Guia didàctica de la Matemàtica universitària

ÀLGEBRA MATRICIAL: MATRIUS

Joan Bonet, Xavier Bertran
Carles Cassú, J. Carles Ferrer

Universitat de Girona
Departament d'Economia

Primera edició: novembre de 1994

Amb la col·laboració del Comissionat per a Universitats i Recerca i del Departament de Cultura de la Generalitat de Catalunya

Edita: Servei de Publicacions de la Universitat de Girona

Assessorament lingüístic: Servei de Normalització Lingüística de la Universitat de Girona

Universitat de Girona
Edifici Les Àligues
Pl. Sant Domènec, 3
17071 Girona
Tel. (972) 41 82 06 - Fax (972) 41 80 31

ISBN: 84-88762-07-0

Dipòsit legal: GI-1811-94

Carles Cassú és doctor en Ciències i catedràtic d'Escola Universitària de la UdG; Xavier Bertran, Joan Bonet i J. Carles Ferrersón llicenciats en Ciències Matemàtiques i professors titulars d'Escola Universitària del Departament d'Economia de la UdG.

PRÒLEG

Oferim als estudiants universitaris i als lectors interessats aquesta guia didàctica de la matemàtica universitària com a fruit dels nostres anys de docència de les matemàtiques a la Universitat. El resultat final ha esdevingut una col.lecció de quinze petits volums agrupats en els dos móduls d'Àlgebra Lineal i de Càlcul Infinitesimal.

Per raons de contingut el mòdul d'Àlgebra Lineal s'ha subdividit en les tres parts corresponents d'Àlgebra Moderna (dos volums: Conjunts i Estructures), Àlgebra Matricial (tres volums: Matrius, Determinants i Sistemes d'equacions) i Àlgebra Vectorial (tres volums: Vectors, Endomorfismes i Geometria Analítica), mentre que el mòdul de Càlcul Infinitesimal agrupa les tres parts corresponents a Càlcul Funcional (dos volums: Successions i Funcions), Càlcul Diferencial (tres volums: Derivades, Corbes i Optimització) i Càlcul Integral (dos volums: Integrals i Equacions Diferencials).

Creiem que, en l'estudi de la Matemàtica, l'alumne universitari podrà servir-se d'aquesta guia didàctica tant per a la confecció dels seus propis apunts com en l'estudi dels diferents temes que conformen les assignatures corresponents a les matèries tractades. Per aquest motiu es presenta una breu *Bibliografia escollida* classificada en bàsica i addicional, segons el grau de dificultat que presenta.

Exposem el *Programa* i la *Simbologia*, on indiquem els conceptes que l'integren, conjuntament amb el simbolisme que farem servir al llarg de l'obra. Hem procurat fer un programa racional en què els conceptes es van deduint els uns dels altres de manera lògica.

En cada volum es destaca especialment el contingut en *Conceptes* i *Exemples*, de gran importància per a la comprensió de les matèries tractades, en les quals, sovint, es prescindeix de demostracions formalistes d'acord amb l'esperit de l'obra, que, com el seu títol indica, pretén ser una guia didàctica.

A continuació presentem una *Formulació matemàtica*, expressada en símbols formals dels conceptes estudiats, que ajudaran, sens dubte, a la rigorositat en la resolució de qüestions i problemes.

Seguim el desenvolupament amb la part dedicada a l'estudi de *Problemes resolts*. És important que l'estudiant comprengui fins a l'últim detall aquests problemes, que, en realitat, són una continuïtat en grau de dificultat dels exemples senzills estudiats anteriorment.

Presentem després una col.lecció de Problemes proposats amb la intenció que el lector els resolgui de manera natural mitjançant els coneixements adquirits als apartats anteriors.

A l'apèndix s'inclou una *Prova d'autoavaluació* que consta d'una sèrie de "problemes parametritzats"; és a dir, problemes que depenen d'un paràmetre (a=1,2,3,4). Per a cada valor del paràmetre la solució serà diferent i estarà inclosa entre alguna de les vuit possibles. Aquest tipus de problemes es podrà resoldre quatre vegades amb números diferents.

Finalment, a més de la *Bibliografia escollida*, un *Glossari* de tots els conceptes matemàtics exposats al llarg de l'obra en facilita la ràpida localització.

Joan Bonet, Xavier Bertran,
Carles Cassú, J. Carles Ferrer
Girona, novembre de 1994

Capítol 1: **Matrius**

a) BIBLIOGRAFIA ESCOLLIDA

Bàsica:

BURGOS, A. *Iniciación a la Matemática Moderna.* P281/332

ALEGRE, P. *Ejercicios resueltos de Matemáticas Empresariales 1.* P11/15, P17/22 i P46/70.

SAMAMED, O. *Matemáticas 1. Economía y Empresa. Teoria.* P57/73

LIPSCHUTZ, S. *Algebra Lineal.* P87/166

GUTIERREZ GOMEZ, A. *Algebra Lineal. Tomo (II).* P149/168, P195/210.

AYRES, F. *Matrices.* P1/19

PRIETO, E. *Matemáticas para Economistas. Algebra Lineal.* P209/252

CANCELO, J.R. *Problemas de Algebra Lineal para Economistas. Tomo I.* P153/190

HERAS, A. *Problemas de Algebra Lineal para la Economía.* P1/5 i P23/30. (N).

Addicional:

DOWLING, E.T. *Matemáticas para Economistas.* P181/207.

THOMAS ARA, L. *Algebra Lineal.* P156/172.

VEGAS PEREZ, A. *Elementos de Matemáticas para Economistas. Tomo 1.* P29/34.

YAMANE, T. *Matemáticas para Economistas.* P378/394.

CASANOVA, J. *Examenes de Algebra Lineal.* P17/31.

BOADAS, J. *Algebra Moderna a través de los problemas. Tomo II.* P87/157.

DIAZ HERNANDO, J. A. *Algebra, Geometría, Cálculo. Tomo II.* P9/130.

DIEGO, BRAULIO de. *Problemas de Algebra y Geometria. Problemas de Algebra Lineal.* P1/2 i P6/43.

b) PROGRAMA I SIMBOLOGIA

1.1 CARACTERÍSTIQUES DE LES MATRIUS.

1) **Concepte de matriu:** conjunt indexat (I_m), ordre, índex (i,j). Aplicació matriu (f_A), matriu (A,B,C,...), matrius real i complexa, termes (a_{ij}). Línies d'una matriu: files (f_i) i columnes (c_j).
2) **Ordre d'una matriu:** definició d'ordre (m×n), matrius equidimensionals, conjunt de les matrius ($M_{m \times n}$). Classificació segons l'ordre: matriu rectangular i quadrades, mat. fila i columna.
3) **Diagonals en matrius quadrades:** diagonal principal (D_p) i secundària (D_s), traça d'una matriu ($\tau(A)$).
4) **Operacions elementals entre línies:** suma algebraica de línies paral·leles, producte d'un número per una línia. Fila nul·la (f_0) i columna nul·la (c_0).
5) **Independència lineal:** combinació lineal entre línies paral.leles (c.l.), matrius equivalents ($A \equiv B$). Sistema lligat, files o columnes linealment dependents. Sistema lliure, files o columnes linealment independents.
6) **Rang d'una matriu:** definició de rang ($\rho(A)$). Matriu escalonada. Càlcul del rang d'una matriu: mètode de Gauss, regla del Pivot.

1.2 OPERACIONS AMB MATRIUS.

1) **Transposició de matrius:** transposició, matriu transposada (A'). Propietats.
2) **Suma de matrius:** igualtat de matrius (A=B), termes corresponents. Suma de matrius, matriu suma (A+B). Matriu nul·la (O), mat. oposada (-A). Propietats, grup abelià. Diferència de matrius (A-B).
3) **Producte d'un número per una matriu:** definició. Escalar. Propietats.
4) **Producte de matrius:** mat. multiplicables, conformitat, mat. producte (A•B). Producte escalar d'una fila per una columna. Propietats: no commutativitat, premultiplicació i postmultiplicació, transposició.

5) **Producte de matrius quadrades:** matriu unitat (I). Altres propietats, anell no commutatiu amb el. unitat. Mat. commutables. Mat. inversa (A^{-1}), mat. regulars i singulars. Matrius divisors de zero.
6) **Càlcul de la matriu inversa:** mètode del sistema d'equacions. Mètode de Gauss-Jordan, mat. conjunta (M). Potència d'una matriu (A^n), polinomi matricial (p(A)), polinomi anul·lador, mètode del pol. anul·lador.
7) **Partició de matrius:** submatriu o caixa, partició de matrius, matriu particionada. Operacions amb mat. particionades: suma, producte per un escalar, producte. Càlcul de la inversa per submatrius.

1.3 TIPUS DE MATRIUS QUADRADES.

1) **Matrius triangulars:** mat. triangulars superiors i inferiors. Mat. diagonal, mat. escalar.
2) **Matrius simètriques:** mat. simètrica (S) i antisimètrica (T), propietats.
3) **Matrius de quadrats especials:** matriu involutiva, mat. involutiva d'índex m. Mat. ortogonal. Mat. idempotent, mat. periòdica de període p. Mat. nilpotent, mat. nilpotent d'índex m.
4) **Matrius complexes:** matrius complexa, conjugada i real. Matrius hermítica i antihermítica.
5) **Matrius equivalents:** mat. equivalents. Matrius de pas (P, Q). Mat. semblants i congruents.
6) **Matrius no negatives:** mat. no negativa, mat. positiva. Mat. estocàstica. La matriu de Leontiev (L) i la seva inversa (L^{-1}). Matrius de permutació (P_{ijk}).

c) CONCEPTES I EXEMPLES

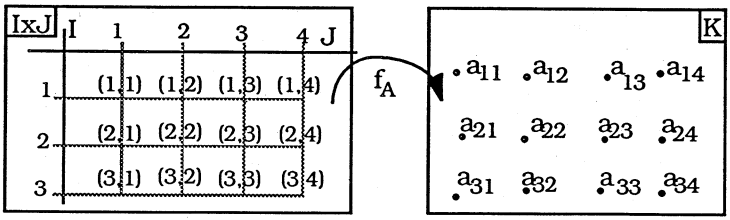
1.1 CARACTERÍSTIQUES DE LES MATRIUS

1.1.1 CONCEPTE DE MATRIU. Anomenem *conjunt indexat* d'*ordre* m, i el simbolitzem per I_m (o també J_m) el format per tots els nombres naturals inferiors o iguals a m. A cadascun d'aquests números l'anomenem *índex*, que, evidentment, varia d'1 a m.

Exemple 1. Donat $I_8=\{i \in N \;/\; 1 \leq i \leq 8\}$ observem que $i=1,2,\ldots,8$, cosa que indica que l'índex varia d'1 a 8, $I_8=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Siguin dos conjunts indexats I_m i J_n i sigui també un cos K. Si formem el conjunt producte $I_m \times J_n$ obtindrem m·n parells ordenats que es podran disposar en forma rectangular. S'anomena *aplicació matriu* una aplicació d'$I_m \times J_n$ en el cos K de manera que cada parell ordenat (i,j) tingui per imatge un determinat element a_{ij} del cos. Es podrà simbolitzar per f_A, on A és el conjunt imatge en el cos K.

Exemple 2. Siguin els conjunts indexats $I_3=\{1,2,3\}$ i $J_4=\{1,2,3,4\}$. El seu conjunt producte $I_3 \times I_4$ constarà de 3.4=12 parells ordenats.



A cada parell li correspondrà un element del cos K, així el parell (1,3) tindrà per imatge l'element a_{13}. Notem que la disposició de les imatges en K pot quedar en forma rectangular, similar al I×J, substituint de manera ordenada cada parell per la seva imatge.

Anomenem *matriu* aquest conjunt de números disposats en forma rectangular. Segons quin sigui el cos, R o C, tindrem una *matriu real* o bé una *matriu complexa*. Situarem les matrius entre parèntesis i les simbolitzarem per les primeres lletres majúscules A, B, C,...:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Abreujadament, podrem escriure $A=(a_{ij})$ on i,j són els índexs que ens indiquen els diferents *termes* de la matriu. És clar que el primer pot ser $i=1,2,\ldots,m$ i el segon $j=1,2,\ldots,n$.

Si un d'aquests índexs roman constant i variem l'altre per a tots els seus valors, tindrem un conjunt de termes que constituiran una *línia* de la matriu. Si és el primer índex el que roman constant, obtindrem una *fila*, mentre que si és el segon ens quedarà una *columna*.

Observem que en una matriu existeixen m files i n columnes. Les files les simbolitzem per $\mathbf{f}_i$ i les columnes per $\mathbf{c}_j$. Així, la primera fila és $\mathbf{f}_1=(a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n})$, la segona $\mathbf{f}_2=(a_{21}\ a_{22}\ \dots\ a_{2n})$ i l'emèsima $\mathbf{f}_m=(a_{m1}\ a_{m2}\ \dots\ a_{mn})$. Per a les columnes la disposició és vertical i les columnes primera, segona i enèsima són:

$$\mathbf{c}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\ \mathbf{c}_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\ \dots,\ \mathbf{c}_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Per facilitar la notació de les columnes posem $\mathbf{c}_1=(a_{11}\ a_{21}\ \dots\ a_{m1})'$, $\mathbf{c}_2=(a_{12}\ a_{22}\ \dots\ a_{m2})'$ i $\mathbf{c}_n=(a_{1n}\ a_{2n}\ \dots\ a_{mn})'$, on la prima ens indica que es tracta d'una columna.

Per tant, la matriu A podrà considerar-se o bé com un conjunt de m files, $A=(\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2\ \dots\ \mathbf{f}_m)'$, on aquesta disposició ha de veure's com vertical, o bé com un conjunt de n columnes, $A=(\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2\ \dots\ \mathbf{c}_n)$.

Exemple 3. Donada la matriu

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & -5 & 8 & -3 \\ 7 & 6 & -9 & -2 \end{pmatrix}$$

veiem que té per files $\mathbf{f}_1=(3\ 2\ 0\ -4)$, $\mathbf{f}_2=(1\ -5\ 8\ -3)$ i $\mathbf{f}_3=(7\ 6\ -9\ -2)$. Les columnes, escrites horitzontalment seran $\mathbf{c}_1=(3\ 1\ 7)'$, $\mathbf{c}_2=(2\ -5\ 6)'$, $\mathbf{c}_3=(0\ 8\ -9)'$ i $\mathbf{c}_4=(-4\ -3\ -2)'$. Observem que $a_{11}=3$, $a_{23}=8$, $a_{34}=-2$, etc.

1.1.2 ORDRE D'UNA MATRIU. S'entén per *ordre* d'una matriu A el nombre de les m files i n columnes de què consta. Escriurem $\mathrm{ord}(A)=m\times n$. Dues matrius que tinguin el mateix ordre es diran *matrius equidimensionals*, $\mathrm{ord}(A)=\mathrm{ord}(B)$, i les dues pertanyeran al *conjunt de les matrius* d'ordre m×n, simbolitzat per $M_{m\times n}$.

Exemple 4 Per a la matriu anterior A i les matrius

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 3 \\ 2 & 8 & 7 & -6 \\ 3 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ i } C=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

observem que A i B són matrius equidimensionals (amdues són del mateix ordre: tenen 3 files i 4 columnes). Posarem $A,B\in M_{3\times 4}$. En canvi, $C\in M_{3\times 2}$ i no serà equidimensional ni amb A ni amb B.

Segons el seu ordre podrem fer una *classificació de matrius*:: en general les matrius seran *matrius rectangulars*, però si el nombre m de files és igual al n de columnes direm que es tracta d'una *matriu quadrada*, ja que tindrà forma de quadrat.

El conjunt de matrius quadrades de n files i n columnes, és a dir, de les matrius amb ord(A)=n×n (també, i com a simplificació, escriurem ord(A)=n) el simbolitzarem per M_n.

Si una matriu consta d'una sola fila, diem que es tracta d'una *matriu fila* i, si consta d'una sola columna, l'anomenem *matriu columna*. Encara més, una matriu d'una sola fila i una sola columna no és res més que un número i així un número pot considerar-se com un cas particular de matriu.

Exemple 5. Les matrius A, B i C anteriors són clarament matrius rectangulars. En canvi, les noves matrius

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 8 & 4 \\ 6 & 9 & -7 \end{pmatrix},\ B=(2\ -5\ 9\ -8) \text{ i } C=\begin{pmatrix} -3 \\ 12 \end{pmatrix}$$

són, respectivament, una matriu quadrada, una matriu fila i una matriu columna, que també es pot representar per C=(-3 12)'.

1.1.3 DIAGONALS EN MATRIUS QUADRADES. Si A és una matriu quadrada (d'ordre n), la *diagonal principal* està formada per tots els elements que tenen el mateix índex de fila i de columna. Geomètricament, és la diagonal del quadrat que va des del primer terme a_{11} fins a l'ultim a_{nn}. Escriurem $D_p=(a_{11}, a_{22},..., a_{nn})$, on separem els termes per comes per indicar que no es tracta de cap línia (fila o columna) de la matriu.

L'altra diagonal d'una matriu quadrada és la *diagonal secundària*. Observem que la suma dels índexs de cada terme de la diagonal secundària és sempre igual a n+1. Escriurem $D_s=(a_{1n}, a_{2,n-1},..., a_{n1})$. Veiem-ho per una matriu quadrada d'ordre 4, on es pot comprovar la disposició geomètrica de les diagonals principal i secundària:

$$D_p=\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \boxed{a_{44}} \end{pmatrix} \text{ i } D_s=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \boxed{a_{14}} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} & a_{24} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & a_{33} & a_{34} \\ \boxed{a_{41}} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Un concepte important és el de *traça d'una matriu*, simbolitzada per $\tau(A)$, que ve donada per la imatge de l'aplicació τ: A→R, tal que a cada matriu quadrada A li fa correspondre la suma dels termes de la seva diagonal principal. Així la traça serà $\tau(A)=a_{11}+a_{22}+...+a_{nn}$.

Exemple 6. Si A és la matriu quadrada de l'exemple anterior, tenim com a diagonal principal $D_p=(1, 8, -7)$ i com a diagonal secundària $D_s=(5, 8, 6)$. La traça de la matriu és $\tau(A)=1+8+(-7)=2$.

1.1.4 OPERACIONS ELEMENTALS ENTRE LÍNIES. Partim d'una matriu A d'ordre m×n, és a dir, formada per m files i n columnes. Considerem dues files o columnes paral·leles.

La *suma algebraica de línies paral·leles* es realitza sumant o restant els termes correlatius de cada línia. Així, en una matriu A(5×6),

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} & a_{14} & \boxed{a_{15}} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} & a_{24} & \boxed{a_{25}} & a_{26} \\ \boxed{a_{31}} & \boxed{a_{32}} & \boxed{a_{33}} & \boxed{a_{34}} & \boxed{a_{35}} & \boxed{a_{36}} \\ \boxed{a_{41}} & \boxed{a_{42}} & \boxed{a_{43}} & \boxed{a_{44}} & \boxed{a_{45}} & \boxed{a_{46}} \\ a_{51} & a_{52} & \boxed{a_{53}} & a_{54} & \boxed{a_{55}} & a_{56} \end{pmatrix}$$

donades per exemple les files $\mathbf{f}_3=(a_{31}\ \ a_{32}\ \dots\ a_{36})$ i $\mathbf{f}_4=(a_{41}\ \ a_{42}\ \dots\ a_{46})$, la seva suma algebraica serà

$$\mathbf{f}_3\pm\mathbf{f}_4=(a_{31}\pm a_{41}\ \ a_{32}\pm a_{42}\ \dots\ a_{36}\pm a_{46})$$

El mateix passarà amb les columnes. Si $\mathbf{c}_3=(a_{13}\ \ a_{23}\ \dots\ a_{53})'$ i $\mathbf{c}_5=(a_{15}\ \ a_{25}\ \dots\ a_{55})'$ són dues columnes de A(5×6), la seva suma algebraica vindrà donada per

$$\mathbf{c}_3\pm\mathbf{c}_5=(a_{13}\pm a_{15}\ \ a_{23}\pm a_{25}\ \dots\ a_{53}\pm a_{55})'$$

Efecturar el *producte d'un número per una línia* consisteix a realitzar el producte d'aquest número per tots els termes de la línia.

Si, per exemple, es tracta del número real α i de la fila $\mathbf{f}_3$, a la matriu anterior A(5×6), tindrem

$$\alpha.\mathbf{f}_3=(\alpha.a_{31}\ \ \alpha.a_{32}\ \dots\ \alpha.a_{36})$$

En canvi, per a la columna $\mathbf{c}_5$ tindrem

$$\alpha.\mathbf{c}_5=(\alpha.a_{15}\ \ \alpha.a_{25}\ \dots\ \alpha.a_{55})'$$

En el cas particular $\alpha=0$, obtindrem evidentment la *fila nul·la* i la *columna nul·la*, que designarem respectivament per

$$\mathbf{f}_0=(0\ \ 0\ \dots\ 0) \quad \text{i} \quad \mathbf{c}_0=(0\ \ 0\ \dots\ 0)'$$

Exemple 7. Donada la matriu A d'ordre 3×4

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 8 \\ 2 & 7 & -4 & 3 \\ -6 & 0 & 7 & -9 \end{pmatrix}$$

comprova mentalment que $\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_2=(3\ \ 4\ \ 1\ \ 11)$, $\mathbf{f}_2-\mathbf{f}_3=(8\ \ 7\ \ -11\ \ 12)$, $\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_3=(6\ \ -2\ \ 1)'$ i $\mathbf{c}_2-\mathbf{c}_4=(-11\ \ 4\ \ 9)'$.

També, si $\alpha=6$ tindrem $6.\mathbf{f}_2=(12\ \ 42\ \ -24\ \ 18)$ i $6.\mathbf{c}_3=(30\ \ -24\ \ 42)'$.

1.1.5 INDEPENDÈNCIA LINEAL. Donades dues o més línies paral·leles, una *combinació lineal* entre elles és la realització conjunta de les dues operacions elementals anteriors; és a dir, multiplicar les línies per números i després sumar-les.

Exemple 8 . A la matriu A anterior, una combinació lineal entre files i una altra entre columnes, són, per exemple

$$3.\mathbf{f}_2+(-4).\mathbf{f}_3=(6\ \ 21\ \ -12\ \ 9)+(24\ \ 0\ \ -28\ \ 36)=(30\ \ 21\ \ -40\ \ 45)$$

$$5.\mathbf{c}_1+2.\mathbf{c}_4=(5\ \ 10\ \ -30)'+(16\ \ 6\ \ -18)'=(21\ \ 16\ \ -48)'.$$

Sigui ara una matriu A(m×n) on dues de les seves files són $\mathbf{f}_i$ i $\mathbf{f}_j$. Direm que la *fila* $\mathbf{f}_k$ és *combinació lineal* de les $\mathbf{f}_i$ i $\mathbf{f}_j$, i escriurem $\mathbf{f}_k$=c.l.($\mathbf{f}_i$, $\mathbf{f}_j$), si es poden trobar dos números reals α i β de manera que multiplicant-los per les files respectives i sumant-ne els resultats, s'obté la fila $\mathbf{f}_k$. És a dir, si $\mathbf{f}_k=\alpha.\mathbf{f}_i+\beta.\mathbf{f}_j$.

El mateix podem dir pel que fa a les columnes. La columna $\mathbf{c}_k$ és combinació lineal de les $\mathbf{c}_i$ i $\mathbf{c}_j$, i escriurem $\mathbf{c}_k$=c.l.($\mathbf{c}_i$, $\mathbf{c}_j$), si existeixen dos números reals α i β de manera que $\mathbf{c}_k=\alpha.\mathbf{c}_i+\beta.\mathbf{c}_j$.

Exemple 9. Suposem la matriu

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 8 & 2 & -7 \\ 5 & 4 & -6 & 7 \end{pmatrix}$$

Observem que l'última fila és combinació lineal de les dues primeres, $\mathbf{f}_3$=c.l.($\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$), perquè $f_3=4.f_1+(-1).f_2$, és a dir, multiplicant la 1ª per 4, la 2ª per (-1) i sumant-les s'obté la 3ª fila.

Pel que fa a les columnes, també veiem que l'última columna és combinació lineal de les tres primeres, $\mathbf{c}_4$=c.l.($\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_3$), que en aquest cas és $\mathbf{c}_4=\mathbf{c}_1-\mathbf{c}_2-\mathbf{c}_3$. També es poden comprovar les dues combinacions lineals següents $\mathbf{c}_3=(-2).\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2$ i $\mathbf{c}_4=3.\mathbf{c}_1+(-2).\mathbf{c}_2$.

Siguin A i B dues matrius equidimensionals. Diem que A i B són *matrius equivalents*, i escrivim A≡B, si les línies de B es poden obtenir com a combinació lineals de les línies de A, és a dir, si es pot passar d'una a l'altra mitjançant operacions elementals.

Exemple 10. La matriu anterior A és equivalent a les matrius

$$B_1=\begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 & 0 \\ 6 & 16 & 4 & -14 \\ 5 & 4 & -6 & 7 \end{pmatrix},\ B_2=\begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & -14 \\ 5 & 4 & -6 & 7 \end{pmatrix} \text{ i } B_3=\begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 5 & 4 & -6 & 7 \end{pmatrix}$$

ja que a la primera B_1 hi ha les noves files $\mathbf{g}_1=3.\mathbf{f}_1$ i $\mathbf{g}_2=2.\mathbf{f}_2$,an la segona B_2 s'han restat aquestes dues, la nova fila ha quedat $\mathbf{h}_2=\mathbf{g}_1-\mathbf{g}_2$ i en l'última matriu B_3 la segona fila és 1/7 de $\mathbf{h}_2$.

També es poden fer operacions elementals entre les seves columnes. Per exemple si prenem la nova columna donada per $\mathbf{d}_4=-\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2+\mathbf{c}_3+\mathbf{c}_4$ ens resulta la columna nul·la.

Donat un conjunt de files S={$\mathbf{f}_i$, $\mathbf{f}_j$, ..., $\mathbf{f}_l$, ..., $\mathbf{f}_s$} direm que formen un *sistema lligat* i que les files són *linealment dependents* si una d'elles es pot posar com a combinació lineal de les altres. Així, es pot tenir $\mathbf{f}_l$=c.l.($\mathbf{f}_i$, $\mathbf{f}_j$,..., $\mathbf{f}_s$), anomenada *equació de lligadura.*

En canvi, si al conjunt S de files cap d'elles no es pot posar com a combinació lineal de la resta, diem que S és un *sistema lliure* i que les files són *linealment independents*. Es pot provar que en un sistema lliure l'única manera d'obtenir la fila nul·la és multiplicar totes les files per 0 i sumar-les. Conseqüentment, per demostrar que un conjunt de files és un sistema lliure podem provar que

$$\alpha.\mathbf{f}_i+\beta.\mathbf{f}_j+\ldots+\lambda.\mathbf{f}_l+\ldots+\sigma.\mathbf{f}_s=\mathbf{f}_0 \ \Rightarrow\ \alpha=0,\ \beta=0,\ldots,\ \lambda=0,\ \ldots,\ \sigma=0$$

De manera anàloga també podem parlar de columnes linealment dependents i linealment independents.

