) (2004): *Metodología y aplicaciones de las matemáticas en la ESO.* Madrid. Ministerio de Educación y Ciencia.

CALLÍS, J. (2002): *Estimació de mesures longitudinals rectilínies i curvilínies*. Procediments, recursos i estratègies. Tesi Doctoral. Barcelona. UAB. Disponible en

CALLÍS, J. (2003): "Forma, funció i fons: de la natura a l'aprenentatge" en *Perspectiva Escolar*, n. 275.

CASTELNUOVO, E. (1963): *Geometría intuitiva*. Barcelona. Labor.

CHARON, J.E. (1968): *El conocimiento del Universo*. Barcelona Martínez Roca SA.

FIOL, M.Ll. (2003): "Els infants, l'espai i la forma de les coses" en *Perspectiva Escolar*, n. 275.

GARDNER, M.D. (1990): *El universo ambidextro (I y II).* Barcelona. Salvat Editores.

GHERVERGHESE, G. (1986): *La cresta del pavo real. Las matemáticas y sus raíces no europeas*. Madrid. Pirámide.

GHYKA, M. (1983): *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes.* Barcelona. Poseidón.

JOHSON, M. (1991): *El cuerpo y la mente. Fundamentos corporales del significado, la imaginación y la razón*. Madrid. Debate, Serie Ciencia.

KAHANE, J.P. (???): *Mesures et Dimensions.* Apmep de Haute-Normandie et Poitou-Charentes. Plot.

MENDÈS-FRANCE, M. (1998): *Longueur d'une nouille et dimensions des spìrales*. Apmep de Haute-Normandie et Poitou-Charentes. Plot, n. 84, pp. 15 a 19.

MUSEU DE LA CIÈNCIA (2003): *I després fou... la forma!* Barcelona. Fundació "la Caixa".

PERSPECTIVA ESCOLAR (2003): *Formes. Barcelona*. Rosa Sensat, n. 275.

SEMINARIO RAMON ALLER (1999): "El maravilloso mundo de las curvas. Notas históricas, propiedades y usos de algunas curvas notables" en *Actas IX JAEM*. Lugo.

STEVENS, P.S. (1986): *Patrones y pautas en la naturaleza*. Barcelona. Salvat.

THOMPSON, A.W. (1980): *El crecimiento y la forma*. Madrid. Blume.

WAGENSBERG, J. (2003): *Si la naturaleza es la respuesta, ¿cuál era la pregunta?; y otros quinientos pensamientos sobre la incertidumbre*. Barcelona. Tusquets.

WAGENSBERG, J. (2004): *La rebelión de las formas. O cómo perseverar cuando la incertidumbre aprieta*. Barcelona. Tusquets.

## Dirección de contacto

Josep Callís
Universitat de Girona.
callisj@fce.udg.es

M. Lluïsa Fiol
Universitat de Girona.
: Didáctica de las matemáticas.

---

1. "Xia", en catalán fonéticamente suena como "chia". La palabra xia también existe en castellano, se refiere a una de las dinastías chinas y "chía" tiene que ver con una prenda de abrigo, que es propia de personas de cierta categoría y, por lo menos en parte, se lleva enrollada. Por esto nos permitimos la licencia del título: La xia de Gala