Exemple 11. Si ens fixem en la matriu A de l'exemple 9 veiem que el conjunt de totes les files $S_1=\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ formen un sistema lligat, perquè per exemple $f_3=4.f_1+(-1).f_2$, d'on es pot deduir l'equació de lligadura $4.\mathbf{f}_1-\mathbf{f}_2-\mathbf{f}_3=\mathbf{f}_0$.

El nou sistema $S_2=\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ és un sistema lliure perquè les dues files són linealment independents (no es pot deduir $\mathbf{f}_2$ a partir de $\mathbf{f}_1$ amb operacions elementals).

Per a les columnes veiem que $S_3=\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4\}$ i $S_4=\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ són sistemes lligats, mentre que $S_3=\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ és un sistema lliure.

1.1.6 RANG D'UNA MATRIU. Simbolitzem amb ρ(A) el *rang d'una matriu* A, que es defineix com el nombre màxim de files de A linealment independents. Es pot provar que aquest rang coincideix també amb el nombre màxim de columnes linealment independents, però d'ara endavant treballarem només amb files.

Exemple 12. Amb la matriu A que estem emprant com a exemple hem vist que $S_1=\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ és un sistema lligat, però $S_2=\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ és un sistema lliure. Així hi ha dues files linealment independents i el rang de la matriu és ρ(A)=2.

Per columnes, al ser $S_3=\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ un sistema lliure i $S_4=\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ un sistema lligat, també el màxim nombre de columnes linealment independents és dos i el rang serà ρ(A)=2.

Per determinar el rang ρ(A) d'una matriu, cercarem una matriu M, equivalent a la donada, anomenada *matriu escalonada*, que compleix les dues condicions següents:

(1) FORMACIÓ DE L'ESCALÓ. Una fila que és a sota d'una altra té el seu 1er terme no nul a la dreta del primer terme no nul de l'altra.

(2) FINAL DE TOTS ELS ESCALONS. Si una fila de la matriu és la fila nul·la (formada per zeros), també són nul.les les files posteriors.

Es pot provar fàcilment que si la matriu escalonada M té r files diferents de la fila nul·la, llavors el rang de la matriu inicial A és r.

El problema, doncs, es redueix a determinar la matriu escalonada. El procediment que emprarem és el *mètode de Gauss*, que segueix els passos següents:

PRIMER ESCALÓ. Deixarem la primera fila igual i farem que el primer terme de totes les files posteriors es transformi en zero. Per això es faran les combinacions lineals adients entre la primera fila i la fila de treball, simplificant si és possible.

SEGON ESCALÓ. Ara deixarem igual les dues primeres files i a partir de la segona fila, repetint el procés anterior, farem que totes les posteriors tinguin nul el seu segon terme. I així es reitera, fins que s'acaba el procés.

El procediment s'acaba quan la matriu ens queda escalonada i el rang serà el nombre de files diferents de la fila nul·la. Hem de notar que si les operacions han de resultar més senzilles, es pot canviar l'ordre de les files.

Exemple 13. Calculem el rang $\rho(A)$ de la matriu A que estem fent servir d'exemple. Emprarem el mètode de Gauss:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 8 & 2 & -7 \\ 5 & 4 & -6 & 7 \end{pmatrix}\begin{matrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \end{matrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & -14 \\ 0 & -7 & -7 & 14 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \mathbf{g}_2=2.\mathbf{f}_2-3.\mathbf{f}_1 \\ \mathbf{g}_3=2.\mathbf{f}_3-5.\mathbf{f}_1 \end{matrix} \equiv$$

$$\equiv\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \mathbf{h}_2=\mathbf{g}_2/7 \\ \mathbf{h}_3=\mathbf{g}_3/7 \end{matrix} \equiv\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \mathbf{i}_3=\mathbf{h}_3+\mathbf{h}_2 \end{matrix}$$

Veiem que la matriu ens ha quedat escalonada. Prescindint de l'última fila, que és nul·la, ens quedaran dues files, per la qual cosa el rang de la matriu és $\rho(A)=2$.

Si ara haguéssim de determinar el rang de la matriu B de files $\mathbf{f}_1=(0\ \ 3\ \ 5)$, $\mathbf{f}_2=(2\ \ 7\ \ 4)$ i $\mathbf{f}_3=(1\ \ 8\ \ 6)$, podías permutar abans l'ordre, i la nova matriu $B=(\mathbf{f}_3\ \ \mathbf{f}_2\ \ \mathbf{f}_1)'$quedaria del mateix rang. Comprova com a exercici que aquest rang és igual a 3.

Si volem fer ràpidament el mètode de Gauss, podem emprar un algorisme (tècnica de càlcul) anomenat *regla del pivot*, que consisteix a fer sempre i metòdicament les mateixes operacions:

PRIMER PAS. El terme *pivot* és el a_{11}, si $a_{11}\neq 0$. Deixarem la 1ª fila igual i posarem zeros a tots els termes sota el pivot. Després, prescindint de la 1ª fila i 1ª columna, per a cada terme a_{ij} ens imaginarem com un quadrat o matriu de vèrtexs el pivot a_{11}, aquest terme a_{ij} i els a_{i1} i a_{1j}. Farem el producte dels elements de la diagonal principal menys els de la secundària, $a_{11}.a_{ij}-a_{i1}.a_{1j}$, i el resultat b_{ij} el substituirem per a_{ij}.

SEGON PAS. El nou terme pivot és b_{22}. Deixarem la segona fila igual i posarem zeros a totes els termes sota el pivot. Per el terme b_{ij} considerarem el quadrat b_{22}, b_{ij}, b_{i2} i b_{2j}, farem el producte $c_{ij}=b_{22}.b_{ij}-b_{i2}.b_{2j}$, i el substituirem per b_{ij}.

Ho continuarem fent de la mateixa manera fins que la matriu ens quedi escalonada. Evidentment, el rang serà el nombre de files diferents de la fila nul.la.

Exemple 14. Trobem ara el rang de la matriu anterior A pel mètode de Gauss, però fent servir la regla del pivot.

$$A=\left(\begin{array}{c|ccc} \boxed{2} & 3 & -1 & 0 \\ \hline 3 & 8 & 2 & -7 \\ 5 & 4 & -6 & 7 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{c|ccc} 2 & 3 & -1 & 0 \\ \hline 0 & \boxed{7} & 7 & -14 \\ 0 & -7 & -7 & 14 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & -14 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Veiem. com abans, que el rang de la matriu és $\rho(A)=2$.

1.2 OPERACIONS AMB MATRIUS

1.2.1 TRANSPOSICIÓ DE MATRIUS. La *transposició matricial* és una operació monaria que converteix les files en columnes, i viceversa. Donada la matriu A, simbolitzarem la seva *matriu transposada* com a A'. Evidentment, si ord(A)=m×n tenim ord(A')=n×m, i si la matriu A és quadrada, la seva transposada la podrem trobar fent una simetria respecte a la diagonal principal. Clarament, es veu que es compleix la *propietat* d'idempotència: (A')'=A.

Exemple 15. Donades les matrius següents

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ -3 & 4 & -7 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & 9 & 8 \\ -6 & 1 & 3 & -7 \\ 2 & 5 & -4 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad C=\begin{pmatrix} 3 & -6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

les seves matrius transposades són

$$A'=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \\ 6 & -7 \end{pmatrix},\quad B'=\begin{pmatrix} 7 & -1 & -6 & 2 \\ -2 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 9 & 3 & -4 \\ -3 & 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad C'=\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Observem que la primera fila l'hem convertida en la primera columna, la segona fila en la segona columna, etc.

1.2.2 SUMA DE MATRIUS. Partim de dues matrius A i B del mateix ordre, m×n. Definim en primer lloc la *igualtat de matrius*, A=B, dient que dues matrius són iguals si i només si els seus *termes corresponents* (de la mateixa fila i la mateixa columna) són iguals.

Pel que fa a l'operació de *suma de matrius* la definim de manera natural fent que la *matriu suma*, A+B, sigui aquella on cada terme és la suma dels termes corresponents d'amdues matrius.

Exemple 16. Les matrius A i B de l'exemple anterior no es poden sumar, perquè no són del mateix ordre. Agafem les noves matrius

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 & 9 \\ 2 & 3 & -7 & 8 \\ -6 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 7 \\ 2 & 0 & 8 & -5 \\ -4 & -2 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Trobem ara la matriu suma A+B,

$$A+B=\begin{pmatrix} 5+3 & -1+5 & 4+(-1) & 9+7 \\ 2+2 & 3+0 & -7+8 & 8+(-5) \\ -6+(-4) & 0+(-2) & 1+9 & -4+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 & 16 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \\ -10 & -2 & 10 & -3 \end{pmatrix}$$

Si tenim en compte la *matriu nul·la* (O), definida com a aquella que té tots els seus termes nuls, i l'anomenada *matriu oposada* (-A), que té com a termes els oposats de la matriu donada, veurem que l'operació de suma de matrius té les *propietats* següents:

Operació interna o clausura (la suma de matrius del mateix ordre és també del mateix ordre), associativa (per a la suma de tres matrius és indiferent la manera com s'agrupen els parèntesis), commutativa (l'ordre de les matrius sumands no altera la matriu suma), xxistència d'element neutre (O) i existència d'element oposat (-A).

Conseqüentment, l'estructura ($M_{m\times n}$, +) formada pel conjunt de les matrius del mateix ordre amb l'operació de suma és un *grup abelià.* A més, tenim la propietat de transposició (la transposada de la suma és igual a la suma de les transposades).

Finalment, podem definir l'operació de *diferència de matrius*, on la matriu diferència s'obté sumant a la matriu A l'oposada de la matriu B, A-B=A+(-B).

Exemple 17. Si fem la diferència de les dues matrius anteriors, obtenim

$$A-B=\begin{pmatrix} 5-3 & -1-5 & 4-(-1) & 9-7 \\ 2-2 & 3-0 & -7-8 & 8-(-5) \\ -6-(-4) & 0-(-2) & 1-9 & -4-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -6 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & -15 & 13 \\ -2 & 2 & -8 & -5 \end{pmatrix}$$

1.2.3 PRODUCTE D'UN NÚMERO PER UNA MATRIU. Es defineix el *producte d'un número per una matriu* com l'operació que consisteix a obtenir una nova matriu, resultat de multiplicar el número per cadascun dels termes de la matriu original.

La matriu resultant serà α.A, on α és el número, també anomenat *escalar.* Aquesta operació verifica les següents *propietats*, que es poden veure esquematitzades a l'apartat de Formulació matemàtica.

Operació externa (el producte d'un número per una matriu és una altra matriu), associativitat i distributivitat escalar, distributivitat matricial, element unitat (el nombre 1) i transposició (la transposada del producte d'un número per una matriu es igual al número per la transposada de la matriu).

Exemple 18. Si el número o escalar és α=2 i la matriu A és l'anterior, el seu producte serà la matriu:

$$2.A=\begin{pmatrix} 2.5 & 2.(-1) & 2.4 & 2.9 \\ 2.2 & 2.3 & 2.(-7) & 2.8 \\ 2.(-6) & 2.0 & 2.1 & 2.(-4) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & -2 & 8 & 18 \\ 4 & 6 & -14 & 16 \\ -12 & 0 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

1.2.4 PRODUCTE DE MATRIUS. Diem a priori que no sempre es pot fer el *producte de matrius.*, ja que perquè $A_{m\times n}$ i $B_{p\times q}$ siguin dues *matrius multiplicables* és necessari que es compleixi la *propietat de conformitat*: «El nombre de columnes de la primera matriu ha de ser igual al nombre de files de la segona». És a dir, s'ha de complir n=p.

La *matriu producte* A•B resultant té igual nombre de files que la primera i igual nombre de columnes que la segona. Així $(A\bullet B)_{m\times q}$.

Exemple 19. Les matrius A i B dels últims exemples $A_{3\times 4}$ i $B_{3\times 4}$, que es podien sumar perquè tenien el mateix ordre, ara no es poden multiplicar, perquè no compleixen la propietat de conformitat. Observem que posant els ordres seguits, (3×4)•(3×4), no coincideixen els nombres del mig, 4≠3.

Sí que es podran multiplicar, en canvi, dues noves matrius A i B d'ordres, ord(A)=3×4 i ord(B)=4×2. Notem que són iguals els nombres centrals (=4). La matriu resultant A•B tindrà per ordre ord(A•B)=3×2. Fixem-nos que tampoc no es podrà calcular B•A, perquè 2≠3.

Suposem ara dues matrius multiplicables $A_{m \times n}$ i $B_{n \times p}$. Per obtenir la matriu resultant $(A \bullet B)_{m \times p}$, no multiplicarem els termes correlatius de la matriu (com que no són equidimensionals, hi hauria termes que no quedarien aparellats), sinó que ens fixarem en les files de la primera matriu i en les columnes de la segona.

Exemple 20. Si volem multiplicar les matrius $A_{3\times4}$ i $B_{4\times2}$ següents les posarem una a continuació de l'altra en requadres:

$$A \bullet B = \begin{pmatrix} \boxed{3\ -1\ 0\ 8} \\ \boxed{-4\ 2\ 1\ -7} \\ \boxed{5\ 0\ -6\ 9} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 4 \\ -9 \\ 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -3 \\ 5 \\ 7 \\ 6 \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{c_{11}} & \boxed{c_{12}} \\ \boxed{c_{21}} & \boxed{c_{22}} \\ \boxed{c_{31}} & \boxed{c_{32}} \end{pmatrix}$$

També hem escrit la matriu resultant $(A \bullet B)_{3\times2}$, i els termes respectius.

Tot seguit calcularem els termes c_{ij} que resulten de sumar els productes dels termes de la fila $\mathbf{f}_i$ de la primera matriu amb els seus termes corresponents de la columna $\mathbf{c}_j$ de la segona matriu: primer pel primer, més segon pel segon, més... És a dir, es tindrem

$$c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + \ldots + a_{in}.b_{nj}$$

Exemple 21. Fem el producte de les dues matrius anteriors

$$A \bullet B = \begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{-1} & \boxed{0}\boxed{8} \\ -4 & 2 & 1\ \ 7 \\ 5 & 0 & -6\ \ 9 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \boxed{2} & -3 \\ \boxed{4} & 5 \\ \boxed{-9} & 7 \\ \boxed{1} & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{6-4+0+8} & -9-5+0+48 \\ -8+8-9+7 & 12+10+7+42 \\ 10+0+54+9 & -15+0-42+54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{10} & 34 \\ -2 & 71 \\ 73 & -3 \end{pmatrix}$$

Així, doncs, podríem suposar la primera matriu com una matriu de files $A=(\mathbf{f}_1\ \ \mathbf{f}_2 \ldots \mathbf{f}_m)'$ i la segona com una de columnes $B=(\mathbf{c}_1\ \ \mathbf{c}_2 \ldots \mathbf{c}_p)$, i després definir el que s'anomena *producte escalar d'una fila per una columna* i que és definit per la fórmula anterior

$$\mathbf{f}_i \bullet \mathbf{c}_j = c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + \ldots + a_{in}.b_{nj}$$

Entre les *propietats* del producte de matrius, que es poden veure a l'apartat de Formulació, destaquem l'associativa i la distributivitat respecte a la suma. Observem que, en general, el producte de matrius *no* és *commutatiu*. Per tant, per distingir si una matriu és en primer o segon lloc, al producte $A \bullet B$ podem dir que la A *premultiplica* la B, o també que la B *postmultiplica* la A.

Exemple 22. Per a les matrius $A_{3\times4}$ i $B_{4\times2}$ anteriors ja hem trobat el producte $(A \bullet B)_{3\times2}$ però, com ja hem dit, no existeix $B \bullet A$. Per tant, $A \bullet B \neq B \bullet A$.

Si premultipliquem la matriu A per la seva transposada A' tindrem

$$A' \bullet A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -6 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 8 \\ -4 & 2 & 1 & 7 \\ 5 & 0 & -6 & 9 \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} 50 & -11 & -34 & 41 \\ -11 & 5 & 2 & 6 \\ -34 & 2 & 37 & -47 \\ 41 & 6 & -47 & 194 \end{pmatrix}$$

Però, en canvi, si postmultipliquem A per A' ens donarà un resultat ben diferent

$$A\bullet A'=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0 & 8\\ -4 & 2 & 1 & 7\\ 5 & 0 & -6 & 9\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -6\\ 8 & 7 & 9\end{pmatrix}=\ldots=\begin{pmatrix}74 & 42 & 87\\ 42 & 70 & 37\\ 87 & 37 & 142\end{pmatrix}$$

Direm finalment que entre les propietats de les matrius hi ha la de transposició (la transposada d'un producte de matrius és igual al producte de les transposades canviades d'ordre).

Exemple 23. S'haurà de verificar, per tant, la igualtat $(A\bullet B)'=B'\bullet A'$. Comprovem-ho per a les matrius A i B que fem servir d'exemple:

$$B'\bullet A'=\begin{pmatrix}2 & 4 & -9 & 1\\ -3 & 5 & 7 & 6\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -6\\ 8 & 7 & 9\end{pmatrix}=\ldots=\begin{pmatrix}10 & -2 & 73\\ 34 & 71 & -3\end{pmatrix}$$

que resulta ser precisament la matriu $(A\bullet B)'$, és a dir, la transposada de la matriu $A\bullet B$ calculada a l'exemple 21.

1.2.5 PRODUCTE DE MATRIUS QUADRADES. Centrem-nos ara en el cas particular de matrius quadrades d'ordre n (en realitat hauriem de dir d'ordre n×n). Entre totes elles, que pertanyen al conjunt M_n, trobem la *matriu unitat*, una matriu simbolitzada per I, formada per uns a la diagonal principal i per zeros a la resta de termes.

Com que es tracta de matrius quadrades, trobem *altres propietats*, com la d'operació interna (el producte de matrius quadrades d'un cert ordre és una altra matriu quadrada del mateix ordre) i element unitat (la matriu I). En conseqüència, podem afirmar que la terna $(M_n, +, \bullet)$ té l'estructura d'*anell no commutatiu amb element unitat.*

Notem que pot ser que hi hagi dues matrius A i B de manera que $A\bullet B=B\bullet A$. En aquest cas direm que són *matrius commutables.*

Exemple 24. Comprovem que són commutables les dues matrius quadrades de segon ordre

$$A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix} \text{ i } B=\begin{pmatrix}7 & 6\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

Multiplicant ens donarà

$$A\bullet B=\begin{pmatrix}5 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}7 & 6\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}35-6 & 30+3\\ -7-4 & -6+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}29 & 33\\ -11 & -4\end{pmatrix}$$

$$B\bullet A=\begin{pmatrix}7 & 6\\ -2 & 1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}5 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}35-6 & 21+12\\ -10-1 & -6+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}29 & 33\\ -11 & -4\end{pmatrix}$$

Veiem que ens resulta la mateixa matriu i, per tant, $A\bullet B=B\bullet A$.

Si el producte de dues matrius commutables A i B ens dóna la matriu unitat, llavors direm que una és la *matriu inversa* de l'altra. Així B serà la inversa de A i la simbolitzarem per A^{-1}. Evidentment, passarà que $A\bullet A^{-1}=A^{-1}\bullet A=I$.

No totes les matrius quadrades tenen inversa, però si una matriu en té se'n diu *matriu regular*. En cas contrari, es a dir, si no existeix la seva inversa, es diu *matriu singular*.

Exemple 25. Observem que les dues matrius següents

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad i \quad B=\begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

són inverses, perquè multiplicant s'obté

$$A\bullet B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\ldots=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

També ens donaria $B\bullet A=I$. Així, B és la inversa de A i escrivim $B=A^{-1}$.

A causa de la introducció de la matriu inversa trobem *noves propietats* com la de *regularitat* (si una matriu és regular el seu rang coincideix amb l'ordre de la matriu), *inversa d'un producte* (és igual al producte de les inverses canviades d'ordre) i *transposició* (la transposada de la inversa és igual a la inversa de la transposada)

En el producte de matrius ens trobem amb l'existència de *matrius divisors de zero*, és a dir, matrius diferents de la matriu nul·la que multiplicades donen com a resultat aquesta matriu nul·la.

Exemple 26. Siguin les dues noves matrius A i B que, evidentment, són diferents de la matriu nul·la (O),

$$A=\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} \quad i \quad B=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$$

si fem el seu producte ens donarà

$$A\bullet B=\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}=\ldots=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$$

Resultat que ens indica que A i B són matrius divisors de zero.

1.2.6 CÀLCUL DE LA MATRIU INVERSA. Ja sabem que una matriu regular A és aquella matriu quadrada que té inversa. Però com es calcula? Expliquem a continuació *diferents mètodes* per a l'obtenció de A^{-1}. El primer d'ells és el *mètode del sistema d'equacions*.

Suposem com a cas particular una matriu A de tercer ordre. La seva inversa A^{-1} i la matriu unitat I també són de tercer ordre

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A^{-1}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \quad i \quad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les matrius inversa i unitat les podrem considerar com els conjunts de files

$$A^{-1}=(\mathbf{x}_1 \ \ \mathbf{x}_2 \ \ \mathbf{x}_3)' \quad i \quad I=(\mathbf{e}_1 \ \ \mathbf{e}_2 \ \ \mathbf{e}_3)'$$

on $\mathbf{x}_1=(x_{11} \ \ x_{12} \ \ x_{13})$, $\mathbf{x}_2=(x_{21} \ \ x_{22} \ \ x_{23})$ i $\mathbf{x}_3=(x_{31} \ \ x_{32} \ \ x_{33})$, i també $\mathbf{e}_1=(1 \ \ 0 \ \ 0)$, $\mathbf{e}_2=(0 \ \ 1 \ \ 0)$ i $\mathbf{e}_3=(0 \ \ 0 \ \ 1)$. D'aquesta manera, el producte matricial $A\bullet A^{-1}=I$ es transformarà en

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$$

Si multipliquem les dues primeres matrius i igualem, obtindrem un sistema de tres equacions amb tres incògnites:

$$\begin{cases} a_{11}.x_1+a_{12}.x_2+a_{13}.x_3=\mathbf{e}_1 \\ a_{21}.x_1+a_{22}.x_2+a_{23}.x_3=\mathbf{e}_2 \\ a_{31}.x_1+a_{32}.x_2+a_{33}.x_3=\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

El podem resoldre pel mètode clàssic de substitució (aïllant una incògnita en una equació i substituint-la en les altres dues) o bé pel mètode de reducció de Gauss (semblant al mètode d'obtenció de la matriu escalonada).

Exemple 27. Trobem per sistema d'equacions la inversa de la matriu A de l'exemple 25. Tindrem

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} -x_2+2.x_3=\mathbf{e}_1 \\ -x_1+3.x_2-3.x_3=\mathbf{e}_2 \\ 2.x_1-3.x_2+x_3=\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

si multipliquem la segona equació per dos i la sumem amb la tercera, ens quedarà l'equació

$$3.x_2-5.x_3=2.\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3$$

Multiplicant la primera per 3 i sumant-la amb l'anterior ens quedarà

$$x_3=3.\mathbf{e}_1+2.\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3=3.(1\ \ 0\ \ 0)+2.(0\ \ 1\ \ 0)+(0\ \ 0\ \ 1)=(3\ \ 2\ \ 1)$$

Substituint en la primera, $x_2=2.x_3-\mathbf{e}_1=2.(3\ \ 2\ \ 1)-(1\ \ 0\ \ 0)=(5\ \ 4\ \ 2)$

Substituint en la segona del primer sistema

$$x_1=3.x_2-3.x_3-\mathbf{e}_2=3.(5\ \ 4\ \ 2)-3.(3\ \ 2\ \ 1)-(0\ \ 1\ \ 0)=(6\ \ 5\ \ 3)$$

D'aquesta manera, la matriu inversa serà $A^{-1}=(\mathbf{e}_1\ \ \mathbf{e}_2\ \ \mathbf{e}_3)'$, és a dir

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Una altra manera de calcular A^{-1} és el *mètode de Gauss-Jordan*. Consisteix a emprar la *matriu conjunta* M, una matriu formada per la matriu donada, seguida de la matriu unitat, M=[A|I]. Es fan una sèrie d'operacions elementals de manera que la matriu donada es transformi en la matriu unitat, i queda una nova matriu conjunta equivalent a l'anterior, M=[I|E]. Es demostra que la matriu E és precisament la inversa que busquem, $E=A^{-1}$.

Expliquem a continuació, a partir d'un exemple numèric, els passos que s'han de seguir en el mètode de Gauss-Jordan.

Exemple 28. Volem trobar per Gauss-Jordan la inversa A^{-1} de la matriu dels exemples anteriors. La matriu conjunta M és M=[A|I], però com que $a_{11}=0$ i no és possible transformar-se en un 1, podem fer, per exemple, la combinació lineal $\mathbf{g}_1=\mathbf{f}_1-\mathbf{f}_2$.

$$M=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 5 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Deixem la primera fila igual i transformem en zeros els termes de la primera columna de les altres files, fent $\mathbf{g}_2=\mathbf{f}_2+\mathbf{f}_1$ i $\mathbf{g}_3=\mathbf{f}_3-2.\mathbf{f}_1$. Després procedirem de manera similar, però en la segona fila, que quedarà igual i anul·larem els termes de la segona columna de les altres files amb les combinacions lineals $\mathbf{g}_1=\mathbf{f}_1-4.\mathbf{f}_2$ i $\mathbf{g}_3=\mathbf{f}_3+5.\mathbf{f}_2$.

$$M\equiv\left[\begin{array}{c|c} \boxed{1\ \ -4\ \ 5} & \boxed{1\ \ -1\ \ 0} \\ 0\ \ -1\ \ 2 & 1\ \ 0\ \ 0 \\ 0\ \ 5\ \ -9 & -2\ \ 2\ \ 1 \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{c|c} 1\ \ 0\ \ -3 & -3\ \ -1\ \ 0 \\ \boxed{0\ \ -1\ \ 2} & \boxed{1\ \ 0\ \ 0} \\ 0\ \ 0\ \ 1 & 3\ \ 2\ \ 1 \end{array}\right]$$

Ara serà la tercera fila que no canviarà i farem que s'anul·lin els termes de la tercera columna de les dues primeres files, per mitjà de les combinacions lineals $g_1=f_1+3.f_3$ i $g_2=f_2-2.f_3$. Finalment,, transformarem els termes de la diagonal en uns i, en aquest cas, per aconseguir-ho només haurem de fer $g_2=f_2/(-1)$,

$$M\equiv\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -5 & -4 & -2 \\ \boxed{0\ 0\ 1} & & & \boxed{3\ 2\ 1} & & \end{array}\right]\equiv\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

La matriu que queda a continuació de la matriu unitat és la matriu inversa. Com veiem coincideix amb la que hem trobat anteriorment.

Estudiem una altra tècnica per trobar la inversa A^{-1} d'una matriu, definint prèviament alguns conceptes. Comencem per la *potència d'una matriu quadrada*, A^n, que significa el resultat que s'obté en multiplicar la matriu A per ella mateixa n vegades. Com a casos particulars, podem posar $A^2=A\bullet A$, $A^3=A^2\bullet A$, $A^4=A^2\bullet A^2$, etc.

Donat un polinomi d'indeterminada x, p(x), de grau n i de coeficients reals,

$$p(x)=x^n + \alpha_1.x^{n-1} + \alpha_2.x^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1}.x + \alpha_n$$

s'anomena *polinomi matricial* la matriu p(A) obtinguda substituint al polinomi anterior la indeterminada x per la matriu A. Observem que hem de posar la matriu unitat I al terme independent, i així tots els sumands són matrius,

$$p(A)=A^n + \alpha_1.A^{n-1} + \alpha_2.A^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1}.A + \alpha_n.I$$

Direm que un polinomi matricial és un *polinomi anul·lador per a una matriu* A, quan després de determinar p(A) obtenim la matriu nul·la, és a dir, si p(A)=O. (Més endavant, al llibre d'Àlgebra vectorial, veurem la importància dels polinomis anul·ladors).

Un altre procediment per a calcular la inversa A^{-1} és el *mètode del polinomi anul·lador*. Si coneixem el polinomi anul·lador de A, tenim

$$A^n + \alpha_1.A^{n-1} + \alpha_2.A^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1}.A + \alpha_n.I = O$$

Si passem l'últim sumand al segon membre, traiem la A de factor comú al primer membre i multipliquem cada membre per la matriu desconeguda A^{-1}, podrem determinar la inversa A^{-1} a partir de l'equació resultant.

Exemple 29. Volem trobar la matriu inversa A^{-1} de la matriu A dels exemples anteriors, sabent que $p(x)=x^3-4.x^2-11.x+1$ és un polinomi anul·lador per a la matriu A. Per tant, $A^3-4.A^2-11.A+1.I=0$.

D'aquí resulta $A^3-4.A^2-11.A=-I$, $A.(A^2-4.A-11.I)=-I$. Multiplicant per A^{-1} cada costat, $A^2-4.A-11.I=-A^{-1}$, d'on $A^{-1}= -A^2+4.A+11.I$. Trobem primer A^2

$$A^2= A\bullet A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}=\ldots=\begin{pmatrix} 5 & -9 & 5 \\ -9 & 19 & -14 \\ 5 & -14 & 14 \end{pmatrix}$$

Substituint en $A^{-1}= -A^2+4.A+11.I$ obtenim la matriu inversa

$$A^{-1}=-\begin{pmatrix} 5 & -9 & 5 \\ -9 & 19 & -14 \\ 5 & -14 & 14 \end{pmatrix}+4.\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}+11.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2.7 PARTICIÓ DE MATRIUS. Per acabar aquesta sèrie de mètodes relatius al càlcul de la matriu inversa, comentem a continuació superficialment la tècnica de partició de matrius, molt emprada en els càlculs en problemes econòmics, però ja en desús degut a causa de la introducció dels ordinadors que permeten calcular inverses de matrius d'ordres molt elevats.

Donada una matriu $A_{m\times n}$, anomenem *submatriu* (o *caixa*) un subconjunt S de termes de la matriu format per p files i q columnes, $S_{p\times q}$. Si separem, per exemple, els elements de la matriu original A per una línia vertical i una altra d'horitzontal, haurem fet el que s'anomena *partició d'una matriu*, que en aquest cas haurà quedat subdividida en quatre submatrius, que podrem designar per A_{11}, A_{12}, A_{21} i A_{22}.

Exemple 30. Podem particionar les matrius A i B de l'exemple 25 de maneres diferents. Una d'elles seria

$$A=\left(\begin{array}{cc:c} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -3 \\ \hdashline 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \quad \text{i} \quad B=\left(\begin{array}{c:cc} 6 & 5 & 3 \\ \hdashline 5 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

on tindríem les submatrius o caixes

$$A_{11}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\ A_{12}=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix},\ A_{21}=(2\ \ -3)\ \text{i}\ A_{22}=(1)$$

$$B_{11}=(6),\ B_{12}=(5\ \ 3),\ B_{21}=\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}\ \text{i}\ B_{22}=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Per a la *suma de matrius particionades* és necessari que totes les submatrius corresponents siguin equidimensionals. Així, doncs, no es poden sumar les matrius de l'exemple anterior. Quant al *producte d'un número real per una matriu particionada*, es realitza multiplicant el número per tots els termes de les submatrius.

Si volem obtenir el *producte de dues matrius particionades*, és necessari que totes les submatrius implicades siguin multiplicables i hauran de complir el principi de conformitat, on el nombre de columnes de la primera és igual al nombre de files de la segona.

Exemple 31. Fem primer la suma A+B particionant les matrius de la mateixa manera

$$A+B=\left(\begin{array}{cc:c} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -3 \\ \hdashline 2 & -3 & 1 \end{array}\right)+\left(\begin{array}{cc:c} 6 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \\ \hdashline 3 & 2 & 1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc:c} 6 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & -1 \\ \hdashline 5 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

I ara el producte de matrius

$$A\bullet B=\left(\begin{array}{c:c} A_{11} & A_{12} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)\bullet\left(\begin{array}{c:c} B_{11} & B_{12} \\ \hdashline B_{21} & B_{22} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c:c} C_{11} & C_{12} \\ \hdashline C_{21} & C_{22} \end{array}\right)$$

on tenim

$$C_{11}=A_{11}\bullet B_{11}+A_{12}\bullet B_{21}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\bullet(3\ \ 2)=\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fent el mateix amb els altres productes tindrem $C_{12}=(0\ \ 0)'$, $C_{21}=(0\ \ 0)$ i $C_{22}=(1)$, de manera que el producte A•B resulta ser la matriu unitat I, perquè B és la inversa de A.

Veiem com es troba la *matriu inversa per submatrius*. Ho fem de manera similar a l'exemple anterior i, per a facilitar-ho, considerarem la matriu donada A subdividida en quatre submatrius que designem amb M, N, P i Q, mentre que la matriu desconeguda $B=A^{-1}$ tindrà per submatrius incògnites X, Y, Z i U. El seu producte ha de ser la matriu unitat I_3 particionada en les submatrius que, en aquest cas, són I_2, $O_{2\times1}$, $O_{1\times2}$ i I_1. Tindrem, abreujadament,

$$A\bullet A^{-1}=\begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & U \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} M\bullet X+N\bullet Z & M\bullet Y+N\bullet U \\ P\bullet X+Q\bullet Z & P\bullet Y+Q\bullet U \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix}$$

Igualant, ens quedean els dos sistemes d'equacions matricials:

$$\text{(I)}\ \begin{cases} M\bullet X+N\bullet Z=I \\ P\bullet X+Q\bullet Z=O \end{cases} \quad \text{i} \quad \text{(II)}\ \begin{cases} M\bullet Y+N\bullet U=O \\ P\bullet Y+Q\bullet U=I \end{cases}$$

Podem trobar, per exemple, en primer lloc Q^{-1} i aïllar Z a la segona equació de (I). Substituint a la primera trobarem X i a continuació Z. Després, al sistema (II) aïllem U en la segona equació, determinem Y a la primera equació i, finalment, trobem U. Així, coneixent X, Y, Z i U, obtenim la inversa A^{-1} de la matriu donada.

Exemple 32. Calculem per partició de matrius la inversa de la matriu A de l'exemple anterior

$$A=\begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix} \text{ on } M=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ i } Q=(1)$$

PRIMER SISTEMA. Trivialment, $Q^{-1}=(1)$ i així de $P\bullet X+Q\bullet Z=O$ tenim $P\bullet X+Z=O$ i $Z=-P\bullet X$. Substituint en $M\bullet X+N\bullet(-P\bullet X)=I$, $(M-N\bullet P)\bullet X=I$ i, per tant, $X=(M-N\bullet P)^{-1}$, on

$$M-N\bullet P=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$$

La submatriu X és precisament la inversa d'aquesta matriu (trobeu-la com a exercici) i després trobeu Z substituint-la en $Z=-P\bullet X$. Ha de donar

$$X=\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \text{ i } Z=\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}$$

SEGON SISTEMA. De $P\bullet Y+Q\bullet U=I$, $P\bullet Y+U=I$, $U=I-P\bullet Y$. Substituint en la primera equació tindrem $M\bullet Y+N\bullet(I-P\bullet Y)=O$, $M\bullet I+N-N\bullet P\bullet Y=O$, traient factor comú $(M-N\bullet P)\bullet Y=-N$, $Y=-(M-N\bullet P)^{-1}\bullet N$, $Y=-X\bullet N$.

Si substituïm podrem trobar Y i després, amb la segona equació, podrem calcular U. Ha de donar

$$Y=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ i } U=(1)$$

Així, doncs, la matriu inversa serà

$$A^{-1}=\left(\begin{array}{cc:c} 6 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \\ \hdashline 3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Novament torna a coincidir amb totes les inverses calculades.

Observem que el mètode per calcular la inversa per submatrius és relativament complicat i no el farem servir en la pràctica, si bé resulta interessant quan s'han de realitzar els càlculs manualment amb matrius d'ordres elevats.

1.3 TIPUS DE MATRIUS QUADRADES

1.3.1 MATRIUS TRIANGULARS. Una matriu quadrada A s'anomena *matriu triangular* si són nuls tots els termes que estan per sota o per sobre de la diagonal principal. Si els termes nuls estan per sota de la diagonal principal, en direm *matriu triangular superior*, ja que la part ni nu·la de la matriu forma un triangle a la part superior. En cas contrari, si els termes nuls estan per sobre, en direm *matriu triangular inferior*.

Si una matriu és alhora triangular superior i inferior, en direm *matriu diagonal*, perquè, lògicament, tots els termes fora d'ella seran nuls. En el cas particular de que tots els termes d'una matriu diagonal siguin iguals, es pot treure factor comú fora de la matriu, que quedarà reduïda a un escalar que multiplica a la matriu unitat. D'aquest últim tipus de matriu en direm *matriu escalar*.

Exemple 33. Posem exemples de les matrius explicades: matriu triangular superior (A), inferior (B), diagonal (C) i escalar (D),

$$A=\begin{pmatrix}1&9&-3\\0&-5&2\\0&0&7\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}8&0&0\\-3&4&0\\9&6&-5\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-5&0&0\\0&3&0\\0&0&-8\end{pmatrix}\ \text{i}\ D=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}=4.I$$

1.3.2 MATRIUS SIMÈTRIQUES. Una matriu quadrada $A=(a_{ij})$ s'anomena *matriu simètrica*, S, si permutant els índexs de files i de columnes de qualsevol terme, aquest queda invariant, és a dir, $a_{ij}=a_{ji}$. En altres paraules, una matriu és simètrica si els seus termes són simètrics respecte a la diagonal principal.

D'altra banda, una *matriu antisimètrica*, T, és aquella en la qual permutant els índexs obtenim l'oposat del terme, $a_{ij}=-a_{ji}$. Observem que si els dos índexs són iguals, la igualtat anterior ens indica que els termes a_{ii} han de ser nuls. Resumint, en una matriu antisimètrica els termes de la diagonal principal, que són nuls, divideixen la matriu en dues parts de forma triangular que tenen els termes oposats.

Exemple 34. Posem dos exemples d'aquest tipus de matrius

$$S=\begin{pmatrix}2&5&-7\\5&9&3\\-7&3&-6\end{pmatrix}\ \text{i}\ T=\begin{pmatrix}0&4&2\\-4&0&-3\\-2&3&0\end{pmatrix}$$

Entre les *propietats* d'aquestes matrius exposem:

Simetria (la transposada d'una matriu simètrica és igual a ella mateixa, A'=A)

Antisimetria (la transposada d'una matriu antisimètrica és igual a la seva oposada, A'=-A)

Semisuma (la matriu semisuma d'una matriu amb la seva transposada és una matriu simètrica, (A+A')/2=S)

Semidiferència (la semidiferència d'una matriu amb la seva transposada és una matriu antisimètrica, (A-A')/2=T).

1.3.3 MATRIUS DE QUADRATS ESPECIALS. Una matriu A es diu que és una *matriu involutiva* si el seu quadrat és igual a la matriu unitat, si $A^2=I$ o també $A•A=I$. De la primera es desprèn com a propietat que $A^{2k}=I$, on k és un nombre natural qualsevol, i de la segona deduïm que $A^{-1}=A$ (la inversa d'una matriu involutiva és ella mateixa).

En general, diem que A és una *matriu involutiva d'índex m* si es verifica que $A^2\neq I$, $A^3\neq I$, ..., $A^{m-1}\neq I$, però $A^m=I$ o, en altres paraules, m és el nombre natural més petit de manera que la potència emèsima de la matriu A és igual a la matriu unitat.

Exemple 35. Comprovem que de les matrius següents

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \quad i \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

la primera és involutiva

$$A^2=A•A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}•\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

mentre que la segona és involutiva d'índex 3

$$B^2=B•B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}•\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\neq I$$

$$B^3=B^2•B=\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}•\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

Relacionada, quant a forma, amb la matriu involutiva, tenim el concepte de *matriu ortogonal*, que és aquella matriu que verifica la igualtat $A•A'=I$. Per tant, una matriu és ortogonal si el producte amb la seva transposada ens dóna la matriu unitat. Com a propietat deduïm que $A^{-1}=A'$, és a dir que la seva inversa és igual a la seva transposada, propietat que té molta importància en l'estudi de l'Àlgebra Vectorial.

Exemple 36. Donada la matriu A de termes reals $a_{11}=0'96$, $a_{12}=0'28$, $a_{21}=-0'28$ i $a_{22}=0'96$, comprovem que és ortogonal.

$$A•A'=\begin{pmatrix} 0'96 & 0'28 \\ -0'28 & 0'96 \end{pmatrix}•\begin{pmatrix} 0'96 & -0'28 \\ 0'28 & 0'96 \end{pmatrix}=...=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

Una matriu s'anomena *matriu idempotent* si el seu quadrat és igual a la mateixa matriu, $A^2=A$. D'aquí deduïm com a propietat que sempre $A^k=A$, on k és qualsevol nombre natural; per això totes les matrius idempotents tenen "la mateixa potència".

Generalitzant aquest concepte definim la *matriu periòdica de període p* com aquella matriu A de manera que $A^2\neq A$, $A^3\neq A$,..., $A^{p-1}\neq A$, però $A^p=A$. Per tant, el període p és el mínim valor de manera que la potència d'exponent p de la matriu A és ella mateixa.

Exemple 37. Comprovem que per a les matrius següents la A és idempotent i la B és periòdica de període 4

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad i \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}•\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=A \qquad B^2=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}•\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}\neq B$$

$$B^3=\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}•\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\neq B \qquad B^4=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}•\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}=B$$

Observem que si una matriu és periòdica de període 4, també serà involutiva d'índex 3.

Direm que A és una *matriu nilpotent* si el seu quadrat és igual a la matriu nul·la, $A^2=O$. És clar que totes les potències posteriors també seran nul·les, $A^k=O$, $k\geq 2$.

En general, anomenarem *matriu nilpotent d'índex m* la matriu A en què $A^2\neq O$, $A^3\neq O$, ..., $A^{m-1}\neq O$, però $A^m=O$. L'índex m serà, doncs, el mínim natural que faci la potència emèsima de la matriu donada igual a la matriu nul·la.

Exemple 38. Comprovem que la matriu A de files $\mathbf{f}_1=(6\ \ 4)$ i $\mathbf{f}_2=(-9\ \ -6)$ és una matriu nilpotent

$$A^2=A\bullet A=\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$$

Com a exercici, i per a una matriu genèrica A de segon ordre, pots provar que no existeixen matrius nilpotents d'índex superior a 2.

1.3.4 MATRIUS COMPLEXES. Anomenem *matriu complexa* a una matriu en què algun dels seus termes és un número complex que, recordem, és de la forma z=a+b.i, on a i b són reals i on la unitat imaginària és $i=\sqrt{-1}$.

Recordem també que el conjugat d'un complex, és el complex que s'obté en canviar de signe la part imaginària,

$$\text{Si } z=a+b.i \quad \text{llavors} \quad \bar{z}=a-b.i$$

Donada una matriu A, la seva *matriu conjugada*, $\bar{A}$, és la matriu que s'obté en substituir cada terme pel seu conjugat. Naturalment, en una *matriu real* la matriu conjugada és igual a ella mateixa, $\bar{A}=A$.

Com a generalització dels conceptes de les matrius simètriques i antisimètriques fet en l'estudi de matrius reals, la *matriu hermítica* és una matriu complexa en què la transposada de la conjugada és igual a ella mateixa, $\bar{A}'=A$. En canvi, una *matriu antihermítica* és la que compleix que la transposada de la conjugada és igual a la matriu oposada, $(\bar{A})'=-A$.

Exemple 39. De les dues matrius complexes

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3+4.i \\ 3-4.i & -5 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B=\begin{pmatrix} -6.i & 2+5.i \\ -2+5.i & 3.i \end{pmatrix}$$

comprovem que la A és hermítica,

$$(\bar{A})'=\begin{pmatrix} 2 & 3-4.i \\ 3+4.i & -5 \end{pmatrix}'=\begin{pmatrix} 2 & 3+4.i \\ 3-4.i & -5 \end{pmatrix}=A$$

i que la B és antihermítica,

$$(\bar{B})'=\begin{pmatrix} 6.i & 2-5.i \\ -2-5.i & -3.i \end{pmatrix}'=\begin{pmatrix} 6.i & -2-5.i \\ 2-5.i & -3.i \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} -6.i & 2+5.i \\ -2+5.i & 3.i \end{pmatrix}=-B$$

1.3.5 MATRIUS EQUIVALENTS. En el proper llibre d'Àlgebra Vectorial veurem que dues matrius A i B són *matrius equivalents* si existeixen dues matrius regulars P i Q que compleixen B=Q•A•P. Aquestes dues noves matrius reben el nom de *matrius de pas*.

Recordem que el concepte d'equivalència de matrius ja s'ha esmentat anteriorment, indicant que dues matrius són equivalents si es pot passar d'una a l'altra per mitjà d'operacions elementals. Doncs bé, es demostra que totes aquestes operacions elementals poden estar englobades en les dues matrius de pas i, així, les dues definicions es redueixen a una de sola.

Com a cas particular de l'equivalència, diem que A i B són dues *matrius semblants* si existeix una matriu de pas P, regular, de manera que $B=P^{-1}\bullet A\bullet P$. També diem que A i B són dues *matrius congruents* si existeix una matriu de pas P regular tal que $B=P'\bullet A\bullet P$.

Exemple 40 Siguin les matrius quadrades de segon ordre

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 16 & 25 \\ 7 & 11 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -95 & -151 \\ 56 & 89 \end{pmatrix} \text{ i } D=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 14 \end{pmatrix}$$

i les matrius de pas

$$P=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ i } Q=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Observem que A i B són equivalents, perquè

$$Q\bullet A\bullet P=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} -5 & -8 \\ 17 & 27 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 & 25 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}=B$$

Observem també que A i C són semblants. Per això hem de trobar primer la matriu inversa de P. Tenim

$$P^{-1}\bullet A\bullet P= P^{-1}\bullet(A\bullet P)=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} -5 & -8 \\ 17 & 27 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -95 & -151 \\ 56 & 89 \end{pmatrix}=C$$

Finalment, comprovem que A i D són congruents

$$P'\bullet A\bullet P= P'\bullet(A\bullet P)=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} -5 & -8 \\ 17 & 27 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 14 \end{pmatrix}=D$$

1.3.6 MATRIUS NO NEGATIVES. La no negativitat és una condició molt habitual en problemes d'empresa (per exemple, el preu d'un objecte és una magnitud no negativa) i per aquest motiu l'estudiarem. Diem que una matriu A és una *matriu no negativa* quan tots els seus termes són no negatius, $a_{ij}\geq 0$. Si, a més, no hi ha cap terme nul, es tracta d'una *matriu positiva*.

En Estadística ens trobem amb un tipus de matriu anomenada *matriu estocàstica*, que és una matriu no negativa i que, a més, la suma dels termes de cada fila és igual a la unitat. En Economía, si A és una matriu no negativa, té interès estudiar la *matriu de Leontiev*, simbolitzada per L, i que és igual a la matriu unitat menys la matriu donada, L=I-A. També és interessant trobar la seva inversa, L^{-1}, anomenada *matriu inversa de Leontiev*.

Exemple 41 Observem que la matriu no negativa següent és una matriu estocàstica, ja que la suma de les files és igual a la unitat,

$$A=\begin{pmatrix} 0'9 & 0'0 & 0'1 \\ 0'2 & 0'5 & 0'3 \\ 0'3 & 0'1 & 0'6 \end{pmatrix}$$

La seva matriu de Leontiev és

$$L=I-A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0'9 & 0'0 & 0'1 \\ 0'2 & 0'5 & 0'3 \\ 0'3 & 0'1 & 0'6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0'1 & -0'0 & -0'1 \\ -0'2 & 0'5 & -0'3 \\ -0'3 & -0'1 & 0'4 \end{pmatrix}$$

Es demostra que no existeix la matriu inversa de Leontiev d'una matriu estocàstica. (Comprova-ho amb l'exemple anterior i troba que el rang de L és 2).

Un tipus especial de matrius estocàstiques són les *matrius de permutació*, que tenen la propietat que multiplicades per una matriu donada, permeten permutar les files o les columnes. En el cas particular d'ordre 3, aquestes matrius tenen per files $\mathbf{e}_1=(1\ \ 0\ \ 0)$, $\mathbf{e}_2=(0\ \ 1\ \ 0)$ i $\mathbf{e}_3=(0\ \ 0\ \ 1)$ i se simbolitzen per P_{ijk}, indicant que la primera fila és $\mathbf{e}_i$, la segona $\mathbf{e}_j$ i la tercera $\mathbf{e}_k$. Entre les sis matrius de permutació possibles que existeixen en el cas d'ordre 3, tenim per exemple:

$$P_{123}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad P_{213}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad P_{312}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

Sigui $A=(\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2\ \mathbf{f}_3)'$ o bé $A=(\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2\ \mathbf{c}_3)$ una matriu que podem considerar com un conjunt de files o bé com un conjunt de columnes. La premultiplicació d'una matriu de permutació per una matriu donada permuta les files d'aquesta matriu:

$$P_{ijk}\bullet(\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2\ \mathbf{f}_3)'=(\mathbf{f}_i\ \mathbf{f}_j\ \mathbf{f}_k)'$$

D'altra banda, la postmultiplicació de la transposada d'una matriu de permutació per una matriu donada permuta les columnes d'aquesta matriu:

$$(\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2\ \mathbf{c}_3)\bullet(P_{ijk})'=(\mathbf{c}_i\ \mathbf{c}_j\ \mathbf{c}_k)'$$

Aquestes idees es generalitzen de manera natural per matrius d'ordre superior a tres.

Exemple 42 Sigui la matriu donada A i la matriu de permutació P_{231}

$$A=\begin{pmatrix}5&3&8\\1&4&7\\9&6&2\end{pmatrix}\quad \text{i}\quad P_{231}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

Si premultipliquem per P_{231} per la matriu A que es pot considerar formada per les files $\mathbf{f}_1=(5\ \ 3\ \ 8)$, $\mathbf{f}_2=(1\ \ 4\ \ 7)$ i $\mathbf{f}_3=(3\ \ 6\ \ 2)$, tenim:

$$P_{231}\bullet A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}5&3&8\\1&4&7\\9&6&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&7\\9&6&2\\5&3&8\end{pmatrix}$$

Observem que la matriu resultant té per files les que abans havíem simbolitzat per $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ i $\mathbf{f}_1$. És a dir, s'han permutat les files en l'ordre indicat pels índexs de P_{231}.

Si postmultipliquem per $(P_{231})'$ la matriu A, que podem veure com el conjunt de columnes $\mathbf{c}_1=(5\ \ 1\ \ 9)'$, $\mathbf{c}_2=(3\ \ 4\ \ 6)'$ i $\mathbf{c}_3=(8\ \ 7\ \ 2)'$, tenim:

$$A\bullet(P_{231})'=\begin{pmatrix}5&3&8\\1&4&7\\9&6&2\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&8&5\\4&7&1\\6&2&9\end{pmatrix}$$

La matriu resultant està formada per les columnes les $\mathbf{c}_2=(3\ \ 4\ \ 6)'$, $\mathbf{c}_3=(8\ \ 7\ \ 2)'$ i $\mathbf{c}_1=(5\ \ 1\ \ 9)'$, d'abans. Per tant, han quedat permutades les columnes segons l'ordre indicat.

d) FORMULACIÓ MATEMÀTICA

Concepte de matriu

Conjunts indexats: $\mathbf{I_m=\{i\in N \ / \ 1\leq i \leq m\}}$, $\mathbf{J_n=\{j\in N \ / \ 1\leq j \leq n\}}$

Aplicació matriu: $\mathbf{f_A: I_m\times J_n \to K \ / \ f(i,j)=a_{ij}}$

Matriu real: **K=R** Matriu complexa: **K=C**

Definició de matriu: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $\mathbf{A=(a_{ij})}$ $\mathbf{i=1,2,\ldots,m}$ $\mathbf{j=1,2,\ldots,n}$

Línies:

Files: $\begin{cases} \mathbf{f}_1=(a_{11}\ a_{12}\cdots a_{1n}) \\ \mathbf{f}_2=(a_{21}\ a_{22}\cdots a_{2n}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{f}_m=(a_{m1}\ a_{m2}\cdots a_{mn}) \end{cases}$ Matriu: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \cdots \\ \mathbf{f}_m \end{pmatrix}$

Columnes: $\mathbf{c}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \mathbf{c}_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{c}_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$

Matriu: $\mathbf{A}=(\ \mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{c}_n\ )$

Ordre d'una matriu

Definició d'ordre: $\mathbf{ord(A)=m\times n}$

Matrius equidimensionals: $\mathbf{ord(A)=ord(B)}$

Conjunt matrius d'ordre m×n: $\mathbf{M_{m\times n}=\{A \ / \ ord(A)=m\times n\}}$

Classificació segons l'ordre:

Matriu rectangular: $\mathbf{m\neq n}$ Matriu quadrada: $\mathbf{m=n}$

C. matrius quadrades d'ordre n: $\mathbf{M_n=\{A \ / \ ord(A)=n\times n\}}$

Matriu fila: **m=1** Matriu columna: **n=1**

Diagonals en matrius quadrades

Diagonal principal: $D_p=\{a_{ii}\ /\ i=1,2,\dots,n\}$
Diagonal secundària: $D_s=\{a_{ij}\ /\ i+j=n+1\ ,\ i,j=1,2,\dots,n\}$
Traça d'una matriu: $\tau(A)=a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn}$

Operacions elementals entre línies paral·eles

Suma algebraica de línies:

Files: $f_i=(a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in}) \wedge f_j=(a_{j1}\ a_{j2}\ \cdots\ a_{jn}) \Rightarrow$

$$f_i\pm f_j=(a_{i1}\pm a_{j1}\quad a_{i2}\pm a_{j2}\ \cdots\ a_{in}\pm a_{jn})$$

Columnes: $c_i=\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \wedge c_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \Rightarrow c_i\pm c_j=\begin{pmatrix} a_{1i}\pm a_{1j} \\ a_{2i}\pm a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mi}\pm a_{mj} \end{pmatrix}$

Producte d'un número per una línia:

Files: $\alpha\in \mathbf{R} \wedge f_i=(a_{i1}\ a_{i2}\dots a_{in}) \Rightarrow \alpha.f_i=(\alpha.a_{i1}\ \alpha.a_{i2}\dots \alpha.a_{in})$

Columnes: $\alpha\in \mathbf{R} \wedge c_i=\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha.c_i=\begin{pmatrix} \alpha.a_{1i} \\ \alpha.a_{2i} \\ \vdots \\ \alpha.a_{mi} \end{pmatrix}$

Fila i columna nul.les: $\alpha=0 \Rightarrow f_0=(0\ 0\cdots 0) \wedge c_0=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Independència lineal

Combinació lineal entre línies paral·leles:

Files: $f_k=c.l.(f_i,f_j) \Leftrightarrow \exists\alpha,\beta\in \mathbf{R}\ /\ f_k=\alpha.f_i+\beta.f_j$

Columnes: $c_k=c.l.(c_i,c_j) \Leftrightarrow \exists\alpha,\beta\in \mathbf{R}\ /\ c_k=\alpha.c_i+\beta.c_j$

Matrius equivalents: $A\equiv B \Leftrightarrow A\to B$ **per oper. elementals**

Independència lineal (cont.)

Files linealment dependents: (Igual per columnes)

$\mathbf{f_i, f_j, \ldots, f_l, \ldots, f_s}$ **lin.dep.** $\Rightarrow$ $\mathbf{f_l = c.l.(f_i, f_j, \ldots, f_s)}$

$\{\mathbf{f_i}, \ldots, \mathbf{f_s}\}$ lin. dep. $\Rightarrow$ $\{\mathbf{f_i}, \ldots, \mathbf{f_s}\}$ sistema lligat

Independència lineal entre files:

$\mathbf{f_i, f_j, \ldots, f_l, \ldots, f_s}$ **lin.indep.** $\Leftrightarrow$

$$[\alpha.\mathbf{f_i}+\beta.\mathbf{f_j}+\ldots\lambda.\mathbf{f_l}+\ldots+\sigma.\mathbf{f_s}=\mathbf{f_0} \Rightarrow \alpha=0,\ \beta=0, \ldots, \lambda=0, \ldots, \sigma=0]$$

$\{\mathbf{f_i}, \ldots, \mathbf{f_s}\}$ lin. indep. $\Rightarrow$ $\{\mathbf{f_i}, \ldots, \mathbf{f_s}\}$ sistema lliure.

Rang d'una matriu

Definició de rang: $\rho(\mathbf{A})$=màxim nombre de files lin. indep.

Matriu escalonada: $\mathbf{A_{m\times n}}$ **escalonada** $\Leftrightarrow$ **(1) + (2)** on:

(1) $\mathbf{f_i=(0, 0, \ldots, 0, a_{ip}, \ldots, a_{in})}$, $\mathbf{f_j=(0, 0, \ldots, 0, a_{jq}, \ldots, a_{jn})}$
amb $\mathbf{a_{ip} \neq 0, a_{jq} \neq 0} \wedge \mathbf{j>i} \Rightarrow \mathbf{p<q}$

(2) $\mathbf{f_i=f_0} \wedge j>i \Rightarrow \mathbf{f_j=f_0}$

Propietat: $\mathbf{A_{m\times n}}$ **escalon.,** $\mathbf{f_r \neq f_0} \wedge \mathbf{f_s=f_0}\ \forall \mathbf{s>r} \Rightarrow \rho(\mathbf{A})=\mathbf{r}$

Càlcul del rang. Mètode de Gauss

$$\text{Matriu: } \mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_m \end{matrix} \quad \begin{cases} f_1 \\ g_2=a_{11}.f_2-a_{21}.f_1 \\ g_3=a_{11}.f_3-a_{31}.f_1 \\ \vdots \\ g_m=a_{11}.f_m-a_{m1}.f_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\mathbf{A} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{m2} & b_{m3} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_m \end{matrix} \quad \begin{cases} f_1 \\ g_2 \\ h_3=b_{22}.g_3-b_{32}.g_2 \\ \vdots \\ h_m=b_{22}.g_m-b_{m2}.g_2 \end{cases} \Rightarrow$$

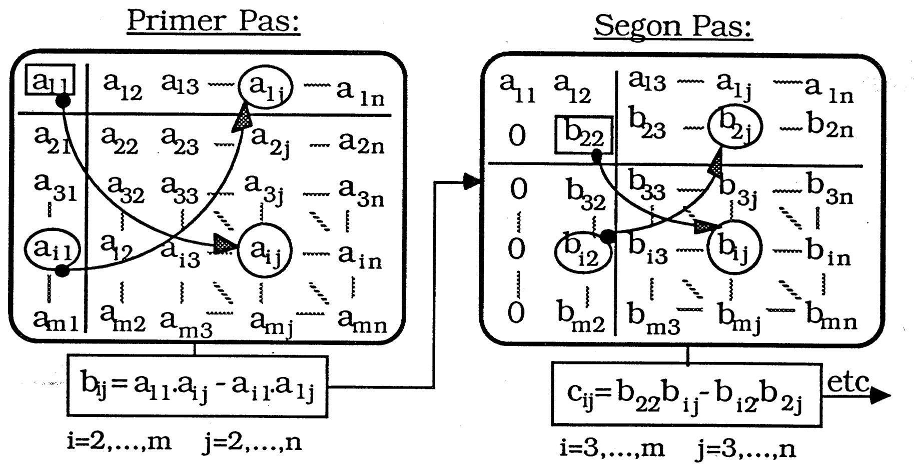
$$\mathbf{A} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & c_{33} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & c_{m3} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ g_2 \\ h_3 \\ \vdots \\ h_m \end{matrix} \quad \text{etc.} \Rightarrow$$

Mètode de Gauss (cont.)

$$A \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} & \cdots & b_{2r} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & c_{33} & c_{34} & \cdots & c_{3r} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{rr} & \cdots & x_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Si $x_{rr} \neq 0 \wedge$
$A \equiv$ M. escalon.
$\Downarrow$
$\rho(A)=r$

Regla del pivot



....

Transposició de matrius

Transposició de matrius: **f: $A_{m\times n} \rightarrow A'_{n\times m}$ / $f(a_{ij})=a_{ji}$ $\forall i,j$**

Matriu transposada: files→columnes

$$\text{Si } A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Propietat d'idempotència: **(A')'=A**

Igualtat de matrius

Siguin $A,B\in M_{m\times n}$, $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ $i=1,2,\ldots,m$ $j=1,2,\ldots n$.

Igualtat de matrius: $\mathbf{A=B} \Leftrightarrow \mathbf{a_{ij}=b_{ij}}$ $\forall i,j$

Suma de matrius

Suma de matrius: $\mathbf{(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})}$ $\forall i,j$

Matriu suma: $\mathbf{A+B}=\begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}+b_{11}} & \mathbf{a_{12}+b_{12}} & \cdots & \mathbf{a_{1n}+b_{1n}} \\ \mathbf{a_{21}+b_{21}} & \mathbf{a_{22}+b_{22}} & \cdots & \mathbf{a_{2n}+b_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a_{m1}+b_{m1}} & \mathbf{a_{m2}+b_{m2}} & \cdots & \mathbf{a_{mn}+b_{mn}} \end{pmatrix}$

Matrius nul·la i oposada:

Matriu nul·la: $\mathbf{O}=(\mathbf{a_{ij}})$ / $\mathbf{a_{ij}}=0 \Rightarrow \mathbf{O}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

Matriu oposada: $\mathbf{-A=(-a_{ij})} \Rightarrow \mathbf{-A}=\begin{pmatrix} \mathbf{-a_{11}} & \mathbf{-a_{12}} & \cdots & \mathbf{-a_{1n}} \\ \mathbf{-a_{21}} & \mathbf{-a_{22}} & \cdots & \mathbf{-a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{-a_{m1}} & \mathbf{-a_{m2}} & \cdots & \mathbf{-a_{mn}} \end{pmatrix}$

Propietats de la suma:

(1) Operació interna: $\forall \mathbf{A,B}\in M_{\mathbf{m\times n}} \Rightarrow \mathbf{A+B}\in M_{\mathbf{m\times n}}$ (clausura)

(2) Associativa: $\forall \mathbf{A,B,C}\in M_{\mathbf{m\times n}} \Rightarrow \mathbf{(A+B)+C=A+(B+C)}$

(3)Commutativa: $\forall \mathbf{A,B}\in M_{\mathbf{m\times n}} \Rightarrow \mathbf{A+B=B+A}$

(4) El. neutre: $\exists \mathbf{O}\in M_{m\times n}$ / $\forall \mathbf{A}\in M_{m\times n} \Rightarrow \mathbf{A+O=A}$

(5) El. oposat: $\forall \mathbf{A}\in M_{m\times n}$ $\exists (\mathbf{-A})\in M_{m\times n}$ / $\mathbf{A+(-A)=O}$

(1)+(2)+(3)+(4)+(5): $(M_{m\times n},+)$= grup abelià

(6) Transposició: $\mathbf{(A+B)' = A' + B'}$

(7) Diferència de matrius: $\mathbf{A-B=A+(-B)}$

Producte d'un número per una matriu

Definició: **Si** $\alpha\in\mathbf{R} \wedge A\in M_{m\times n}$ / $A=(a_{ij}) \Rightarrow \alpha.(a_{ij})=(\alpha.a_{ij})$
Escalar= número

Matriu resultant: $\alpha.\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \alpha.a_{11} & \alpha.a_{12} & \cdots & \alpha.a_{1n} \\ \alpha.a_{21} & \alpha.a_{22} & \cdots & \alpha.a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha.a_{m1} & \alpha.a_{m2} & \cdots & \alpha.a_{mn} \end{pmatrix}$

Propietats: $\forall\alpha,\beta\in R \wedge \forall A,B\in M_{m\times n}$

(1) Operació externa: $(.)\colon (R\times M_{m\times n})\rightarrow M_{m\times n}$ $\quad \alpha.A\in M_{m\times n}$

(2) Associativitat escalar: $\alpha.(\beta.\mathbf{A})=(\alpha.\beta).\mathbf{A}$

(3) Distributivitat escalar: $(\alpha+\beta).\mathbf{A}=\alpha.\mathbf{A}+\beta.\mathbf{A}$

(4) Distributivitat matricial: $\alpha.(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\alpha.\mathbf{A}+\alpha.\mathbf{B}$

(5) El. unitat: $\exists 1\in\mathbf{R}$ / $1.\mathbf{A}=\mathbf{A}$ (6) Transposició: $(\alpha.\mathbf{A})'=\alpha.\mathbf{A}'$

Producte de matrius

Conformitat: $\mathbf{A}_{m\times n} \wedge \mathbf{B}_{p\times q}$, $\exists \mathbf{A}\bullet\mathbf{B} \Leftrightarrow n=p$

Definició del producte:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{a_{i1}} & \boxed{a_{i2}} & \cdots & \boxed{a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & \boxed{b_{1j}} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & \boxed{b_{2j}} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & \boxed{b_{nj}} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots & c_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj}$$

$i=1,2,\ldots,m$
$j=1,2,\ldots,p$

Producte de matrius (cont.)

Ordre del producte: $\mathbf{A}_{m\times n}$, $\mathbf{B}_{n\times p}$ $\wedge$ $\mathbf{C=A\bullet B}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{C}_{m\times p}$

Producte escalar d'una fila per una columna:

$$\text{Si } \mathbf{f_i}=(\mathbf{a_{i1}} \ \ \mathbf{a_{i2}} \ \cdots \ \mathbf{a_{in}}) \ \wedge \ \mathbf{c_j}=\begin{pmatrix} \mathbf{b_{1j}} \\ \mathbf{b_{2j}} \\ \vdots \\ \mathbf{b_{nj}} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{f_i\bullet c_j}=\sum_{k=1}^{n} \mathbf{a_{ik}.b_{kj}}$$

Producte de les matrius $A\in M_{m\times n}$ i $B\in M_{n\times p}$:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_m \end{pmatrix}, \ \mathbf{B}=(\mathbf{c}_1 \ \ \mathbf{c}_2 \ \cdots \ \mathbf{c}_p) \ \Rightarrow \mathbf{A\bullet B}=\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1\bullet\mathbf{c}_1 & \mathbf{f}_1\bullet\mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{f}_1\bullet\mathbf{c}_p \\ \mathbf{f}_2\bullet\mathbf{c}_1 & \mathbf{f}_2\bullet\mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{f}_2\bullet\mathbf{c}_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{f}_m\bullet\mathbf{c}_1 & \mathbf{f}_m\bullet\mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{f}_m\bullet\mathbf{c}_p \end{pmatrix}$$

Propietats del producte:

(1) Associativa: $\mathbf{A}_{m\times n}, \mathbf{B}_{n\times p}, \mathbf{C}_{p\times q}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{(A\bullet B)\bullet C=A\bullet(B\bullet C)}$

(2) Distrib.esquerra: $\mathbf{A}_{m\times n}$, $\mathbf{B,C}_{n\times p}$, $\Rightarrow$ $\mathbf{A\bullet(B+C)=A\bullet B + A\bullet C}$

(3) Distrib.dreta: $\mathbf{A,B}_{m\times n}$, $\mathbf{C}_{n\times p}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{(A+B)\bullet C=A\bullet C + B\bullet C}$

(4) No commutatiu: **En general,** $\mathbf{A\bullet B\neq B\bullet A}$

Pre i postmultiplicació:

A•B ⇒ A prem. a B v **B postm. a A**

(5) Transposició: $\mathbf{(A\bullet B)'=B'\bullet A'}$

Producte de matrius quadrades

Conjunt de les matrius quadrades d'ordre n: $\mathbf{M_n}$

Matriu unitat: $\mathbf{I}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{I=(a_{ij})=M.unit.}$ $\mathbf{i,j=1,2,\ldots,n}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{a_{ij}=1}$ **si** $\mathbf{i=j}$ $\wedge$ $\mathbf{a_{ij}=0}$ **si** $\mathbf{i\neq j}$

Delta de Kronecker: δ_{ij} on $\delta_{ij}=1$ si $i=j$ $\wedge$ $\delta_{ij}=0$ si $i\neq j$

Matriu unitat: $\mathbf{I=(\delta_{ij})}$

Producte de matrius quadrades (cont.)

Propietats: a més de les (1), (2), (3), (4) i (5) anteriors:

(6) Operació interna: $\mathbf{A,B} \in M_n \Rightarrow \mathbf{A \bullet B} \in M_n$

(7) El. unitat: $\forall A \in M_n$, $\exists I \in M_n$ / $\mathbf{A \bullet I = I \bullet A = A}$

Estructura: $(M_n,+,\bullet)$**=anell no commutatiu amb el.unitat**

Matrius commutables: **A,B commut** $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A \bullet B = B \bullet A}$

Matriu Inversa: $\mathbf{A^{-1}}$ **inversa de A** $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A \bullet A^{-1} = A^{-1} \bullet A = I}$

Matriu regular: $\exists \mathbf{A}^{-1}$ Matriu singular: $\nexists \mathbf{A}^{-1}$

Propietats: (8) **A regular** $\Leftrightarrow$ $\rho(\mathbf{A}) = \mathbf{n}$

(9) $(\mathbf{A \bullet B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \bullet \mathbf{A}^{-1}$ (10) $(\mathbf{A}^{-1})' = (\mathbf{A}')^{-1}$

Divisors de zero: $\exists A,B \in M_n$, $\mathbf{A \neq O} \wedge \mathbf{B \neq O}$ / $\mathbf{A \bullet B = O}$

Càlcul de la inversa per sistema d'equacions

Cas particular: matriu $A \in M_3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Existència d'inversa: $\exists \mathbf{A}^{-1} \Leftrightarrow \rho(\mathbf{A}) = 3$

M. inversa: $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$ M. unitat: $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matrius fila:

Per la matriu inversa:

$\mathbf{x}_1 = (x_{11} \ \ x_{12} \ \ x_{13})$ $\mathbf{x}_2 = (x_{21} \ \ x_{22} \ \ x_{23})$ $\mathbf{x}_3 = (x_{31} \ \ x_{32} \ \ x_{33})$

Per la matriu unitat:

$\mathbf{e}_1 = (1 \ \ 0 \ \ 0)$ $\mathbf{e}_2 = (0 \ \ 1 \ \ 0)$ $\mathbf{e}_3 = (0 \ \ 0 \ \ 1)$

Cond. d'inversa: $\mathbf{A \bullet A^{-1} = I} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$

Sistema: $\begin{cases} a_{11}.\mathbf{x}_1 + a_{12}.\mathbf{x}_2 + a_{13}.\mathbf{x}_3 = \mathbf{e}_1 \\ a_{21}.\mathbf{x}_1 + a_{22}.\mathbf{x}_2 + a_{23}.\mathbf{x}_3 = \mathbf{e}_2 \\ a_{31}.\mathbf{x}_1 + a_{32}.\mathbf{x}_2 + a_{33}.\mathbf{x}_3 = \mathbf{e}_3 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x}_1 , \ \mathbf{x}_2 \ \text{i} \ \mathbf{x}_3$

Resolució del sistema: per substitució o per reducció de Gauss

Càlcul de la inversa per Gauss-Jordan

Existència d'inversa: $A \in M_3 \;,\; \exists A^{-1} \iff \rho(A)=3$

Matriu conjunta:

$$\mathbf{M=(A\,|\,I)}\;,\; A\in M_3 \Rightarrow \mathbf{M}=\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array}$$

Procés d'obtenció:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{M=[A\,|\,I]} + \textbf{oper. elem.} \rightarrow \mathbf{M\equiv[I\,|\,E]} \rightarrow \mathbf{E=A^{-1}}$$

Primer pas:

$$\mathbf{M}\equiv\left[\begin{array}{ccc|ccc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ 0 & \boxed{b_{22}} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} \end{array}\right]\begin{array}{l} g_1=f_1 \\ g_2=a_{11}.f_2-a_{21}.f_1 \\ g_3=a_{11}.f_3-a_{31}.f_1 \end{array}$$

Segon pas:

$$\mathbf{M}\equiv\left[\begin{array}{ccc|ccc} c_{11} & 0 & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ 0 & 0 & \boxed{c_{33}} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \end{array}\right]\begin{array}{l} h_1=b_{22}.g_1-b_{12}.g_2 \\ h_2=g_2 \\ h_3=b_{22}.g_3-b_{32}.g_2 \end{array}$$

Tercer pas:

$$\mathbf{M}\equiv\left[\begin{array}{ccc|ccc} d_{11} & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ 0 & d_{22} & 0 & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ 0 & 0 & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{array}\right]\begin{array}{l} i_1=c_{33}.h_1-c_{13}.h_3 \\ i_2=c_{33}.h_2-c_{23}.h_3 \\ i_3=h_3 \end{array}$$

Quart pas:

$$\mathbf{M}\equiv\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & e_{14} & e_{15} & e_{16} \\ 0 & 1 & 0 & e_{24} & e_{25} & e_{26} \\ 0 & 0 & 1 & e_{34} & e_{35} & e_{36} \end{array}\right]\begin{array}{l} j_1=i_1/d_{11} \\ j_2=i_2/d_{22} \\ j_3=i_3/d_{33} \end{array} \qquad A^{-1}=(e_{ij})$$

Polinomis de matrius

Potència d'una matriu: $\mathbf{A^n = A \bullet A \bullet \ldots n \ldots \bullet A}$

Polinomi: $\mathbf{p(x) = x^n + \alpha_1 . x^{n-1} + \alpha_2 . x^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} . x + \alpha_n}$

Polinomi matricial: $\mathbf{p(A) = A^n + \alpha_1 . A^{n-1} + \alpha_2 . A^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} . A + \alpha_n . I}$

Polinomi anul.lador: **p(x)=pol.anul. de A** $\Leftrightarrow$ $\mathbf{p(A)=O}$

Càlcul de la inversa a partir d'un polinomi anul.lador:

$\mathbf{p(A)=O} \Rightarrow \mathbf{A^n + \alpha_1 . A^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} . A + \alpha_n . I = O} \Rightarrow$ F. comú A $\Rightarrow$

$\mathbf{A \bullet (A^{n-1} + \alpha_1 . A^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} . I) = -\alpha_n . I} \Rightarrow$ Premult. per A^{-1} $\Rightarrow$

$$\boxed{\mathbf{A^{-1} = -\alpha_n^{-1} . (A^{n-1} + \alpha_1 . A^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} . I)}}$$

Partició de matrius

Submatriu: $\mathbf{S \subseteq A} \Leftrightarrow [\, \forall \mathbf{a_{ij} \in S_{p\times q}} \Rightarrow \mathbf{a_{ij} \in A_{m\times n}} \,]$ on $\mathbf{p \le m} \wedge \mathbf{q \le n}$

Partició d'una matriu rectangular: $\mathbf{A \in M_{m\times n}}$, $\mathbf{B \in M_{p\times q}}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A_{11}} & \mathbf{A_{12}} \\ \mathbf{A_{21}} & \mathbf{A_{22}} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \mathbf{A_{11} \in M_{m_1\times n_1}} & \mathbf{A_{12} \in M_{m_1\times n_2}} \\ \mathbf{A_{21} \in M_{m_2\times n_1}} & \mathbf{A_{22} \in M_{m_2\times n_2}} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{m_1 + m_2 = m} \\ \mathbf{n_1 + n_2 = n} \end{cases}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B_{11}} & \mathbf{B_{12}} \\ \mathbf{B_{21}} & \mathbf{B_{22}} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \mathbf{B_{11} \in M_{p_1\times q_1}} & \mathbf{B_{12} \in M_{p_1\times q_2}} \\ \mathbf{B_{21} \in M_{p_2\times q_1}} & \mathbf{B_{22} \in M_{p_2\times q_2}} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{p_1 + p_2 = p} \\ \mathbf{q_1 + q_2 = q} \end{cases}$$

Suma de matrius particionades:

$$\left.\begin{matrix} \mathbf{m_1 = p_1} & \mathbf{m_2 = p_2} \\ \mathbf{n_1 = q_1} & \mathbf{n_2 = q_2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathbf{A+B} = \begin{pmatrix} \mathbf{A_{11} + B_{11}} & \mathbf{A_{12} + B_{12}} \\ \mathbf{A_{21} + B_{21}} & \mathbf{A_{22} + B_{22}} \end{pmatrix}$$

Producte d'un número per una matriu particionada:

$$\mathbf{Si}\ \alpha \mathbf{\in R} \wedge \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A_{11}} & \mathbf{A_{12}} \\ \mathbf{A_{21}} & \mathbf{A_{22}} \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha.\mathbf{A_{11}} & \alpha.\mathbf{A_{12}} \\ \alpha.\mathbf{A_{21}} & \alpha.\mathbf{A_{22}} \end{pmatrix}$$

Producte de matrius particionades:

$$\left.\begin{matrix} \mathbf{n_1 = p_1} \\ \mathbf{n_2 = p_2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathbf{A \bullet B} = \begin{pmatrix} \mathbf{A_{11} \bullet B_{11} + A_{12} \bullet B_{21}} & \mathbf{A_{11} \bullet B_{12} + A_{12} \bullet B_{22}} \\ \mathbf{A_{21} \bullet B_{11} + A_{22} \bullet B_{21}} & \mathbf{A_{21} \bullet B_{12} + A_{22} \bullet B_{22}} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{A \bullet B = C} \Rightarrow \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C_{11}} & \mathbf{C_{12}} \\ \mathbf{C_{21}} & \mathbf{C_{22}} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{C_{11} \in M_{m_1\times q_1}}\ \mathbf{C_{12} \in M_{m_1\times q_2}} \\ \mathbf{C_{21} \in M_{m_2\times q_1}}\ \mathbf{C_{22} \in M_{m_2\times q_2}} \end{cases}$$

Matriu inversa per submatrius

Cas particular: $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_4 \wedge \rho(\mathbf{A})=4 \Rightarrow \exists \mathbf{A}^{-1} \in \mathrm{M}_4 \ / \ \mathbf{A} \bullet \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_4$

Partició matricial: $\{\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{U}, \mathbf{I}, \mathbf{O}\} \in \mathrm{M}_2$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{N} \\ \mathbf{P} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}, \ \mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{U} \end{pmatrix} \wedge \mathrm{I}_4=\begin{pmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{I} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{M} & \mathrm{N} \\ \mathrm{P} & \mathrm{Q} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \mathrm{X} & \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} & \mathrm{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{I} \end{pmatrix}$$

Sistema doble: $\begin{cases} \mathbf{M \bullet X + N \bullet Z = I} \\ \mathbf{P \bullet X + Q \bullet Z = O} \end{cases} \wedge \begin{cases} \mathbf{M \bullet Y + N \bullet U = O} \\ \mathbf{P \bullet Y + Q \bullet U = I} \end{cases}$

(Si Q^{-1} és fàcil de trobar, aïllarem primer la Z, després X, etc.)

Solució:

Trobar primer $\mathbf{Q}^{-1}$. Si $\mathbf{Q}^{-1}=\mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{X}=(\mathbf{M}-\mathbf{N}\bullet\mathbf{R}\bullet\mathbf{P})^{-1}$

$\mathbf{Y}=-\mathbf{X}\bullet\mathbf{N}\bullet\mathbf{R}$ $\quad\quad$ $\mathbf{Z}=-\mathbf{R}\bullet\mathbf{P}\bullet\mathbf{X}$ $\quad\quad$ $\mathbf{U}=\mathbf{R}-\mathbf{R}\bullet\mathbf{P}\bullet\mathbf{Y}$

....

Matrius triangulars

M. triangular superior

$\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{\mathbf{n}} \ / \ \forall \mathbf{i} > \mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{a_{ij}=0}$

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

M. triangular inferior

$\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{\mathbf{n}} \ / \ \forall \mathbf{i} < \mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{a_{ij}=0}$

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrius diagonal i escalar

Matriu diagonal

$\forall \mathbf{i} \neq \mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{a_{ij}=0}$

$\Rightarrow$ **M. triang.sup. + infer.**

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matriu escalar

M. diagonal + ($\forall$i $\Rightarrow$ $\mathbf{a_{ii}=\alpha}$)

$\Rightarrow$ $\mathbf{A=\alpha.I}$

$$\mathrm{A}=\alpha.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Matrius simètrica i antisimètrica

Matriu simètrica

$\forall i,j \Rightarrow a_{ji}=a_{ij}$

$\Rightarrow$ **Simètrics resp. Dp**

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matriu antisimètrica

$\forall i,j \Rightarrow a_{ji}=-a_{ij}$

$\Rightarrow$ **Dp nul.la**

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Propietats:

(1) **A sim.** $\Rightarrow$ **A'=A**

(2) **A antisim.** $\Rightarrow$ **A'=-A**

(3) $S=\frac{A+A'}{2} \Rightarrow$ **S=sim.**

(4) $T=\frac{A-A'}{2} \Rightarrow$ **T=antisim.**

Matrius involutiva i ortogonal

M. involutiva: $A \bullet A=I$ $(A^2=I)$ Propietat: $A^{-1}=A$ $A^{2k}=I$

M. invol. d'índex m: $\exists m \in N$, m=mín. / $A^m=I$ Pr.: $A^{k.m}=I$ $\forall k \in N$

M. ortogonal: $A \bullet A'=I$ Propietat: $A^{-1}=A'$

Matrius idempotent i periòdica

M. idempotent: $A \bullet A=A$ $(A^2=A)$ Propietat: $A^k=A$ $\forall k \in N$

M. periòdica: $\exists p \in N$, p=mín. / $A^p=A$ Prop.: $A^{k.p}=A$ $\forall k \in N$

Matrius nilpotents

M. nilpotents: $A \bullet A=O$ $(A^2=O)$ Propietat: $A^n=O$ $\forall n \in N$

M. nilp. d'índex m: $\exists m \in N$, m=mín. / $A^m=O$ Prop.: $A^{k.m}=O$

Matrius complexes

M. complexa: $A(a_{ij})$ **M.complexa** $\Rightarrow \exists a_{ij} \in C$

M. conjugada: **Si** $A(a_{ij}) \Rightarrow \overline{A}=(\overline{a_{ij}})$ / $z=a+b.i \rightarrow \overline{z}=a-b.i$

M. real: $\overline{A}=A$

M. hermítica: $(\overline{A})'=A$ M. antihermítica: $(\overline{A})'=-A$

Matrius equivalents

M. equivalents: **A equiv. B** $\Leftrightarrow$ $\exists$**P,Q**$\in M_n$ **regulars** / **B=Q•A•P**

M. semblants: **A semb. B** $\Leftrightarrow$ $\exists$**P**$\in M_n$ **regular** / **B=P^{-1}•A•P**

M. congruents: **A cong. B** $\Leftrightarrow$ $\exists$**P**$\in M_n$ **regular** / **B=P'•A•P**

Matrius no negatives

M. no negatives: $\mathbf{A \geq 0} \Leftrightarrow \mathbf{a_{ij} \geq 0}\ \forall \mathbf{i,j}$ (M. positives: $a_{ij}>0$)

M. estocàstica: $\forall \mathbf{i,j} \Rightarrow \mathbf{a_{ij}} \geq 0 \wedge \sum_{j=1}^{n} \mathbf{a_{ij}}=1$

(La suma dels termes de cada fila és igual a la unitat)

Matriu de Leontiev: **L=I-A** Inversa de Leontiev: $\mathbf{L^{-1}=(I-A)^{-1}}$

Matrius de permutació: (cas particular: M_3)

Matriu de permutació: $\mathbf{P_{ijk}=(e_i\ \ e_j\ \ e_k)'}$

on $\mathbf{e}_1=(1\ 0\ 0)$, $\mathbf{e}_2=(0\ 1\ 0)$ i $\mathbf{e}_3=(0\ 0\ 1)$

Obtenció: **permutant files de I** Nombre total: 3!=**6 matrius**

$$\mathbf{P}_{123}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad \mathbf{P}_{213}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad \mathbf{P}_{312}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{132}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\quad \mathbf{P}_{231}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\quad \mathbf{P}_{321}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

Multiplicació per una matriu $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{f}_1\\\mathbf{f}_2\\\mathbf{f}_3\end{pmatrix} \vee \mathbf{A}=(\mathbf{c}_1\ \ \mathbf{c}_2\ \ \mathbf{c}_3)$:

Premultiplicació: $\mathbf{P_{ijk} \bullet A = P_{ijk}} \bullet \begin{pmatrix}\mathbf{f}_1\\\mathbf{f}_2\\\mathbf{f}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{f}_i\\\mathbf{f}_j\\\mathbf{f}_k\end{pmatrix}$

Postmultiplicació: $\mathbf{A \bullet (P_{ijk})' = (c_1\ \ c_2\ \ c_3) \bullet (P_{ijk})' = (c_i\ \ c_j\ \ c_k)}$

e) PROBLEMES RESOLTS

1.1. CARACTERÍSTIQUES DE LES MATRIUS

Concepte de matriu

1. Les matrius són un conjunt d'elements disposats en forma de files i columnes. Aquests elements no necessàriament han de ser números, com veurem en al problema següent, proposat a Euler:

«Un grup de 16 oficials de 4 graduacions diferents a, b, c i d, i pertanyents també a 4 regiments diferents α, β, γ i δ, són cridats per passar revista. El general vol que formin en "quadre", de manera que en cada línia horitzontal, en cada vertical i en cada diagonal es trobin 4 oficials de diferent graduació i també de diferent regiment. Quina és aquesta formació?»

Solució. Formem primer un "quadre" amb els 16 oficials de diferents graduacions a, b, c i d, de manera que a cada fila, columna o diagonal no n'hi hagi dos de la mateixa graduació.

Del primer quadre que partim escollim a la primera columna les graduacions a, b, c i d, que hem quadriculat a la figura. Eliminarem després les lletres que quedarien repetides a cada fila, columna o diagonal.

$\boxed{a}$ b c d	$\cancel{a}$ b c d	$\cancel{a}$ b c d	$\cancel{a}$ b c $\cancel{d}$
a $\boxed{b}$ c d	$\cancel{a}$ $\cancel{b}$ $\boxed{c}$ d	a $\cancel{b}$ c $\cancel{d}$	a $\cancel{b}$ c d
a b $\boxed{c}$ d	a b $\cancel{c}$ $\cancel{d}$	$\cancel{a}$ b $\cancel{c}$ d	a b $\cancel{c}$ d
a b c $\boxed{d}$	a b c $\cancel{d}$	a b c $\cancel{d}$	$\cancel{a}$ b c $\cancel{d}$

a	$\cancel{a}$ b $\cancel{c}$ d	$\cancel{a}$ b c d	$\cancel{a}$ b c $\cancel{d}$
b	c	a $\cancel{b}$ $\cancel{c}$ $\cancel{d}$	a $\cancel{b}$ $\cancel{c}$ d
c	a b $\cancel{c}$ $\cancel{d}$	$\cancel{a}$ b $\cancel{c}$ d	a b $\cancel{c}$ d
d	a b $\cancel{c}$ $\cancel{d}$	a b c $\cancel{d}$	$\cancel{a}$ $\boxed{b}$ $\cancel{c}$ $\cancel{d}$

a	d	b	c
b	c	a	d
c	b	d	a
d	a	c	b

De les dues graduacions possibles que pot tenir l'oficial de la segona fila i segona columna, c i d, escollim per exemple la c. Ara tornem a eliminar les graduacions repetides a la segona fila, a la segona columna i a la diagonal principal.

Veiem que l'últim oficial tindrà la graduació b, que assenyalem amb un requadre. Si continuem eliminant les graduacions repetides arribem al quadre (o *matriu*) de la dreta, que té per files:

$$\mathbf{f}_1=(a\ d\ b\ c)\ ,\ \mathbf{f}_2=(b\ c\ a\ d)\ ,\ \mathbf{f}_3=(c\ b\ d\ a)\ \text{ i }\ \mathbf{f}_4=(d\ a\ c\ b)$$

I per columnes, on posem (') per indicar que ha d'estar escrita verticalment:

$$\mathbf{c}_1=(a\ b\ c\ d)'\ ,\ \mathbf{c}_2=(d\ c\ b\ a)'\ ,\ \mathbf{c}_3=(b\ a\ d\ c)'\ \text{ i }\ \mathbf{c}_4=(c\ d\ a\ b)'$$

I per diagonals, principal i secundària:

$$\mathbf{d}_1=(a\ c\ d\ b)\ \text{ i }\ \mathbf{d}_2=(c\ a\ b\ d)$$

Per formar el quadre en què els oficials siguin dels diferents regiments α, β, γ i δ substituïm les lletres llatines per les gregues i obtenim:

α	δ	β	γ
β	γ	α	δ
γ	β	δ	α
δ	α	γ	β

α	β	γ	δ
δ	γ	β	α
β	α	δ	γ
γ	δ	α	β

a α	d β	b γ	c δ
b δ	c γ	a β	d α
c β	b α	d δ	a γ
d γ	a δ	c α	b β

Si superposéssim directament els dos quadres veuríem que un mateix oficial hauria d'ocupar diverses posicions. Per evitar-ho només cal fer una simetria respecte a la diagonal principal i superposar el quadre resultant grec al llatí.

Ara sí que es compleix la condició del general!

2. Repartim les vint-i-cinc lletres de l'alfabet en un quadrat de 5×5 segons les files f_1=(Q,Y,A,H,O), f_2=(X,E,G,N,P), f_3=(D,F,M,T,V), f_4=(J,L,S,U,C) i f_5=(K,R,Z,B,I). Substitueix cada lletra pel seu número d'ordre en l'alfabet i escriu la matriu numèrica corresponent. Quina és la suma de cada línia? Troba els màxims MF_i de cada fila. Quin és el mínim $m(MF_i)$ d'aquests màxims? Fes el mateix amb les columnes i troba MC_i i $m(MC_i)$. Coincideix el $m(MF_i)$ amb el $m(MC_i)$? Passarà sempre? Justifica-ho amb un exemple d'una matriu d'ordre 3.

Solució. Substituirem les lletres donades pel número d'ordre que els corresponen:

A=1	B=2	C=3	D=4	E=5
F=6	G=7	H=8	I=9	J=10
K=11	L=12	M=13	N=14	O=15
P=16	Q=17	R=18	S=19	T=20
U=21	V=22	X=23	Y=24	Z=25

Segons aquests valors, obtenim el quadre o matriu de la plana següent. Calculem la suma de cada fila, columna i diagonal:

$$\Sigma f_1=\Sigma f_2=\Sigma f_3=\Sigma f_4=\Sigma f_5=65 \qquad \Sigma c_1=\Sigma c_2=\Sigma c_3=\Sigma c_4=\Sigma c_5=65$$

$$\Sigma d_1=\Sigma d_2=65$$

Ens resulta, doncs, un *quadre màgic* de suma 65.

Mirem cadascuna de les files i apuntem-ne el número màxim, que designarem per MF_i.

$MF_1=24 \quad MF_2=23 \quad MF_3=22 \quad MF_4=21 \quad MF_5=25$

El mínim d'aquests màxims serà $\boxed{m(MF_i)=21}$

Fem el mateix per a cada columna, trobem el seu màxim i simbolitzem-lo per MC_i.

$$MC_1=23 \quad MC_2=24 \quad MC_3=25 \quad MC_4=21 \quad MC_5=22$$

El mínim dels màxims de les columnes serà $\boxed{m(MC_i)=21}$

En aquest cas concret obtenim el mateix valor, però no sempre es compeix aquest fet, com podem veure agafant la matriu

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Tenim $MF_1=3$, $MF_2=6$ i $MF_3=9$, d'on $m(MF_i)=3$. D'altra banda, $MC_1=7$, $MC_2=8$ i $MC_3=9$, d'on $m(MC_i)=7$. Tenim $m(MF_i)\neq m(MC_i)$.

Quadre donat

Q	Y	A	H	O
X	E	G	N	P
D	F	M	T	V
J	L	S	U	C
K	R	Z	B	I

Quadre màgic

17	24	1	8	15	f_1
23	5	7	14	16	f_2
4	6	13	20	22	f_3
10	12	19	21	3	f_4
11	18	25	2	9	f_5
c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	

El número π

2	4	3	6	9	=24
6	5	2	7	3	=23
1	9	9	4	2	=25
3	8	8	6	4	=29
5	3	3	1	5	=17
‖	‖	‖	‖	‖	
17	29	25	24	23	

Com a curiositat i complement d'aquest problema, i tenint en compte les 25 primeres xifres del nombre π:

3'141.592.653.589.793.238.462.643....

Col·loquem la primera xifra de π, 3, al lloc marcat amb un 1 del quadrat màgic anterior, la segona xifra, 1, al lloc marcat amb un 2, etc. Queda una disposició en forma de matriu, indicada a la figura anterior.

Si ara sumem cadascuna de les files i columnes obtindrem:

$$\Sigma f_1=\Sigma c_4=24 \qquad \Sigma f_2=\Sigma c_5=23 \qquad \Sigma f_3=\Sigma c_3=25$$
$$\Sigma f_4=\Sigma c_2=29 \qquad \Sigma f_5=\Sigma c_1=17$$

Fet sorprenent a causa de l'aleatorietat de les xifres del número π, ja que, malgrat que s'han obtingut milions de xifres decimals amb potents ordinadors, sembla que no tenen relació entre elles!

3. Forma una matriu A(4×7) imitant els dies del mes de febrer i troba el Màx(mín **f**), el mín(Màx **f**), el Màx(mín **c**) i el mín(Màx **c**). Quina relació hi ha? Es verificarà sempre? Justifica-ho amb la matriu B que té per files $\mathbf{f}_1=(3\ 7\ 5)$, $\mathbf{f}_2=(4\ 1\ 2)$ i $\mathbf{f}_3=(9\ 6\ 8)$.

Solució. El mes de febrer de l'any 1993 té forma rectangular, amb 4 files i 7 columnes:

FEBRER-1993							
Dl	Dm	Dc	Dj	Dv	Ds	Dg	
1	2	3	4	5	6	7	f_1
8	9	10	11	12	13	14	f_2
15	16	17	18	19	20	21	f_3
22	23	24	25	26	27	28	f_4
c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	

Aquest rectangle es pot escriure també com una matriu A(4×7) de la manera següent:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 \end{pmatrix}$$

Les seves files són $\mathbf{f}_1=(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)$, $\mathbf{f}_2=(8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14)$, $\mathbf{f}_3=(15\ 16\ 17\ 18\ 19\ 20\ 21)$ i $\mathbf{f}_4=(22\ 23\ 24\ 25\ 26\ 27\ 28)$. I les seves columnes, $\mathbf{c}_1=(1\ 8\ 15\ 22)'$, $\mathbf{c}_2=(2\ 9\ 16\ 23)'$, $\mathbf{c}_3=(3\ 10\ 17\ 24)'$, $\mathbf{c}_4=(4\ 11\ 18\ 25)'$, $\mathbf{c}_5=(5\ 12\ 19\ 26)'$, $\mathbf{c}_6=(6\ 13\ 20\ 27)'$ i, finalment, $\mathbf{c}_7=(7\ 14\ 21\ 28)'$.

Calculem primer els mínims de les *files*: $m(\mathbf{f}_1)=1$, $m(\mathbf{f}_2)=8$, $m(\mathbf{f}_3)=15$, $m(\mathbf{f}_4)=22$. El seu màxim serà $\boxed{M(m\mathbf{f})=22}$

Calculem ara els màxims de les files: $M(\mathbf{f}_1)=7$, $M(\mathbf{f}_2)=14$, $M(\mathbf{f}_3)=21$ i $M(\mathbf{f}_4)=28$. El seu mínim serà $\boxed{m(M\mathbf{f})=7}$

Per a les *columnes* farem el mateix. Mínims de les columnes: $m(\mathbf{c}_1)=1$, $m(\mathbf{c}_2)=2$, $m(\mathbf{c}_3)=3$, $m(\mathbf{c}_4)=4$, $m(\mathbf{c}_5)=5$, $m(\mathbf{c}_6)=6$ i $m(\mathbf{c}_7)=7$. El seu màxim serà $\boxed{M(m\mathbf{c})=7}$

El màxim de cada columna és: $M(\mathbf{c}_1)=22$, $M(\mathbf{c}_2)=23$, $M(\mathbf{c}_3)=24$, $M(\mathbf{c}_4)=25$, $M(\mathbf{c}_5)=26$, $M(\mathbf{c}_6)=27$ i $M(\mathbf{c}_7)=28$. El seu mínim serà $\boxed{m(M\mathbf{c})=22}$

Notem que es verifica $\boxed{M(m\mathbf{f})=m(M\mathbf{c})}$ i $\boxed{m(M\mathbf{f})=M(m\mathbf{c})}$.

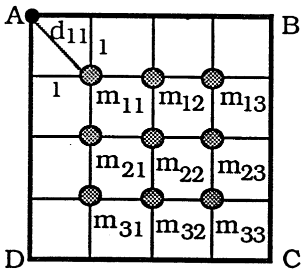
Aquesta igualtat no es verifica sempre, com podem comprovar amb la matriu:

$$B=\begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \\ 9 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

A les files: $M(m\mathbf{f})=M\{3,1,6\}=3$, $m(M\mathbf{f})=m\{7,4,9\}=4$. I a les columnes : $M(m\mathbf{c})=M\{3,1,2\}=3$, $m(M\mathbf{c})=m\{9,7,8\}=7$. Observem que en general són diferents.

4. Les masses en grams de 9 partícules, que estan distribuïdes en el seu interior, de manera uniforme, sobre un reixat en forma de matriu quadrada de 1 cm de costat, són $m_{11}=143'80$, $m_{12}=14'92$, $m_{13}=12'12$, $m_{21}=15'08$, $m_{22}=7'51$, $m_{23}=17'89$, $m_{31}=21'96$, $m_{32}=30'11$ i $m_{33}=8'22$. Quina és la massa total M_T?
Si els "moments" de cadascuna d'aquestes masses respecte al vèrtex que està pròxim a m_{11} ve donat per $g_{ij}=m_{ij}.(i^2+j^2)^{1/2}$, escriu la matriu G de moments i el moment total $G_T=\Sigma\Sigma g_{ij}$. Quin és el radi de gir r si $r=G_T/M_T$? A quins dels dos possibles punts de la matriu pot estar situat el centre de gravetat?

Solució. Fem la gràfica del reixat, que contingui al seu interior les nou partícules donades, i dibuixem també la distància d_{11} de la partícula m_{11} al vèrtex A. Farem el mateix per a les vuit partícules restants:



La massa total, M_T, és evidentment la suma de les masses de totes les partícules

$$M_T=\sum_{i,j=1}^{3} m_{ij}=143'80+14'92+...+8'22=\boxed{271'61 \text{ g}}$$

Calculem el moment g_{ij} de cada partícula sabent que ens és donat per la fórmula $g_{ij}=m_{ij}.\sqrt{i^2+j^2}$.

PRIMERA FILA: $g_{11}=m_{11}.\sqrt{1^2+1^2}=143'80.\sqrt{2}=203'363$ g.cm

$g_{12}=m_{12}.\sqrt{1^2+2^2}=14'92.\sqrt{5}=33'362$ g.cm

$g_{13}=m_{13}.\sqrt{1^2+3^2}=12'12.\sqrt{10}=38'326$ g.cm

SEGONA FILA: $g_{21}=m_{21}.\sqrt{2^2+1^2}=15'08.\sqrt{5}=33'719$ g.cm

$g_{22}=m_{22}.\sqrt{2^2+2^2}=7'51.\sqrt{8}=21'241$ g.cm

$g_{23}=m_{23}.\sqrt{2^2+3^2}=17'89.\sqrt{13}=64'503$ g.cm

TERCERA FILA: $g_{31}=m_{31}.\sqrt{3^2+1^2}=21'96.\sqrt{10}=69'443$ g.cm

$g_{32}=m_{32}.\sqrt{3^2+2^2}=30'11.\sqrt{13}=108'563$ g.cm

$g_{33}=m_{33}.\sqrt{3^2+3^2}=8'22.\sqrt{18}=34'874$ g.cm

La *matriu de moments* G es troba col·locant al lloc corresponent de la partícula m_{ij} el seu moment respectiu g_{ij}. Obtenim:

$$G=\begin{pmatrix} 203'363 & 33'362 & 38'326 \\ 33'719 & 21'241 & 64'503 \\ 69'443 & 108'563 & 34'874 \end{pmatrix}$$

Per a calcular el moment total M_T haurem de sumar tots els moments g_{ij} de les partícules:

$$G_T=\sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}=203'363+33'362+\ldots+34'874=\boxed{607'394 \text{ g.cm}}$$

El "radi de gir" r donat per $r=G_T/M_T$ és:

$$r=\frac{G_T}{M_T}=\frac{607'394 \text{ g.cm}}{271'61 \text{ g}}=\boxed{2'236 \text{ cm}}$$

Ens demanen finalment en quins punts pot estar situat el centre de gravetat (c.d.g.). Això significa que la massa total de les nou partícules, M_T=271'61 g, es pot concentrar en algun dels nou punts de la matriu.

Com que el radi de gir és r=2'236 cm, i com que aquest valor és aproximadament $\sqrt{5}$, tindrem $r_1=\sqrt{1^2+2^2}$ o bé $r_2=\sqrt{2^2+1^2}$, i això vol dir que el c.d.g. pot estar en el lloc de la partícula $\boxed{m_{12}}$ o bé en el de la $\boxed{m_{21}}$..

Definició de matriu

5. Per al conjunt indexat I={1,2,3,4} construïm una aplicació f_A:I×I→R definida per $f_A(i,j)=a_{ij}$ on $a_{ij}=(i-1)^2+(j-2)^2$. Escriu la matriu $A=(a_{ij})$. De quin tipus és? Quin és el seu ordre? Quines són les diagonals principal i secundària? Quina és la traça de la matriu?

Solució. Com que el cardinal del conjunt indexat I és n(I)=4, perquè està format per 4 elements, el cardinal del conjunt producte I×I és n(I×I)=n(I).n(I)=4.4=16. Així, la matriu A està formada per 16 termes donats per la fórmula $a_{ij}=(i-1)^2+(j-2)^2$:

1ª FILA: $a_{11}=(1-1)^2+(1-2)^2=1$ $\quad a_{12}=(1-1)^2+(2-2)^2=0$
$a_{13}=(1-1)^2+(3-2)^2=1$ $\quad a_{14}=(1-1)^2+(4-2)^2=4$

2ª FILA: $a_{21}=(2-1)^2+(1-2)^2=2$ $\quad a_{22}=(2-1)^2+(2-2)^2=1$
$a_{23}=(2-1)^2+(3-2)^2=2$ $\quad a_{24}=(2-1)^2+(4-2)^2=5$

3ª FILA: $a_{31}=(3-1)^2+(1-2)^2=5$ $\quad a_{32}=(3-1)^2+(2-2)^2=4$
$a_{33}=(3-1)^2+(3-2)^2=5$ $\quad a_{34}=(3-1)^2+(4-2)^2=8$

4ª FILA: $a_{41}=(4-1)^2+(1-2)^2=10$ $a_{42}=(4-1)^2+(2-2)^2=9$
$a_{43}=(4-1)^2+(3-2)^2=10$ $a_{44}=(4-1)^2+(4-2)^2=13$

La matriu formada per aquests setze termes serà

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 5 & 8 \\ 10 & 9 & 10 & 13 \end{pmatrix}$$

Veiem que és una matriu quadrada, ja que el nombre de files coincideix amb el de columnes. Com que aquest nombre igual és 4, direm que és una matriu quadrada d'ordre 4.

La diagonal principal que va des del primer terme a_{11} fins a l'últim a_{44}, és $\boxed{D_p=(1\ 1\ 5\ 13)}$. L'altra diagonal de la matriu, anomenada diagonal secundària, és $\boxed{D_s=(4\ 2\ 4\ 10)}$.

La traça $\tau(A)$ de la matriu no és res més que la suma de tots els termes de la diagonal principal, 1+1+5+13, $\boxed{\tau(A)=20}$.

Operacions elementals entre línies

6. D'una matriu quadrada A coneixem les següents sumes de files i columnes: $\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_2=(19\ 15\ 19\ 15)$, $\mathbf{f}_3+\mathbf{f}_4=(15\ 19\ 15\ 19)$, $\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2=(25\ 9\ 25\ 9)'$ i $\mathbf{c}_3+\mathbf{c}_4=(9\ 25\ 9\ 25)'$, on la (') designa una disposició vertical. També coneixem els quatre vèrtexs $a_{11}=15$, $a_{14}=6$, $a_{41}=1$ i $a_{44}=12$. Quina és aquesta matriu? Quant sumen els termes de cada fila? I els de cada columna? Quina és la traça de la matriu? I la suma dels termes de la diagonal secundària? Quin és el conjunt ordenat de termes de la matriu?

Solució. Apuntem la matriu, en forma de quadrat, on tots els termes, tret dels quatre vèrtexs, són desconeguts.

$$\begin{array}{cccc|c} 15 & a_{12} & a_{13} & 6 & f_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & f_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & f_3 \\ 1 & a_{42} & a_{43} & 12 & f_4 \\ \hline c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \end{array}$$

D'aquesta gràfica podrem deduir tots els termes desconeguts, si anem aplicant les condicions del problema.

a) Al ser $\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_2=(19\ 15\ 19\ 15)$, resulten les equacions següents:

$15+a_{21}=19$ (1) $\quad a_{12}+a_{22}=15$ (2) $\quad a_{13}+a_{23}=19$ (3)

$6+a_{24}=15$ (4) $\quad$ De (1) i (4) obtenim $\boxed{a_{21}=4}$ i $\boxed{a_{24}=9}$

b) Com que $\mathbf{f}_3+\mathbf{f}_4=(15\ 19\ 15\ 19)$, ens queda:

$a_{31}+1=15$ (5) $\quad a_{32}+a_{42}=19$ (6) $\quad a_{33}+a_{43}=15$ (7)

$a_{34}+12=19$ (8) $\quad$ De (5) i (8) es té $\boxed{a_{31}=14}$ i $\boxed{a_{34}=7}$

c) Al ser $\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2=(25\ 9\ 25\ 9)'$, deduïm que:

$15+a_{12}=25$ (9) $\quad a_{21}+a_{22}=9$ (10) $\quad a_{31}+a_{32}=25$ (11)

$1+a_{42}=9$ (12) $\quad$ De (9) i (12) és $\boxed{a_{12}=10}$ i $\boxed{a_{42}=8}$

d) Com que $\mathbf{c}_3+\mathbf{c}_4=(9\ 25\ 9\ 25)'$, obtenim:

$a_{13}+6=9$ (13) $\quad a_{23}+a_{24}=25$ (14) $\quad a_{33}+a_{34}=9$ (15)

$a_{43}+12=25$ (16) $\quad$ De (13) i (16) queda $\boxed{a_{13}=3}$ i $\boxed{a_{43}=13}$

Veiem que encara ens resten per saber els termes interiors:

15	10	3	6
4	a_{22}	a_{23}	9
14	a_{32}	a_{33}	7
1	8	13	12

Agafem, per exemple, les files i fixem-nos en les equacions on hi surt el terme desconegut.

De (2) resultarà $a_{22}=15-a_{12}=15-10=5$, $\boxed{a_{22}=5}$

De (3) obtindrem $a_{23}=19-a_{13}=19-3=16$, $\boxed{a_{23}=16}$

De (6) trobarem $a_{32}=19-a_{42}=19-8=11$, $\boxed{a_{32}=11}$

De (7) és $a_{33}=15-a_{43}=15-13=2$, $\boxed{a_{33}=2}$

Escrivint el quadre resultant en forma de matriu, queda:

$$A=\begin{pmatrix} 15 & 10 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 16 & 9 \\ 14 & 11 & 2 & 7 \\ 1 & 8 & 13 & 12 \end{pmatrix}$$

Resulta ser un *quadrat màgic*, perquè la suma dels termes de cada fila, de cada columna i de cada diagonal és sempre la mateixa:

$\Sigma\mathbf{f}_1=\Sigma\mathbf{f}_2=\Sigma\mathbf{f}_3=\Sigma\mathbf{f}_4=\boxed{34}$ $\quad \Sigma\mathbf{c}_1=\Sigma\mathbf{c}_2=\Sigma\mathbf{c}_3=\Sigma\mathbf{c}_4=\boxed{34}$

$\Sigma\mathbf{d}_p=34 \Rightarrow$ La traça és $\tau(A)=\boxed{34}$ $\quad \Sigma\mathbf{d}_s=\boxed{34}$

Finalment, el conjunt ordenat dels termes de la matriu és el conjunt format pels 16 primers nombres naturals, $\boxed{\{x\in N\ /\ x\le 16\}}$.

7. Les tres primeres files d'una matriu quadrada positiva d'ordre 4 són $\mathbf{f}_1=(1\ 2\ 1\ 2)$, $\mathbf{f}_2=(2\ 3\ 4\ 6)$ i $\mathbf{f}_3=(2\ 6\ 8\ 9)$. L'úlima fila $\mathbf{f}_4$ compleix el teorema de Pitàgores amb les tres primeres; és a dir, es verifica la condició $(\mathbf{f}_4)^2=(\mathbf{f}_1)^2+(\mathbf{f}_2)^2+(\mathbf{f}_3)^2$, on el quadrat d'una fila simbolitza el quadrat de cadascun dels seus elements. Troba l'última fila. Podem assegurar que és combinació lineal de les tres primeres?

Solució. Sigui la matriu donada on la última fila és desconeguda.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 8 & 9 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores per a cada terme de la última fila, $h^2=(c_1)^2+(c_2)^2+(c_3)^2$, obtenim

$$x=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=\sqrt{9}=3 \qquad y=\sqrt{2^2+3^2+6^2}=\sqrt{49}=7$$

$$z=\sqrt{1^2+4^2+8^2}=\sqrt{81}=9 \qquad t=\sqrt{2^2+6^2+9^2}=\sqrt{121}=11$$

Per tant, l'última fila és $\boxed{\mathbf{f}_4=(3\ 7\ 9\ 11)}$

Mirem si $\mathbf{f}_4$ és combinació lineal de $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ i $\mathbf{f}_3$. Perquè sigui així, hem de trobar tres nombres reals α, β i γ en què:

$$\mathbf{f}_4=\alpha.\mathbf{f}_1+\beta.\mathbf{f}_2+\gamma.\mathbf{f}_3$$

Substituint, $(3\ 7\ 9\ 11)=\alpha.(1\ 2\ 1\ 2)+\beta.(2\ 3\ 4\ 6)+\gamma.(2\ 6\ 8\ 9)$

Multiplicant els nombres per les matrius,

$$(3\ 7\ 9\ 11)=(\alpha\ 2\alpha\ \alpha\ 2\alpha)+(2\beta\ 3\beta\ 4\beta\ 6\beta)+(2\gamma\ 6\gamma\ 8\gamma\ 9\gamma)$$

Sumant les matrius,

$$(3\ 7\ 9\ 11)=(\alpha+2\beta+2\gamma\quad 2\alpha+3\beta+6\gamma\quad \alpha+4\beta+8\gamma\quad 2\alpha+6\beta+9\gamma)$$

Identificant els termes corresponents, ens queda el sistema

$$\begin{cases} \alpha+2.\beta+2.\gamma=3 & (1) \\ 2.\alpha+3.\beta+6.\gamma=7 & (2) \\ \alpha+4.\beta+8.\gamma=9 & (3) \\ 2.\alpha+6.\beta+9.\gamma=11 & (4) \end{cases}$$

Agafem únicament les tres primeres i mirem d'eliminar γ

$3.(1)-(2)$: $3.\alpha+6.\beta+6.\gamma=9$ $\quad$ $4.(1)-(3)$: $4.\alpha+8.\beta+8\gamma=12$

$-2.\alpha-3.\beta-6.\gamma=-7$ $\quad$ $-\alpha-4.\beta-8.\gamma=-9$

Sumant,

$\alpha+3.\beta=2\quad(1')$ $\qquad$ $3.\alpha+4.\beta=3\quad(2')$

Resolem el sistema (1') i (2') multiplicant la primera equació per 4, la segona per (-3) i sumant

$$4.(1')-3.(2'):\quad (4.\alpha+12.\beta)-(9.\alpha+12.\beta)=8-9\ ,\ -5.\alpha=-1\ ,\ \boxed{\alpha=1/5}.$$

Substituint en (1'), $(1/5)+3.\beta=2$, $1+15.\beta=10$, $15.\beta=9$, $5.\beta=3$, $\boxed{\beta=3/5}$. Trobem ara γ substituint en (1): $(1/5)+2.(3/5)+2.\gamma=3$, $1+6+10.\gamma=15$, $10.\gamma=8$, $5.\gamma=4$, $\boxed{\gamma=4/5}$.

Finalment, com que ens hem deixat l'última equació, (4), cal comprovar-la per als tres valors trobats:

$$2.\alpha+6.\beta+9.\gamma=2.(1/5)+6.(3/5)+9.(4/5)=(2+18+36)/5=56/5=11'2$$

Ara bé, com que de (4) es té $2.\alpha+6.\beta+9.\gamma=11$ i com que $11'2\neq 11$, resulta que no se satisfà l'equació (4) i, per tant, els valors de α, β i γ no són solució del sistema original.

Per tant, l'última fila no és combinació lineal de les tres primeres, $\boxed{\mathbf{f}_4\neq\alpha.\mathbf{f}_1+\beta.\mathbf{f}_2+\gamma.\mathbf{f}_3}$.

8. Estudia si són linealment dependents les files de la matriu A, trobant els valors α i β de manera que $\mathbf{f}_3=\alpha.\mathbf{f}_1+\beta.\mathbf{f}_2$. Passarà el mateix per a les columnes? Calcula una combinació lineal. La matriu és:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 8 \\ 5 & 1 & -1 & 12 \\ 0 & 7 & 23 & 4 \end{pmatrix}.$$

Solució. Posem l'última fila $\mathbf{f}_3=(0\ 7\ 23\ 4)$ en combinació lineal de les dues primeres $\mathbf{f}_1=(3\ 2\ 4\ 8)$ i $\mathbf{f}_2=(5\ 1\ -1\ 12)$, és a dir

$$\mathbf{f}_3=\alpha.\mathbf{f}_1+\beta.\mathbf{f}_2 \quad\Rightarrow\quad (0\ 7\ 23\ 4)=\alpha.(3\ 2\ 4\ 8)+\beta.(5\ 1\ -1\ 12)$$

Multiplicant, $(0\ 7\ 23\ 4)=(3.\alpha\ 2.\alpha\ 4.\alpha\ 8.\alpha)+(5.\beta\ \beta\ -\beta\ 12.\beta)$

Sumant, $(0\ 7\ 23\ 4)=(3.\alpha+5.\beta\ \ 2.\alpha+\beta\ \ 4.\alpha-\beta\ \ 8.\alpha+12.\beta)$

Igualant els termes corresponents, ens queda el sistema de quatre equacions amb dues incògnites

$$3.\alpha+5.\beta=0\ (1) \qquad 2.\alpha+\beta=7\ (2) \qquad 4.\alpha-\beta=23\ (3) \qquad 8.\alpha+12.\beta=4\ (4)$$

Si considerem només la (2) i la (3) i les sumem, $6.\alpha=30$, $\alpha=5$. Substituint en (2), $\beta=7-2.\alpha=7-2.5=7-10=-3$, $\beta=-3$.

Comprovem les altres dues equacions:

(1) $3.\alpha+5.\beta=3.5+5.(-3)=15-15=0$ es verifica.

(4) $8.\alpha+12.\beta=8.5+12.(-3)=40-36=4$ i també es verifica.

En resum, podem dir que $\mathbf{f}_3$ és combinació lineal de $\mathbf{f}_1$ i $\mathbf{f}_2$, ja que $\mathbf{f}_3=5.\mathbf{f}_1-3.\mathbf{f}_2$, i, per tant, $\boxed{\{\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_3\}\text{ són linealment dependents}}$.

Mirem ara si les *columnes* són també linealment dependents. Posem l'última columna $\mathbf{c}_4=(8\ 12\ 4)'$ com a combinació lineal de les tres primeres $\mathbf{c}_1=(3\ 5\ 0)'$, $\mathbf{c}_2=(2\ 1\ 7)'$ i $\mathbf{c}_3=(4\ -1\ 23)'$:

$$\mathbf{c}_4=\alpha.\mathbf{c}_1+\beta.\mathbf{c}_2+\gamma.\mathbf{c}_3 \quad \Rightarrow \quad (8\ 12\ 4)'=\alpha.(3\ 5\ 0)'+\beta.(2\ 1\ 7)'+\gamma.(4\ -1\ 23)'$$

Multiplicant i sumant obtindrem

$$(8\ 12\ 4)'=(3.\alpha+2.\beta+4.\gamma\ \ 5.\alpha+\beta-\gamma\ \ 7.\beta+23.\gamma)$$

Hem de resoldre el sistema de tres equacions amb tres incògnites:

$$3.\alpha+2.\beta+4.\gamma=8 \ (1) \qquad 5.\alpha+\beta-\gamma=12 \ (2) \qquad 7.\beta+23.\gamma=4 \ (3)$$

Eliminem α amb les dues primeres equacions, multiplicant la (1) per 5, la (2) per -3, i sumant

$$\begin{array}{r} 15.\alpha+10.\beta+20.\gamma=40 \\ \underline{-15.\alpha-3.\beta+3.\gamma=-36} \\ 7.\beta+23.\gamma=4 \end{array}$$

Com que ens ha quedat igual que (3), això vol dir que el sistema tendrà infinites solucions. Aïllant β en aquesta equació, tenim:

$$\beta=\frac{4-23.\gamma}{7} \qquad \text{Si per exemple } \gamma=2 \ \Rightarrow \ \beta=\frac{4-46}{7}=-6$$

Trobem α substituint en (2), $5.\alpha+(-6)-2=12$, $5.\alpha=20$, $\alpha=4$.

D'aquesta manera, una possible combinació lineal entre les columnes pot ser $\mathbf{c}_4=4.\mathbf{c}_1-6.\mathbf{c}_2+2.\mathbf{c}_3$.

Conclusió: $\boxed{\{\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\mathbf{c}_3,\mathbf{c}_4\} \text{ són també linealment dependents}}$.

Rang d'una matriu

9. Aplica la regla del pivot en el mètode de reducció de Gauss per trobar el rang de les dues matrius següents:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 3 & 2 & 0 \\ 11 & 12 & 1 & 1 & -4 \\ 5 & 5 & -2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad N=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ -5 & 0 & -15 & 20 \\ 12 & 8 & 4 & -8 \\ -3 & -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Solució. Començarem pel terme inicial a_{11} i fem tots els productes possibles de la manera indicada

$$M=\left(\begin{array}{c|cccc} \boxed{1} & 2 & 5 & 3 & 4 \\ \hline 6 & 7 & 3 & 2 & 0 \\ 11 & 12 & 1 & 1 & -4 \\ 5 & 5 & -2 & -1 & -4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ \hline 0 & -5 & -27 & -16 & -24 \\ 0 & -10 & -54 & -32 & -48 \\ 0 & -5 & -27 & -16 & -24 \end{array}\right) \equiv$$

Per exemple, el primer és $b_{22}=a_{11}.a_{22}-a_{21}.a_{12}=1.7-6.2=7-12=-5$ i l'últim $b_{45}=a_{11}.a_{45}-a_{41}.a_{15}=1.(-4)-5.4=-4-20=-24$.

Després de dividir la segona i la quarta fila per -1 i la tercera per -2, continuem el mètode del pivot, agafant, però, com a element multiplicador el $b_{22}=5$.

$$\equiv\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & \boxed{5} & 27 & 16 & 24 \\ 0 & 5 & 27 & 16 & 24 \\ 0 & 5 & 27 & 16 & 24 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 27 & 16 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El primer terme que trobem és el $c_{33}=b_{22}.b_{33}-b_{32}.b_{23}$, que ens dóna $c_{33}=5.27-5.27=0$, i el mateix ens resulta per als altres productes.

No cal continuar fent operacions, perquè la matriu, com es pot veure a la figura, ja ens ha quedat escalonada. Com que la matriu té dues files diferents de la fila nul·la (la formada únicament per zeros) i és equivalent (≡) quant al rang a la matriu inicial M, podem dir que el seu rang és dos, $\boxed{\rho(M)=2}$.

De manera similar actuem amb la matriu N, simplificant-la primer i després aplicant el mètode del pivot per $a_{11}=1$.

$$N=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ -5 & 0 & -15 & 20 \\ 12 & 8 & 4 & -8 \\ -3 & -4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \equiv$$

Després el tornem aplicar per $b_{22}=1$ i finalment per $c_{33}=2$, i la matriu ja queda escalonada

$$\equiv\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Com que el nombre de files diferents de la fila nul·la de la matriu equivalent és 3, el seu rang és $\boxed{\rho(N)=3}$.

10. Per mitjà de les matrius fila, dedueix el rang de la matriu següent, emprant el mètode de reducció de Gauss. Escriu les combinacions lineals que has fet servir i després troba la relació que hi ha entre les últimes files i les primeres. Farem servir la matriu P, que té per vectors files $\mathbf{f}_1=(-2,-4,3,4,1,8)$, $\mathbf{f}_2=(1,2,0,-2,1,-1)$, $\mathbf{f}_3=(3,6,3,-6,6,3)$ i $\mathbf{f}_4=(2,4,2,-4,4,2)$:

Solució. Apuntem en primer lloc la matriu donada P(4×6), indicant explícitament les seves quatre files

$$P=\begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 & 4 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & 3 & -6 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{matrix}$$

Com que hem de fer servir el mètode de reducció de Gauss per calcular el rang, deixem fixa la fila f_1 i transfomem les altres files en unes que tinguin el primer terme nul.

Les combinacions lineals que es poden fer entre la primera fila i la fila corrresponent són

$$P\equiv\begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 15 & 0 & 15 & 30 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 5 & 10 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ g_2=2.f_2+f_1 \\ g_3=2.f_3+3.f_1 \\ g_4=f_4+f_1 \end{matrix}$$

Continuem escalonant la matriu agafant com a fixa la fila g_2 i fent que els termes sota a_{22} siguin nuls. Fent les combinacions lineals necessàries obtenim

$$P\equiv\begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ h_3=g_3-5.g_2 \\ h_4=3.g_4-5.g_2 \end{matrix}$$

No cal continuar, ja que la matriu P està escalonada (és a dir que té un triangle inferior-esquerre format per sis zeros). El rang de la matriu és $\boxed{\rho(P)=2}$.

Això voldrà dir que hi ha dues files linealment independents, per exemple f_1 i f_2, mentre que f_3 i f_4 depenen linealment d'aquestes dues. Trobem ara aquesta *relació de dependència*.

Com que $h_3=(0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$ és la fila nul·la, $h_3=f_0$, substituint per les combinacions lineals que hem fet servir ens queda

$$g_3-5.g_2=f_0\ ,\ (2.f_3+3.f_1)-5.(2.f_2+f_1)=f_0\ ,\ 2.f_3+3.f_1-10.f_2-5.f_1=f_0$$

$$-2.f_1-10.f_2+2.f_3=f_0\ ,\ -f_1-5.f_2+f_3=f_0\ ,\ \boxed{f_3=f_1+5.f_2}.$$

De la mateixa manera obtenim:

$$h_4=f_0\ ,\ 3.g_4-5.g_2=f_0\ ,\ 3.(f_4+f_1)-5.(2.f_2+f_1)=f_0$$

$$3.f_4+3.f_1-10.f_2-5.f_1=f_0\ ,\ -2.f_1-10.f_2+3.f_4=f_0\ ,\ 3.f_4=2.f_1+10.f_2$$

$$f_4=(2.f_1+10.f_2)/3 \text{ o també } \boxed{f_4=2.(f_1+5.f_2)/3}.$$

Per a comprovar aquestes dues combinacions lineals trobades, només cal substituir.

11. Per als diferents valors del paràmetre m, $m \neq 0$, estudia el rang de la matriu A, utilitzant la regla del pivot en el mètode de reducció de Gauss:

$$A=\begin{pmatrix} 2m & 3 & 1 \\ 2 & 3m & 1 \\ 2 & 3 & m \end{pmatrix}$$

Solució. Sigui $a_{11}=2.m$ l'element pivot. Fent els productes d'aquest terme amb alguns altres de la matriu, com ens indica el mètode del pivot, com per exemple $b_{22}=a_{11}.a_{22}-a_{21}.a_{12}$, que dóna $b_{22}=2.m.3.m-2.3=6.m^2-6$, tenim:

$$A=\left(\begin{array}{c|cc} \boxed{2.m} & 3 & 1 \\ \hline 2 & 3.m & 1 \\ 2 & 3 & m \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{c|cc} 2.m & 3 & 1 \\ \hline 0 & 6.m^2-6 & 2.m-2 \\ 0 & 6.m-6 & 2.m^2-2 \end{array}\right)$$

Dividint la segona i tercera fila per 2, traient factor comú i continuant el mètode del pivot per l'element b_{22}, ens queda

$$A\equiv\left(\begin{array}{ccc} 2.m & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{3.(m^2-1)} & m-1 \\ 0 & 3.(m-1) & m^2-1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc} 2.m & 3 & 1 \\ 0 & 3.(m^2-1) & m-1 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{array}\right)$$

Per raons pràctiques, trobem el terme c_{33} explícitament, ja que és un element bàsic per al càlcul del rang de la matriu.

$$c_{33}=3.(m^2-1)^2-3.(m-1)^2=3.(m^4-2.m^2+1)-3.(m^2-2.m+1)=$$
$$=3.(m^4-2.m^2+1-m^2+2.m-1)=3.(m^4-3.m^2+2.m)$$

Calculem els valors de m que anul·len c_{33}. Igualant a zero,

$$3.(m^4-3.m^2+2.m)=0 \Rightarrow m^4-3.m^2+2.m=0 \Rightarrow m.(m^3-3.m+2)=0$$

Una solució és $m=0$ però no és vàlida, ja que per hipòtesi $m\neq 0$. Les altres les obtenim resolent l'equació cúbica $m^3-3.m+2=0$. Es veu ben clar que una altra solució és $\boxed{m_1=1}$.

Comprovem-ho per Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & (0 \end{array}$$

Si fem l'equació resultant, $m^2+m-2=0$, obtenim

$$m=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4.1.(-2)}}{2.1}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}$$

Amb el signe positiu ens queda $m=1$ que ja teníem. Amb el signe negatiu tindrem $\boxed{m_2=-2}$.

Estudiarem ara el *rang de la matriu* donada pels tres casos conflictius:

PRIMER CAS: $m=1$. Substituint aquest valor de m a la matriu escalonada, obtindrem

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{El seu rang és } \boxed{\rho(A)=1}$$

SEGON CAS: m=-2. També substituint ens quedarà:

$$A=\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 0 & 45 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{El seu rang és } \boxed{\rho(A)=2}$$

TERCER CAS: $m\neq 1$ i $m\neq -2$ (i també per hipòtesi $m\neq 0$)

$$A=\begin{pmatrix} 2.m & 3 & 1 \\ 0 & 3.(m^2-1) & m-1 \\ 0 & 0 & c_{33}\neq 0 \end{pmatrix} \quad \text{El seu rang és } \boxed{\rho(A)=3}$$

1.2. OPERACIONS AMB MATRIUS

Operacions elementals: ('), (+) i (.)

12. A principi de maig, una companyia de roba de vestir formada per tres sucursals ven 4 classes de productes: camises, pantalons, jerseis i americanes. Les existències actuals són 52c, 68p, 73j i 49a per a la primera sucursal, 33c, 47p, 85j i 21a per a la segona i 59c, 76p, 80j i 97a per a la tercera.

Les vendes al cap del mes han estat de 17c, 32p, 21j i 16a per a la primera sucursal, 22c, 12p, 35j i 5a per a la segona i 28c, 13p, 24j i 36a per a la tercera. Expressa en forma matricial la matriu d'existències, la matriu de vendes i la nova matriu d'existències.

Solució. En primer lloc fem unes taules de doble entrada on es reflecteixen les existències de roba i les vendes en les sucursals.

EXISTÈNCIES

SUC.	Cam	Pan	Jer	Ame
1ª	52	68	73	49
2ª	33	47	85	21
3ª	59	76	80	97

VENDES

SUC.	Cam	Pan	Jer	Ame
1ª	17	32	21	16
2ª	22	12	35	5
3ª	28	13	24	36

Tant les existències inicials, E_1, com les vendes, V, les podem escriure en forma matricial

$$E_1=\begin{pmatrix} 52 & 68 & 73 & 49 \\ 33 & 47 & 85 & 21 \\ 59 & 76 & 80 & 97 \end{pmatrix} \qquad V=\begin{pmatrix} 17 & 32 & 21 & 16 \\ 22 & 12 & 35 & 5 \\ 28 & 13 & 24 & 36 \end{pmatrix}$$

La nova matriu d'existències E_2 és, evidentment, la diferència de les dues matrius anteriors

$$E_2=E_1-V=\begin{pmatrix} 52-17 & 68-32 & 73-21 & 49-16 \\ 33-22 & 47-12 & 85-35 & 21-5 \\ 59-28 & 76-13 & 80-24 & 97-36 \end{pmatrix}$$

Fent aquestes diferències, obtenim

$$E_2=\begin{pmatrix} 35 & 36 & 52 & 33 \\ 11 & 35 & 50 & 16 \\ 31 & 63 & 56 & 61 \end{pmatrix}$$

Retornant al quadre esquemàtic inicial, és ben clar que el nombre de camises, pantalons, jerseis i americanes que existiran a cada sucursal serà

NOVES EXISTÈNCIES

SUC.	Cam	Pan	Jer	Ame
1ª	35	36	52	33
2ª	11	35	50	16
3ª	31	63	56	61

13. Per a les dues matrius A i B troba les matrius C=A+B i D=A-B i després E=(1/2).C i F=(1/2).D. Què donarà la matriu suma de E i F?I la matriu diferència? Comprova-ho fent-ho directament. Les matrius donades són:

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 7 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B=\begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 7 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Solució. Trobem les matrius suma i diferència, sumant i restant els termes corresponents

$$C=A+B=\begin{pmatrix} -2 & 7 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 7 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2-2 & 7+5 & 0+2 \\ 5+7 & 4+4 & 1-5 \\ 2+0 & -5+1 & 5+5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 12 & 2 \\ 12 & 8 & -4 \\ 2 & -4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$D=A-B=\begin{pmatrix} -2 & 7 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 7 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2+2 & 7-5 & 0-2 \\ 5-7 & 4-4 & 1+5 \\ 2-0 & -5-1 & 5-5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 6 \\ 2 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Trobem ara E=C/2 i F=D/2. Fem-ho en primer lloc amb el càlcul matricial.

$$E=\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -4 & 12 & 2 \\ 12 & 8 & -4 \\ 2 & -4 & 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4/2 & 12/2 & 2/2 \\ 12/2 & 8/2 & -4/2 \\ 2/2 & -4/2 & 10/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 6 & 1 \\ 6 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$F=\frac{D}{2}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 6 \\ 2 & -6 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0/2 & 2/2 & -2/2 \\ -2/2 & 0/2 & 6/2 \\ 2/2 & -6/2 & 0/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriu suma E+F és:

$$E+F=\begin{pmatrix}-2&6&1\\6&4&-2\\1&-2&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&3\\1&-3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+0&6+1&1-1\\6-1&4+0&-2+3\\1+1&-2-3&5+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&7&0\\5&4&1\\2&-5&5\end{pmatrix}$$

Observem que el resultat és la matriu inicial A, $\boxed{E+F=A}$.

Fem el mateix per a la diferència de matrius, E-F

$$E-F=\begin{pmatrix}-2&6&1\\6&4&-2\\1&-2&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&3\\1&-3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-0&6-1&1+1\\6+1&4-0&-2-3\\1-1&-2+3&5-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&5&2\\7&4&-5\\0&1&5\end{pmatrix}$$

En aquest cas la matriu diferència és la B, $\boxed{E-F=B}$.

Comprovem-ho directament substituint en les definicions de C, D, E i F:

$$E+F=\frac{C}{2}+\frac{D}{2}=\frac{C+D}{2}=\frac{(A+B)+(A-B)}{2}=\frac{A+B+A-B}{2}=\frac{2.A}{2}=A$$

$$E-F=\frac{C}{2}-\frac{D}{2}=\frac{C-D}{2}=\frac{(A+B)-(A-B)}{2}=\frac{A+B-A+B}{2}=\frac{2.B}{2}=B$$

14. Direm que tres matrius A, B i C són linealment dependents si podem trobar dos números α i β de manera que α.A+β.B=C. Calcula els valors dels paràmetres x i y a la matriu C perquè les tres matrius siguin dependents. Quina és la relació de dependència? Les matrius són:

$$A=\begin{pmatrix}-1&2&3\\-3&4&-1\\0&1&-2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-3&5&-2\\1&0&-5\end{pmatrix}\quad i\quad C=\begin{pmatrix}-5&x&y\\-9&10&-1\\-2&5&0\end{pmatrix}$$

Solució. Calculem la combinació lineal α.A+β.B de les matrius donades A i B.

$$\alpha.A+\beta.B=\alpha.\begin{pmatrix}-1&2&3\\-3&4&-1\\0&1&-2\end{pmatrix}+\beta.\begin{pmatrix}0&-1&1\\-3&5&-2\\1&0&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\alpha&2.\alpha-\beta&3.\alpha+\beta\\-3.\alpha-3.\beta&4.\alpha+5.\beta&-\alpha-2.\beta\\\beta&\alpha&-2.\alpha-5.\beta\end{pmatrix}$$

Com que ha de passar que α.A+β.B=C, igualem les matrius

$$\begin{pmatrix}-\alpha&2.\alpha-\beta&3.\alpha+\beta\\-3.\alpha-3.\beta&4.\alpha+5.\beta&-\alpha-2.\beta\\\beta&\alpha&-2.\alpha-5.\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&x&y\\-9&10&-1\\-2&5&0\end{pmatrix}$$

Es pot veure directament dels termes a_{32} i a_{31}, per exemple, que ha de ser $\boxed{\alpha=5}$ i $\boxed{\beta=-2}$.

Comprovem que es verifica pels termes numèrics que falten i de passada trobem les indeterminades x i y, substituint a la matriu

$$\begin{pmatrix} -5 & 2.5-(-2) & 3.5+(-2) \\ -3.5-3.(-2) & 4.5+5.(-2) & -5-2.(-2) \\ -2 & 5 & -2.5-5.(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & x & y \\ -9 & 10 & -1 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, x=2.5-(-2), $\boxed{x=12}$ i també y=3.5+(-2), $\boxed{y=13}$.

15. Donades les matrius quadrades de tercer ordre A i B, determina dues matrius X i Y que verifiquin el sistema següent:

$$\begin{cases} 2.X-5.Y=A \\ -X+3.Y=B \end{cases} \quad \text{on } A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & -5 & -9 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Solució. Partim del sistema donat 2.X-5.Y=A (1), -X+3.Y=B (2). Sense substituir la A i la B per les seves matrius corresponents, resolem el sistema.

Eliminem primer la Y 3.(1)+5.(2):

$$\begin{array}{r} 6.X-15.Y=3.A \\ \underline{-5.X+15.Y=5.B} \\ \text{Sumant,} \quad X=3.A+5.B \end{array}$$

Fem el càlcul matricial

$$X=3.\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & -5 & -9 \end{pmatrix}+5.\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -6 & 12 \\ 0 & 3 & -9 \\ 12 & -15 & -27 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 10 & 5 & -10 \\ 15 & 0 & 5 \\ -5 & 15 & 30 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 3+10 & -6+5 & 12-10 \\ 0+15 & 3+0 & -9+5 \\ 12-5 & -15+15 & -27+30 \end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix} 13 & -1 & 2 \\ 15 & 3 & -4 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

Eliminem ara la X (1)+2.(2):

$$\begin{array}{r} 2.X-5.Y=A \\ \underline{-2.X+6.Y=2.B} \\ \text{Sumant,} \quad Y=A+2.B \end{array}$$

Substituint les matrius i operant, obtenim

$$Y=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & -5 & -9 \end{pmatrix}+2.\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & -5 & -9 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 6 & 0 & 2 \\ -2 & 6 & 12 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1+4 & -2+2 & 4-4 \\ 0+6 & 1+0 & -3+2 \\ 4-2 & -5+6 & -9+12 \end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}$$

16. Comprova la propietat de distributivitat numèrica amb els nombres racionals $\alpha=3/4$ i $\beta=-1/2$ i la matriu A de files $\mathbf{f}_1=(4\ 0\ -12)$, $\mathbf{f}_2=(0\ 8\ -4)$ i $\mathbf{f}_3=(-16\ 20\ 0)$.

Solució. Donats els números α i β i la matriu A, per comprovar la propietat de distributivitat numèrica hem de verificar la igualtat $\boxed{(\alpha+\beta).A=\alpha.A+\beta.A}$. Comprovem-ho.

$$(\alpha+\beta).A=[\frac{3}{4}+(-\frac{1}{2})].A=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -12 \\ 0 & 8 & -4 \\ -16 & 20 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\alpha.A+\beta.A=\frac{3}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -12 \\ 0 & 8 & -4 \\ -16 & 20 & 0 \end{pmatrix}+(\frac{-1}{2}).\begin{pmatrix} 4 & 0 & -12 \\ 0 & 8 & -4 \\ -16 & 20 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -9 \\ 0 & 6 & -3 \\ -12 & 15 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 0 & -4 & 2 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Al quedar igual els dos costats, voldrà dir que es verificarà la propietat esmentada.

17. Donades les matrius A i B següents, calcula les matrius X i Y que verifiquen X+Y'=A+B i X'-Y=A-B:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 6 & 7 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 5 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solució. Ccalculem primer la suma i la diferència de les dues matrius donades:

$$A+B=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 6 & 7 & -3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 5 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -3 & -2 \\ 3 & 8 & 3 \\ 4 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 6 & 7 & -3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 5 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 \\ -3 & -2 & -1 \\ 8 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

De les dues equacions (1): X+Y'=A+B i (2): X'-Y=A-B, que sembla "a priori" que tenen 4 incògnites X, X', Y i Y', mirarem d'arreglar la (2) transposant cada costat.

$$(2):\ (X'-Y)'=(A-B)' \Rightarrow X''-Y'=(A-B)' \Rightarrow X-Y'=(A-B)'$$

Per tant, el nou sistema serà

$$\begin{array}{lrl} & (1) & X+Y'=A+B \\ & (2) & \underline{X-Y'=(A-B)'} \\ \text{Sumant,} & & 2.X=(A+B)+(A-B)' \end{array}$$

D'aquesta manera, X=[(A+B)+(A-B)']/2. Si ara restem obtenim Y'=[(A+B)-(A-B)']/2, d'on podrem trobar la Y.

Substituint les matrius A+B i A-B, on aquesta última s'haurà de transposar (és a dir, canviar files per columnes) tenim

$$X=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 7 & -3 & -2 \\ 3 & 8 & 3 \\ 4 & 7 & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & -3 & 8 \\ -5 & -2 & 7 \\ 6 & -1 & -2 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 & -6 & 6 \\ -2 & 6 & 10 \\ 10 & 6 & -6 \end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & -3 \end{pmatrix}}$$

Per trobar la matriu Y restem les equacions matricials del sistema anterior, i després transposem

$$Y'=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 7 & -3 & -2 \\ 3 & 8 & 3 \\ 4 & 7 & -4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & -3 & 8 \\ -5 & -2 & 7 \\ 6 & -1 & -2 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -10 \\ 8 & 10 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 4 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Transposant,

$$Y=\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ -5 & -2 & -1 \end{pmatrix}}$$

Producte de matrius

18. Una empresa de mobles consta de 4 botigues repartides per la ciutat que venen armaris, cadires, taules i sofàs. Actualment les existències són de 8a, 26c, 12t i 5s per a la 1ª botiga, 15a, 32c, 14t i 7s per a la 2ª, 9a, 22c, 18t i14s per a la 3ª botiga i 7a, 24c, 16t i 10s per a la 4ª botiga.

Si els preus actuals de cada moble són 45000pts/a, 3200pts/c, 12500pts/t i 28900pts/s, calcula la "matriu inventari" M per a saber el capital total que pot disposar en cada botiga.

Solució: Esquematitzem en dues taules les dades de l'enunciat del problema

EXISTÈNCIES ACTUALS

BOT	Arm	Cad	Tau	Sof
1ª	8	26	12	5
2ª	15	32	14	7
3ª	9	22	18	14
4ª	7	24	16	10

PREU/UNIT

MOB	Preu
Arm	45000
Cad	3200
Tau	12500
Sof	28900

D'aquestes dues taules podem formar immediatament la *matriu d'existències* E i la *matriu de preus* P:

$$E=\begin{pmatrix} 8 & 26 & 12 & 5 \\ 15 & 32 & 14 & 7 \\ 9 & 22 & 18 & 14 \\ 7 & 24 & 16 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad P=\begin{pmatrix} 45000 \\ 3200 \\ 12500 \\ 28900 \end{pmatrix}$$

Per realitzar el problema sense fer servir el càlcul matricial i per trobar el capital de la primera botiga, per exemple, faríem:

C_1=(8a).(45000pts/a) + (26c).(3200pts/c) + (12t).(12500pts/t) + + (5s).(28900pts/s)= ... = 737700 pts

Recordant la definició de producte de matrius, és clar que si volem trobar la matriu del capital de cada botiga, o *matriu inventari* M, haurem de realitzar el producte de les dues matrius anteriors, $\boxed{M=E\bullet C}$.

Per simplificar els càlculs dividim els preus per 100, la qual cosa vol dir que les unitats són "centenars de pessetes".

$$M=\begin{pmatrix} 8 & 26 & 12 & 5 \\ 15 & 32 & 14 & 7 \\ 9 & 22 & 18 & 14 \\ 7 & 24 & 16 & 10 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 450 \\ 32 \\ 125 \\ 289 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8.450+26.32+12.125+5.289 \\ 15.450+32.32+14.125+7.289 \\ 9.450+22.32+18.125+14.289 \\ 7.450+24.32+16.125+10.289 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 3600+832+1500+1445 \\ 6750+1024+1750+2023 \\ 4050+704+2250+4046 \\ 3150+768+2000+2890 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7377 \\ 11547 \\ 11050 \\ 8808 \end{pmatrix}$$

Així, els capitals de què disposarà cada botiga són els següents:

$\boxed{C_1=737.700 \text{ pts}}$ $\boxed{C_2=1_1154.700 \text{ pts}}$

$\boxed{C_3=1_1105.000 \text{ pts}}$ $\boxed{C_4=880.800 \text{ pts}}$.

19. Aplicant la condició de conformitat i tenint en compte l'ordre de la matriu resultant, troba tots els productes possibles que es poden realitzar amb dues matrius diferents, per a les tres matrius:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad C=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Solució. Les dimensions de les matrius donades són A(2×3), B(3×2) i C(2×2).

Recordem que perquè es pugui efectuar el producte de dues matrius ha de passar que «el nombre de columnes de la primera matriu sigui igual al nombre de files de la segona».

El nombre total de possibles productes serà el de variacions de tres matrius agafades de dues en dues, $V_{3,2}=3.2=6$.

PRIMER CAS: A(2×3)•B(3×2) Possible A•B(2×2):

$$A\bullet B=\begin{pmatrix} \boxed{1\ -1\ 2} \\ \boxed{0\ 2\ -1} \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}2\\1\\4\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}-3\\0\\2\end{matrix}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boxed{1.2+(-1).1+2.4} & \boxed{1.(-3)+(-1).0+2.2} \\ \boxed{0.2+2.1+(-1).4} & \boxed{0.(-3)+2.0+(-1).2} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2-1+8 & -3+0+4 \\ 0+2-4 & 0+0-2 \end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}}$$

SEGON CAS: A(2×3)•C(2×2) No és possible (3≠2).

TERCER CAS: B(3×2)•A(2×3) Possible B•A(3×3):

$$B\bullet A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2.1+(-3).0 & 2.(-1)+(-3).2 & 2.2+(-3).(-1) \\ 1.1+0.0 & 1.(-1)+0.2 & 1.2+0.(-1) \\ 4.1+2.0 & 4.(-1)+2.2 & 4.2+2.(-1) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2+0 & -2-6 & 4+3 \\ 1+0 & -1+0 & 2+0 \\ 4+0 & -4+4 & 8-2 \end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix} 2 & -8 & 7 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}}$$

QUART CAS: B(3×2)•C(2×2) Possible B•C(3×2):

$$B\bullet C=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2.2+(-3).2 & 2.1+(-3).3 \\ 1.2+0.2 & 1.1+0.3 \\ 4.2+2.2 & 4.1+2.3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 4-6 & 2-9 \\ 2+0 & 1+0 \\ 8+4 & 4+6 \end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 2 & 1 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}}$$

CINQUÈ CAS: C(2×2)•A(2×3) Possible C•A(2×3):

$$C\bullet A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2.1+1.0 & 2.(-1)+1.2 & 2.2+1.(-1) \\ 2.1+3.0 & 2.(-1)+3.2 & 2.2+3.(-1) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2+0 & -2+2 & 4-1 \\ 2+0 & -2+6 & 4-3 \end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}}$$

SISÈ CAS: C(2×2)•B(3×2) No és possible (2≠3).

20. Estudia la condició de conformitat, i comprova que no és commutatiu el producte matricial (•) amb les matrius:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Solució. Fem primer el producte de A per B, i observa que és possible, ja que A(2×3)•B(3×2)=A•B(2×2):

$$A\bullet B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2-3+4 & 4+0-6 \\ 0+9+20 & 0+0-30 \end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 29 & -30 \end{pmatrix}}$$

D'altra banda, també és possible realitzar el producte de la matriu B per la A perquè B(3×2)•A(2×3)=B•A(3×3).

Observem que no es verifica la commutativitat $\boxed{A \bullet B \neq B \bullet A}$, perquè A•B és una matriu quadrada de segon ordre i B•A una altra de tercer ordre. Trobem, però, aquest últim producte.

$$B \bullet A = \begin{pmatrix} \boxed{-1 \ \ 2} \\ \boxed{3 \ \ 0} \\ \boxed{4 \ -6} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 3 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 5 \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+0 & 1+6 & -1+10 \\ 6+0 & -3+0 & 3+0 \\ 8+0 & -4-18 & 4-30 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 7 & 9 \\ 6 & -3 & 3 \\ 8 & -22 & -26 \end{pmatrix}}$$

21. Calcula els productes A•B i B•A de les matrius quadrades de tercer ordre següents i analitza el resultat:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Solució. Multipliquem les matrius tenint en compte les files de la primera matriu i les columnes de la segona. Així, per exemple, el terme c_{12} dela matriu producte és la suma dels productes corresponents de la fila $\mathbf{f}_1=(a_{11}\ a_{12}\ a_{13})$ per la columna $\mathbf{c}_2=(b_{12}\ b_{22}\ b_{32})$, que ens donarà el valor $c_{12}=a_{11}.b_{12}+a_{12}.b_{22}+a_{13}.b_{32}$.

No cal dir que les dues matrius són multiplicables, ja que totes dues són matrius quadrades de tercer ordre. Per exemple,

$$A(3\times3) \bullet B(3\times3) = A \bullet B(3\times3)$$

D'una banda tindrem,

$$A \bullet B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2+2 & -2+2+0 & 1+0-1 \\ 1-3+2 & -2+3+0 & 1+0-1 \\ 2-4+2 & -4+4+0 & 2+0-1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad \Rightarrow \quad A \bullet B = I$$

D'altra banda ens quedarà,

$$B \bullet A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2+2 & 2-6+4 & 3-6+3 \\ -1+1+0 & -2+3+0 & -3+3+0 \\ (2/3)-(2/3) & (4/3)-(4/3) & 2+0-1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad \Rightarrow \quad B \bullet A = I$$

En resum, A•B=B•A=I, la qual cosa significa que A i B són matrius inverses, perquè són commutables i el seu producte és la matriu unitat.

Podrem escriure $\boxed{B=A^{-1}}$ o també $\boxed{A=B^{-1}}$.

22. Donades les matrius A i B següents, aplica les operacions de producte i de transposició per trobar (A•B)', (B•A)', A'•B' i B'•A'. Quines relacions d'igualtat es verifiquen? Les matrius són:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B=\begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solució. Calculem cadascun dels productes matricials,

$$A\bullet B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7+0+2 & 6+0-4 & -1+0+2 \\ 0+3+1 & 0+0-2 & 0-3+1 \\ -28+2+0 & 24+0+0 & -4-2+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \\ -26 & 24 & -6 \end{pmatrix}$$

$$B\bullet A=\begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7+0-4 & 0+18-2 & -14+6+0 \\ 1+0-4 & 0+0-2 & 2+0+0 \\ 1+0+4 & 0-6+2 & 2-2+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -11 & 16 & -8 \\ -3 & -2 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Les transposades d'aquestes matrius són,

$$(A\bullet B)'=\boxed{\begin{pmatrix} -5 & 4 & -26 \\ 2 & -2 & 24 \\ 1 & -2 & -6 \end{pmatrix}} \quad \text{i} \quad (B\bullet A)'=\boxed{\begin{pmatrix} -11 & -3 & 5 \\ 16 & -2 & -4 \\ -8 & 2 & 0 \end{pmatrix}}$$

Les transposades de les matrius donades A i B són,

$$A'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B'=\begin{pmatrix} -7 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si fem els productes demanats, ens queda

$$A'\bullet B'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} -7 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7+0-4 & 1+0-4 & 1+0+4 \\ 0+18-2 & 0+0-2 & 0-6+2 \\ -14+6+0 & 2+0+0 & 2-2+0 \end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix} -11 & -3 & 5 \\ 16 & -2 & -4 \\ -8 & 2 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$B'\bullet A'=\begin{pmatrix} -7 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7+0+2 & 0+3+1 & -28+2+0 \\ 6+0-4 & 0+0-2 & 24+0+0 \\ -1+0+2 & 0-3+1 & -4-2+0 \end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix} -5 & 4 & -26 \\ 2 & -2 & 24 \\ 1 & -2 & -6 \end{pmatrix}}$$

Observem com es verifica per aquest cas la propietat general: «la transposada d'un producte de matrius és igual al producte, en ordre invers, de les seves matrius transposades». En efecte, ens ha resultat que $\boxed{(A\bullet B)'=B'\bullet A'}$ i $\boxed{(B\bullet A)'=A'\bullet B'}$.

23. Donades les matrius B i C de $M_{2\times3}$, troba l'ordre ord(A)=m×n d'una altra matriu A perquè es pugui verificar la igualtat A•B=C. Quina és la matriu A? Quant han de valer els dos paràmetres desconeguts x i y? Les matrius són:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 7 & x \\ 5 & 0 & y \end{pmatrix}$$

Solució. La matriu A desconeguda té un ordre $A(m\times n)$. Com que ha de ser multiplicable amb la $B(2\times3)$ i ha de donar la $C(2\times3)$:

$$A(m\times n)\bullet B(2\times3)=C(2\times3) \Rightarrow m=2 \text{ i } n=2.$$

Per tant, A ha de ser una matriu quadrada de segon ordre. Si els seus termes són $a_{11}=a$, $a_{12}=b$, $a_{21}=c$ i $a_{22}=d$, tenim

$$A\bullet B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+2.b & 2.a-b & -3.a+4.b \\ c+2.d & 2.c-d & -3.c+4.d \end{pmatrix}$$

Com que ha de passar que $A\bullet B=C$, igualant

$$\begin{pmatrix} a+2.b & 2.a-b & -3.a+4.b \\ c+2.d & 2.c-d & -3.c+4.d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 7 & x \\ 5 & 0 & y \end{pmatrix}$$

Ens resulten dos sistemes d'equacions, més dues equacions que ens permeteran trobar els paràmetres x i y:

$$(1)\ \begin{cases} a+2.b=1 \\ 2.a-b=7 \end{cases},\quad (2)\ \begin{cases} c+2.d=5 \\ 2.c-d=0 \end{cases},\quad (3)\ \begin{cases} x=-3.a+4.b \\ y=-3.c+4.d \end{cases}$$

Multipliquem la segona equació per 2 i la sumem amb la primera,

$$\begin{array}{c} a+2.b=1 \\ \underline{4.a-2.b=14} \\ 5.a=15 \ \Rightarrow\ \boxed{a=3} \end{array} \qquad \begin{array}{c} c+2.d=5 \\ \underline{4.c-2.d=0} \\ 5.c=5 \ \Rightarrow\ \boxed{c=1} \end{array}$$

Substituint tenim,

$$a+2.b=1\ ,\ 3+2.b=1\ ,\ 2.b=-2\ ,\ \boxed{b=-1}$$

$$c+2.d=5\ ,\ 1+2.d=5\ ,\ 2.d=4\ ,\ \boxed{d=2}$$

La matriu demanada és, doncs,

$$A=\boxed{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

Trobem finalment els paràmetres x i y, substituint en (3),

$$x=-3.a+4.b=-3.3+4.(-1)=-9-4=\boxed{-13}$$

$$y=-3.c+4.d=-3.1+4.2=-3+8=\boxed{5}$$

24. Trobant el producte $A\bullet B$ de les dues matrius A i B, comprova que són divisors de zero. Passarà el mateix amb el producte $B\bullet A$? Les dues matrius són:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ i } B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Solució. Fem primer el producte de la matriu A per la B

$$A\bullet B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-2+1 & 2-4+2 & 3-6+3 \\ -3+4-1 & -6+8-2 & -9+12-3 \\ -2+2+0 & -4+4+0 & -6+6+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=O$$

Designant amb O la matriu nul·la, i com que $A \neq O$, $B \neq O$ i $A \bullet B = O$, direm que, efectivament, $\boxed{\text{A i B són divisors de zero}}$.

Recordem que, en general, el producte de les matrius no és commutatiu, per la qual cosa no podem assegurar, en principi, si també $B \bullet A = O$. Calculem-ho:

$$B \bullet A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-6-6 & -1+4+3 & 1-2+0 \\ 2-12-12 & -2+8+6 & 2-4+0 \\ 1-6-6 & -1+4+3 & 1-2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

Observem, doncs, que $B \bullet A \neq O$.

25. Quina condició s'ha de verificar per tal que dues matrius A i B compleixin la igualtat $(A-B)^2 = A^2 + B^2$? Comprova-ho per a les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Solució. Trobem la condició que hauran de complir A i B perquè es verifiqui la fórmula anterior. Desenvolupem el primer membre,

$$(A-B)^2 = (A-B) \bullet (A-B) = A \bullet A + A \bullet (-B) + (-B) \bullet A + (-B) \bullet (-B) =$$
$$= A^2 - A \bullet B - B \bullet A + B^2$$

Com que el resultat ha de coincidir amb $A^2 + B^2$, això significa que $-A \bullet B - B \bullet A$ ha de ser la matriu nul·la, $-A \bullet B - B \bullet A = O$, $\boxed{A \bullet B + B \bullet A = O}$.

Aquesta condició també es pot expressar amb $\boxed{A \bullet B = -B \bullet A}$, i llavors direm que el producte de A i B ha de ser "anticommutatiu".

Comprovem que les matrius A i B donades compleixen la igualtat $(A-B)^2 = A^2 + B^2$:

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & -3-3 & -5-5 \\ -1-1 & 4+3 & 5+5 \\ 1+1 & -3-3 & -4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -10 \\ -2 & 7 & 10 \\ 2 & -6 & -9 \end{pmatrix}$$

$$(A-B)^2 = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -10 \\ -2 & 7 & 10 \\ 2 & -6 & -9 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 & -6 & -10 \\ -2 & 7 & 10 \\ 2 & -6 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+12-20 & -18-42+60 & -30-60+90 \\ -6-14+20 & 12+49-60 & 20+70-90 \\ 6+12-18 & -12-42+54 & -20-60+81 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Ara trobem $A^2 + B^2$ i comprovem que també s'obté la matriu unitat.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3-5 & -6-12+15 & -10-15+20 \\ -2-4+5 & 3+16-15 & 5+20-20 \\ 2+3-4 & -3-12+12 & -5-15+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3-5 & -3-9+15 & -5-15+25 \\ -1-3+5 & 3+9-15 & 5+15-25 \\ 1+3-5 & -3-9+15 & -5-15+25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Observem que $A^2=A$ i $B^2=B$ (com que es compleix aquesta propietat, A i B es diuen "matrius idempotents"). Trobem A^2+B^2,

$$A^2+B^2=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-1 & -3+3 & -5+5 \\ -1+1 & 4-3 & 5-5 \\ 1-1 & -3+3 & -4+5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

Ja hem comprovat que $(A-B)^2=A^2+B^2$, però encara ens falta veure que les matrius A i B compleixen la condició $A\bullet B+B\bullet A=O$.

$$A\bullet B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2-3+5 & 6+9-15 & 10+15-25 \\ 1+4-5 & -3-12+15 & -5-20+25 \\ -1-3+4 & 3+9-12 & 5+15-20 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B\bullet A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2-3+5 & 3+12-15 & 5+15-20 \\ 2+3-5 & -3-12+15 & -5-15+20 \\ -2-3+5 & 3+12-15 & 5+15-20 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenim $A\bullet B=O$ i $B\bullet A=O$ (com que $A\neq O$ i $B\neq O$, podem dir que A i B són divisors de zero). Notem que es compleix $A\bullet B+B\bullet A=O+O=O$.

26. Tenim quatre matrius de tercer ordre, A, B, C i D, i sabem que són dues parelles de matrius commutables. Realitza els productes pertinents per saber les relacions de commutativitat. A més de la commutativitat, quina relació hi ha? Les matrius són:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 10 & 0 & -5 \\ -9 & 6 & 3 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -2 & -1 & -6 \\ 3 & 2 & 9 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}\ \text{i}\ D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Solució. Hauríem de fer $V_{4,2}=4.3=12$ productes possibles, ja que hi ha 4 matrius i les multipliquem de dues en dues. Comencem:

$$A\bullet B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 10 & 0 & -5 \\ -9 & 6 & 3 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10-18+21 & 0+12-9 & -5+6+3 \\ 30-18+0 & 0+12+0 & -15+6+0 \\ -10+9-7 & 0-6+3 & 5-3-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & 3 & 4 \\ 12 & 12 & -9 \\ -8 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A\bullet C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} -2 & -1 & -6 \\ 3 & 2 & 9 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2+6-3 & -1+4-3 & -6+18-12 \\ -6+6+0 & -3+4+0 & -18+18+0 \\ 2-3+1 & 1-2+1 & 6-9+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

Comprovem a continuació que també $C\bullet A=I$:

$$C\bullet A=\begin{pmatrix} -2 & -1 & -6 \\ 3 & 2 & 9 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2-3+6 & -4-2+6 & -6+0+6 \\ 3+6-9 & 6+4-9 & 9+0-9 \\ -1-3+4 & -2-2+4 & -3+0+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

Es verifica $\boxed{A\bullet C=C\bullet A=I}$. Per tant, A i C són matrius inverses i resultarà $C=A^{-1}$, o també $A=C^{-1}$.

És probable que l'altra relació que cerquem sigui la de les altres matrius B i D. Veiem-ho.

$$B\bullet D=\begin{pmatrix} 10 & 0 & -5\\ -9 & 6 & 3\\ 7 & -3 & 1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10+0+5 & 10+0-10 & 20+0-20\\ -9+12-3 & -9+18+6 & -18+6+12\\ 7-6-1 & 7-9+2 & 14-3+4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0\\ 0 & 15 & 0\\ 0 & 0 & 15\end{pmatrix}=15.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=15.I$$

$$D\bullet B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 4\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 10 & 0 & -5\\ -9 & 6 & 3\\ 7 & -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10-9+14 & 0+6-6 & -5+3+2\\ 20-27+7 & 0+18-3 & -10+9+1\\ -10-18+28 & 0+12-12 & 5+6+4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0\\ 0 & 15 & 0\\ 0 & 0 & 15\end{pmatrix}=15.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=15.I$$

Les altres dues matrius commutables són la B i la D. Més encara, compleixen la relació $\boxed{B\bullet D=D\bullet B=15.I}$.

Càlcul de la matriu inversa

27. Pel mètode del sistema d'equacions, troba la inversa A^{-1} de la matriu:

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 1 & -4\\ 5/2 & 1 & -3/2\\ -9 & -2 & 6\end{pmatrix}$$

Solució. Partim de la matriu donada A i de la desconeguda A^{-1}:

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 1 & -4\\ 2'5 & 1 & -1'5\\ -9 & -2 & 6\end{pmatrix} \quad i \quad A^{-1}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{pmatrix}$$

Si considerem les files de la matriu inversa

$$\varkappa_1=(x_{11}\ x_{12}\ x_{13}) \qquad \varkappa_2=(x_{21}\ x_{22}\ x_{23}) \qquad \varkappa_3=(x_{31}\ x_{32}\ x_{33})$$

podem escriure la matriu desconeguda com a $A^{-1}=(\varkappa_1\ \varkappa_2\ \varkappa_3)'$, on la (') indica transposició i és, per tant, una matriu columna.

També designant amb $\mathbf{e}_1=(1\ 0\ 0)$, $\mathbf{e}_2=(0\ 1\ 0)$ i $\mathbf{e}_3=(0\ 0\ 1)$ les files de la matriu unitat I, tenim $I=(\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3)'$.

Ara bé, com que A i A^{-1} són inverses, ha de passar que $A\bullet A^{-1}=I$. Substituint per les seves matrius corresponents,

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & -4\\ 2'5 & 1 & -1'5\\ -9 & -2 & 6\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}\varkappa_1\\ \varkappa_2\\ \varkappa_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} 6.\varkappa_1+\varkappa_2-4.\varkappa_3\\ 2'5.\varkappa_1+\varkappa_2-1'5.\varkappa_3\\ -9.\varkappa_1-2.\varkappa_2+6.\varkappa_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\end{pmatrix}$$

Igualant termes obtenim el sistema

$$\begin{cases} 6.\varkappa_1+\varkappa_2-4.\varkappa_3=\mathbf{e}_1\\ 2'5.\varkappa_1+\varkappa_2-1'5.\varkappa_3=\mathbf{e}_2\\ -9.\varkappa_1-2.\varkappa_2+6.\varkappa_3=\mathbf{e}_3\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \varkappa_2=\mathbf{e}_1-6.\varkappa_1+4.\varkappa_3 & (1)\\ 5.\varkappa_1+2.\varkappa_2-3.\varkappa_3=2.\mathbf{e}_2 & (2)\\ -9.\varkappa_1-2.\varkappa_2+6.\varkappa_3=\mathbf{e}_3 & (3)\end{cases}$$

Substituïm (1) en (2) i (3),

$$\begin{cases} 5.x_1+2.(e_1-6.x_1+4.x_3)-3.x_3=2.e_2 \\ -9.x_1-2.(e_1-6.x_1+4.x_3)+6.x_3=e_3 \end{cases}$$

Operant,

$$\begin{cases} 5.x_1+2.e_1-12.x_1+8.x_3-3.x_3=2.e_2 \\ -9.x_1-2.e_1+12.x_1-8.x_3+6.x_3=e_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} -7.x_1+5.x_3=-2.e_1+2.e_2 & (2') \\ 3.x_1-2.x_3=2.e_1+e_3 & (3') \end{cases}$$

Multiplicant la primera per 2 i la segona per 5,

$$\begin{cases} -14.x_1+10.x_3=-4.e_1+4.e_2 \\ 15.x_1-10.x_3=10.e_1+5.e_3 \end{cases} \qquad \text{Sumant,} \quad \boxed{x_1=6.e_1+4.e_2+5.e_3}$$

De la mateixa manera, multiplicant (2') per 3 i (3') per 7,

$$\begin{cases} -21.x_1+15.x_3=-6.e_1+6.e_2 \\ 21.x_1-14.x_3=14.e_1+7.e_3 \end{cases} \qquad \text{Sumant,} \quad \boxed{x_3=8.e_1+6.e_2+7.e_3}$$

Per tant, trobem x_2 substituint en (1),

$$x_2=e_1-6.x_1+4.x_3=e_1-6.(6.e_1+4.e_2+5.e_3)+4.(8.e_1+6.e_2+7.e_3)=$$
$$=e_1-36.e_1-24.e_2-30.e_3+32.e_1+24.e_2+28.e_3$$

En resum, $\boxed{x_2=-3.e_1+0.e_2-2.e_3}$.

Trobem ara els termes de la matriu inversa

$$x_1=6.e_1+4e_2+5.e_3=6.(1\ 0\ 0)+4.(0\ 1\ 0)+5.(0\ 0\ 1)=$$
$$=(6\ 0\ 0)+(0\ 4\ 0)+(0\ 0\ 5)=(6\ 4\ 5)$$

Igualment, $x_2=(-3\ 0\ -2)$ i $x_3=(8\ 6\ 7)$.

En conclusió, la matriu inversa $A^{-1}=(x_1\ x_2\ x_3)'$ serà

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ -3 & 0 & -2 \\ 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}}$$

28. Per Gauss-Jordan, calcula la matriu inversa A^{-1} de la matriu A i després troba la matriu $A{\bullet}A^{-1}$. La matriu A és:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & -9 \end{pmatrix}$$

Solució. Formem la matriu conjunta, M=[A|I] que consta en primer lloc de la matriu donada A i a continuació, separada per una línia vertical, de la matriu unitat I.

$$M=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array}$$

Per trobar la inversa A^{-1} de la matriu A, mirarem de convertir la matriu conjunta M en una altra d'equivalent, $M=[I\,|\,B]$, que en primer lloc tingui la matriu unitat I i en segon lloc una matriu B, que serà precisament la inversa que busquem, $A^{-1}=B$.

Com que es tracta d'una matriu quadrada de tercer ordre, seguim els quatre passos següents.

PRIMER PAS: Considerem fixa la primera fila i transformem en zeros el segon i tercer termes de la primera columna:

$$M \equiv \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & 7 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ \boxed{0} & -5 & 3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} g_1=f_1 \\ g_2=f_2-2.f_1 \\ g_3=f_3+3.f_1 \end{array}$$

SEGON PAS: Ara és la segona fila que és fixa, i els termes que s'han d'anul·lar són el primer i tercer de la segona columna:

$$M \equiv \left[\begin{array}{ccc|ccc} 7 & \boxed{0} & 16 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 1 & 11 & 5 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{l} h_1=7g_1+3.g_2 \\ h_2=g_2 \\ h_3=7.g_3+5.g_2 \end{array}$$

TERCER PAS: Deixem la tercera fila igual i anul·lem el primer i segon termes de la tercera columna:

$$M \equiv \left[\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 0 & \boxed{0} & -175 & -77 & -112 \\ 0 & 7 & \boxed{0} & 42 & 21 & 28 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & 5 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{l} i_1=h_1-16.h_3 \\ i_2=h_2+4.h_3 \\ i_3=h_3 \end{array}$$

QUART PAS: Transformem la primera matriu a la matriu unitat, dividint cada fila pel terme de la diagonal:

$$M \equiv \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -25 & -11 & -16 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & 5 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{l} j_1=i_1/7 \\ j_2=i_2/7 \\ j_3=i_3 \end{array}$$

En conseqüència, la matriu inversa serà la que és en segon lloc

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix} -25 & -11 & -16 \\ 6 & 3 & 4 \\ 11 & 5 & 7 \end{pmatrix}}$$

Comprovem que és la inversa fent el producte $A \bullet A^{-1}$. És clar que hem d'obtenir la matriu unitat I.

$$A \bullet A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & -9 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -25 & -11 & -16 \\ 6 & 3 & 4 \\ 11 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25-18+44 & -11-9+20 & -16-12+28 \\ -50+6+44 & -22+3+20 & -32+4+28 \\ 75+24-99 & 33+12-45 & 48+16-63 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Si calculem $A^{-1} \bullet A$ també obtindrem la matriu unitat I. Comprova-ho com a exercici.

29. Comprova que la inversa del producte de matrius és igual al producte, canviat d'ordre, de les seves inverses. Utilitza les matrius:

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \quad i \quad B=\begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Solució. Trobem la inversa de la matriu A, A^{-1}. Ho farem per sistema d'equacions. Partim de les matrius,

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \quad , \quad A^{-1}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \quad i \quad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si anomenem $\mathbf{x}_1=(x_{11}\ x_{12})$ i $\mathbf{x}_2=(x_{21}\ x_{22})$ les files de A^{-1}, observem que $A^{-1}=(\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2)'$. Fem el mateix amb la matriu unitat I, posant $\mathbf{e}_1=(1\ 0)$ i $\mathbf{e}_2=(0\ 1)$, i queda $I=(\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2)'$.

Com que ha de passar que $A \bullet A^{-1}=I$, si substituïm i operem, tenim

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2.\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2=\mathbf{e}_1 & (1) \\ 5.\mathbf{x}_1-3.\mathbf{x}_2=\mathbf{e}_2 & (2) \end{cases}$$

En aquest sistema eliminem $\mathbf{x}_2$ multiplicant (1) per 3 i sumant amb (2),

$$-6.\mathbf{x}_1+5.\mathbf{x}_1=3.\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2 \quad , \quad \mathbf{x}_1=-3.\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2 \quad , \quad \boxed{\mathbf{x}_1=(-3\ -1)}$$

Trobem ara $\mathbf{x}_2$ multiplicant la (1) per 5, la (2) per 2 i sumant,

$$5.\mathbf{x}_2-6.\mathbf{x}_2=5.\mathbf{e}_1+2.\mathbf{e}_2 \quad , \quad \mathbf{x}_2=-5.\mathbf{e}_1-2.\mathbf{e}_2 \quad , \quad \boxed{\mathbf{x}_2=(-5\ -2)}$$

La matriu inversa de A és doncs

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}}$$

Calculem després la matriu inversa de B, B^{-1}. Per variar, ho farem pel *mètode de Gauss-Jordan.* Comencem posant la matriu conjunta i fent que el terme a_{21} s'anul·li:

$$M=\left[\begin{array}{cc|cc} 7 & -9 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix} \equiv \left[\begin{array}{cc|cc} 7 & -9 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 7 \end{array}\right]\begin{matrix} g_1=f_1 \\ g_2=7.f_2-3.f_1 \end{matrix}$$

Ara anul·lem el terme a_{12} i després dividim els termes de la diagonal principal de manera que ens quedi la matriu unitat,

$$M=\left[\begin{array}{cc|cc} 7 & 0 & 28 & -63 \\ 0 & -1 & -3 & 7 \end{array}\right]\begin{matrix} h_1=g_1-9.g_2 \\ h_2=g_2 \end{matrix} \equiv \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4 & -9 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \end{array}\right]\begin{matrix} i_1=h_1/7 \\ i_2=-h_2 \end{matrix}$$

La matriu inversa és la que està a la dreta de la matriu unitat,

$$\boxed{B^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}}$$

D'altra banda, hem de trobar el producte $A \bullet B$ de les dues matrius donades A i B

$$A \bullet B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14+3 & 18-4 \\ 35-9 & -45+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 14 \\ 26 & -33 \end{pmatrix}$$

Com a exercici, troba la inversa $(A\bullet B)^{-1}$ de la matriu $A\bullet B$. Tant si es fa per sistema d'equacions com per Gauss-Jordan, s'obté:

$$\boxed{(A\bullet B)^{-1}=\begin{pmatrix} 33 & 14 \\ 26 & 11 \end{pmatrix}}$$

Per acabar el problema trobarem $B^{-1}\bullet A^{-1}$ i comprovarem que dóna igual que la matriu anterior,

$$B^{-1}\bullet A^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12+45 & -4+18 \\ -9+35 & -3+14 \end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix} 33 & 14 \\ 26 & 11 \end{pmatrix}}$$

Es verifica $\boxed{(A\bullet B)^{-1}=B^{-1}\bullet A^{-1}}$, com podem comprovar fàcilment observant que

$$(A\bullet B)\bullet(B^{-1}\bullet A^{-1})=A\bullet(B\bullet B^{-1})\bullet A^{-1}=A\bullet I\bullet A^{-1}=A\bullet A^{-1}=I \quad\Rightarrow\quad (A\bullet B)^{-1}=B^{-1}\bullet A^{-1}$$

30. Sabem la relació matricial $X'=4.A'+12.B^{-1}-A\bullet B$. Troba primer la inversa B^{-1} i després fes les operacions pertinents per trobar la matriu desconeguda X. Les matrius A i B són:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad i \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Solució. Calculem la inversa B^{-1} de la matriu B, emprant per exemple el mètode de Gauss-Jordan. Formem la matriu conjunta,

$$M=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array}$$

Fixant la primera fila transformem en zeros els termes a_{21} i a_{31}, i després fem el mateix treballant sobre la segona fila i anul·lem els termes a_{12} i a_{32},

$$M=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} g_1=f_1 \\ g_2=f_2-2.f_1 \\ g_3=f_3-f_1 \end{array} \equiv \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} h_1=g_1 \\ h_2=g_2 \\ h_3=g_3-2.g_2 \end{array}$$

Ara actuem sobre la tercera columna, anul·lem els termes a_{13} i a_{23} i dividim tots els termes per 4 perquè ens doni la matriu unitat,

$$M=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} i_1=4.h_1-h_3 \\ i_2=4.h_2+3.h_3 \\ i_3=h_3 \end{array} \equiv \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/4 & 2/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & -2/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & -2/4 & 1/4 \end{array}\right]\begin{array}{l} j_1=i_1/4 \\ j_2=i_2/4 \\ j_3=i_3/4 \end{array}$$

Ja hem trobat la inversa B^{-1}, que és donada per

$$B^{-1}=\begin{pmatrix} 1/4 & 2/4 & -1/4 \\ 1/4 & -2/4 & 3/4 \\ 3/4 & -2/4 & 1/4 \end{pmatrix} \quad \text{o millor per} \quad \boxed{B^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$$

Hem de trobar després el producte de les dues matrius donades A i B,

$$A \bullet B=\begin{pmatrix}2&1&3\\4&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&-1\\1&2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+2+3&0+1+6&2-1-3\\4+2+2&0+1+4&4-1-2\\0+2+1&0+1+2&0-1-1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}7&7&-2\\8&5&1\\3&3&-2\end{pmatrix}}$$

Calculem la matriu X' donada per $X'=4.A'+12.B^{-1}-A\bullet B$,

$$X'=4.\begin{pmatrix}2&4&0\\1&1&1\\3&2&1\end{pmatrix}+12.\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&-2&3\\3&-2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7&7&-2\\8&5&1\\3&3&-2\end{pmatrix}$$

Multiplicant pels coeficients i sumant obtenim,

$$X'=\begin{pmatrix}8&16&0\\4&4&4\\12&8&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&6&-3\\3&-6&9\\9&-6&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7&-7&2\\-8&-5&-1\\-3&-3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&15&-1\\-1&-7&12\\18&-1&9\end{pmatrix}$$

Finalment, transposant la matriu,

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}4&-1&18\\15&-7&-1\\-1&12&9\end{pmatrix}}$$

Potències i polinomis de matrius

31. Si $A\in M_3$ és la matriu $A=(a_{ij})$ on $a_{ij}=1\ \forall i,j$, troba les potències A^2 i A^3 i dedueix la matriu A^n. Prova-ho per inducció completa.

Solució. Per a la matriu quadrada A de tercer ordre formada únicament per uns, trobem el seu quadrat,

$$A^2=A\bullet A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+1+1&1+1+1&1+1+1\\1+1+1&1+1+1&1+1+1\\1+1+1&1+1+1&1+1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix}$$

Traient 3 factor comú, ens queda

$$A^2=\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix}=3.\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad A^2=3.A$$

A partir d'aquesta relació ja podem trobar qualsevol potència. de A. Així, per A^3 ens queda

$$A^3=A^2\bullet A=(3.A)\bullet A=3.(A\bullet A)=3.A^2=3.(3.A)=9.A\quad\Rightarrow\quad A^3=3^2.A$$

Per A^4 tenim

$$A^4=A^3\bullet A=(9.A)\bullet A=9.(A\bullet A)=9.A^2=9.(3.A)=27.A\quad\Rightarrow\quad A^4=3^3.A$$

Es veu fàcilment que en general es compleix $\boxed{A^n=3^{n-1}.A}$. Demostrem la relació en general per *inducció completa.*

a) Es verifica per n=1, ja que $A^1=3^{1-1}.A=3^0.A=1.A=A$.

b) Suposem que es compleix per n, és a dir $A^n=3^{n-1}.A$, i provem que també es compleix per n+1,

$$A^{n+1}=A^n\bullet A=(3^{n-1}.A)\bullet A=3^{n-1}.(A\bullet A)=3^{n-1}.A^2=3^{n-1}.(3.A)=3^{n-1+1}.A$$

És a dir, que ens queda $A^{n+1}=3^{(n+1)-1}.A$, per la qual cosa també es compleix per n+1.

32. Estudia si es verifica la relació $(A+B)^2=A^2+2.(A\bullet B)+B^2$ en el conjunt de les matrius quadrades. Després comprova-ho per:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solució. S'ha de tenir en compte que el producte de matrius no compleix la propietat commutativa. Per tant,

$$(A+B)^2=(A+B)\bullet(A+B)=A\bullet A+A\bullet B+B\bullet A+B\bullet B=A^2+A\bullet B+B\bullet A+B^2$$

I com que en general $A\bullet B\neq B\bullet A$, tenim

$$\boxed{(A+B)^2\neq A^2+2.A\bullet B+B^2}$$

Fem una petita comprovació per a les matrius donades. Trobem en primer lloc el primer membre

$$A+B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^2=\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 36-8 & 24+16 \\ -12-8 & -8+16 \end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix} 28 & 40 \\ -20 & 8 \end{pmatrix}}$$

Calculem ara el segon membre

$$A^2=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4+0 & -2-3 \\ 0+0 & 0+9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$2.A\bullet B=2.\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=2.\begin{pmatrix} 8+2 & 10-1 \\ 0-6 & 0+3 \end{pmatrix}=2.\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 20 & 18 \\ -12 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B^2=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16-10 & 20+5 \\ -8-2 & -10+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 25 \\ -10 & -9 \end{pmatrix}$$

$$A^2+2.A\bullet B+B^2=\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 20 & 18 \\ -12 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & 25 \\ -10 & -9 \end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix} 30 & 38 \\ -22 & 6 \end{pmatrix}}$$

Queda clar que ens ha sortit ben diferent!

Hem de notar que per algún cas particular pot donar-se el fet que es verifiqui $(A+B)^2=A^2+2.A\bullet B+B^2$, però això, evidentment, no significa que es verifiqui sempre. Com a exercici, pots resoldre de nou aquest problema amb les matrius

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sol. T'ha de quedar igual, ja que les matrius són commutables

$$(A+B)^2=A^2+2.A\bullet B+B^2=\begin{pmatrix} 36 & 32 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad A\bullet B=B\bullet A=\begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

33. Donades les matrius A i B, calcula en primer lloc els seus rangs respectius. Quina d'elles té inversa? Determina-la pel mètode del sistema d'equacions o bé per Gauss-Jordan. Quina serà la potència vuitena de la matriu A? Compara després $M=(A-B)^2$ i $N=A^2-2.(A\bullet B)+B^2$. Què observes? Es verificarà sempre aquesta relació? Perquè? Les matrius són:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad i \quad B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -4 & 0 & 10\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

Solució. Comencem trobant en primer lloc el *rang de les dues matrius* pel mètode de reducció de Gauss.

Com que la matriu A ja està escalonada i té les tres files diferents de la nul·la, el seu rang és $\boxed{\rho(A)=3}$. En canvi, la matriu B s'haurà de triangularitzar (o triangular):

$$B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -4 & 0 & 10\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{matrix}f_1\\ f_2\\ f_3\end{matrix} \equiv \begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 12\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{matrix}g_1=f_1\\ g_2=f_2+2.f_1\\ g_3=f_3\end{matrix} \equiv \begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 12\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}h_1=g_1\\ h_2=g_2\\ h_3=4.g_3-g_2\end{matrix}$$

Eliminm l'última fila, que és nul·la, i com que ens en queden dues, tenim $\boxed{\rho(B)=2}$.

Només podrem trobar la *matriu inversa* de la matriu A, perquè el seu rang coincideix amb l'ordre de la matriu. La matriu B no tindrà inversa.

Per calcular A^{-1}, ho farem, per exemple, pel mètode del sistema d'equacions. Recordem que emprem la matriu columna desconeguda $A^{-1}=(\varkappa_1\ \varkappa_2\ \varkappa_3)'$ i la matriu unitat escrita en la forma $I=(\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3)'$. Sabem que passarà $A\bullet A^{-1}=I$; substituint per les matrius, obtenim el sistema

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}\varkappa_1\\ \varkappa_2\\ \varkappa_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}-\varkappa_1 \quad +2.\varkappa_3=\mathbf{e}_1\\ -\varkappa_2+4.\varkappa_3=\mathbf{e}_2\\ \varkappa_3=\mathbf{e}_3\end{cases}$$

De l'última equació tenim directament $\varkappa_3=\mathbf{e}_3$, que substituïm en la segona, $-\varkappa_2+4.\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_2$, $-\varkappa_2=\mathbf{e}_2-4.\mathbf{e}_3$, $\varkappa_2=-\mathbf{e}_2+4.\mathbf{e}_3$. De la primera tindrem $-\varkappa_1+2.\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_1$, $-\varkappa_1=\mathbf{e}_1-2.\mathbf{e}_3$, $\varkappa_1=-\mathbf{e}_1+2.\mathbf{e}_3$.

En resum, $\varkappa_1=(-1\ 0\ 2)$, $\varkappa_2=(0\ -1\ 4)$ i $\varkappa_3=(0\ 0\ 1)$. Així, la matriu inversa és

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$$

Observem que $A^{-1}=A$ i així A és una "matriu involutiva". Com a conseqüència tenim $A^2=A\bullet A=A\bullet A^{-1}=I$, és a dir $\boxed{A^2=I}$.

Evidentment, per a calcular la *potència vuitena* de A no és necessari fer tot el càlcul. Ens aprofitarem que $A^2=I$.

$$A^8=(A^2)^4=I^4=I \Rightarrow \boxed{A^8=I}$$

Com que l'última part del problema és anàloga a la del problema anterior, ens limitarem a apuntar els resultats de les operacions perquè es puguin comprovar:

$$M=\begin{pmatrix} 9 & 0 & -5 \\ -16 & 1 & 22 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A\bullet B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B^2=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -8 & 0 & 26 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad N=\begin{pmatrix} 9 & 0 & -5 \\ -16 & 1 & 22 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

En aquest cas, observem que $(A-B)^2=A^2-2.(A\bullet B)+B^2$ perquè $A\bullet B=B\bullet A$. Però no sempre és així, perquè en general $A\bullet B\neq B\bullet A$.

34. Sabent que $P(x)=x^2-4.x-5$ és un polinomi anul·lador per a la matriu A que depèn dels paràmetres a i b, Troba els valors d'aquests paràmetres i escriu les quatre matrius que compleixen aquesta condició. La matriu és:

$$A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

Solució. Que $P(x)=x^2-4.x-5$ sigui un polinomi anul·lador per a la matriu A significa que $A^2-4.A-5.I=O$, on I és la matriu unitat i O la matriu nul·la. També podem posar $\boxed{A^2=4.A+5.I}$

Trobem, per tant, les matrius A^2 i $4.A+5.I$

$$A^2=A\bullet A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+2.b^2 & 2.a.b+b^2 & 2.a.b+b^2 \\ 2.a.b+b^2 & a^2+2.b^2 & 2.a.b+b^2 \\ 2.a.b+b^2 & 2.a.b+b^2 & a^2+2.b^2 \end{pmatrix}$$

$$4.A+5.I= 4.\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}+5.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4.a+5 & 4.b & 4.b \\ 4.b & 4.a+5 & 4.b \\ 4.b & 4.b & 4.a+5 \end{pmatrix}$$

Igualant els termes de les matrius obtenim el sistema,

$$\begin{cases} a^2+2.b^2=4.a+5 \\ 2.a.b+b^2=4.b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+2.b^2=4.a+5 & (1) \\ (2.a+b).b=4.b & (2) \end{cases}$$

De l'equació (2) es desprenen dues possibilitats:

PRIMERA POSSIBILITAT: $\boxed{b\neq 0}$. Podem simplificar en (2) i queda $2.a+b=4$, d'on $b=4-2.a$.

Substituint en (1), $a^2+2.(4-2.a)^2=4.a+5$, $a^2+32-32.a+8.a^2=4.a+5$, $9.a^2-36.a+27=0$, $a^2-4.a+3=0$, que té com a arrels $a_1=3$ i $a_2=1$.

Els valors corresponents de b són $b_1=4-2.a_1=4-2.3=4-6=-2$ i $b_2=4-2.a_2=4-2.1=4-2=2$.

Dues possibles solucions són $\boxed{a_1=3\ ,\ b_1=-2}$ i $\boxed{a_2=1\ ,\ b_2=-2}$.

SEGONA POSSIBILITAT: $\boxed{b=0}$. Substituint en (1) quedarà l'equació de segon grau $a^2-4.a-5=0$, que té per arrels $a_3=5$ i $a_4=-1$.

Així, dues solucions més són $\boxed{a_3=5\ ,\ b_3=0}$ i $\boxed{a_4=-1\ ,\ b_4=0}$.

Apuntem finalment les matrius que resulten de substituir els possibles valors de a i b, i que són les matrius solució del problema:

$$A_1=\begin{pmatrix}3&-2&-2\\-2&3&-2\\-2&-2&3\end{pmatrix}\ ,\ A_2=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}\ ,\ A_3=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}\ \text{ i }\ A_4=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

35. Comprova que $p(x)=x^3+3x^2+3x+1$ és un polinomi anul·lador per a la matriu A de files $f_1=(3\ 0\ 8)$, $f_2=(3\ -1\ 6)$ i $f_3=(-2\ 0\ -5)$. Podries trobar la inversa A^{-1} a partir d'aquest polinomi anul·lador? Comprova que, efectivament, A^{-1} és la inversa de A.

Solució. Hem de provar que $A^3+3.A^2+3.A+I=O$, on I i O són les matrius unitat i nul·la, respectivament. Trobem,

$$A^2=A\bullet A=\begin{pmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9+0-16&0+0+0&24+0-40\\9-3-12&0+1+0&24-6-30\\-6+0+10&0+0+0&-16+0+25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&0&-16\\-6&1&-12\\4&0&9\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}-7&0&-16\\-6&1&-12\\4&0&9\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-21+0+32&0+0+0&-56+0+80\\-18+3+24&0-1+0&-48+6+60\\12+0-18&0+0+0&32+0-45\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&0&24\\9&-1&18\\-6&0&-13\end{pmatrix}$$

Substituint ara al polinomi matricial,

$$A^3+3.A^2+3.A+I=\begin{pmatrix}11&0&24\\9&-1&18\\-6&0&-13\end{pmatrix}+3.\begin{pmatrix}-7&0&-16\\-6&1&-12\\4&0&9\end{pmatrix}+3.\begin{pmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}11&0&24\\9&-1&18\\-6&0&-13\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-21&0&-48\\-18&3&-36\\12&0&27\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9&0&24\\9&-3&18\\-6&0&-15\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Al ser $\boxed{A^3+3.A^2+3.A+I=O}$, queda provat que $p(x)=x^3+3.x^2+3.x+1$ és un polinomi anul·lador per a la matriu A.

A continuació trobarem l'expressió de la matriu inversa A^{-1}, a partir del polinomi anul·lador anterior. Fem els diferents passos,

$$A^3+3.A^2+3.A+I=O\ ,\ A^3+3.A^2+3.A=-I\ ,\ A\bullet(A^2+3.A+3.I)=-I$$

Multiplicant a l'esquerra per A^{-1},

$$A^{-1}\bullet A\bullet(A^2+3.A+3.I)=A^{-1}\bullet(-I)\ ,\ I\bullet(A^2+3.A+3.I)=-A^{-1}$$

Finalment, $\boxed{A^{-1}=-A^2-3.A-3.I}$, i si substituïm cada matriu pels seus termes, ens queda

$$A^{-1}=-\begin{pmatrix}-7&0&-16\\-6&1&-12\\4&0&9\end{pmatrix}-3.\begin{pmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{pmatrix}-3.\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}7&0&16\\6&-1&12\\-4&0&-9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-9&0&-24\\-9&3&-18\\6&0&15\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-3&0\\0&0&-3\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-5&0&-8\\-3&-1&-6\\2&0&3\end{pmatrix}}$$

Comprovem que A^{-1} és realment la inversa de A. La manera més senzilla serà veure que $A \bullet A^{-1}=I$.

$$A \bullet A^{-1}=\begin{pmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}-5&0&-8\\-3&-1&-6\\2&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15+0+16&0+0+0&-24+0+24\\-15+3+12&0+1+0&-24+6+18\\10+0-10&0+0+0&16+0-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$$

Partició de matrius

36. Sigui la matriu A de quart ordre on volem trobar la seva inversa. Utilitza el mètode de partició de la matriu donada en 4 submatrius. La matriu és:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\4&2&1&0\\-2&3&1&1\end{pmatrix}$$

Solució. Suposem que la matriu donada A està subdividida en quatre submatrius (o caixes) de la manera següent:

$$A=\begin{pmatrix}M&N\\P&Q\end{pmatrix} \quad \text{on } M=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix}4&2\\-2&3\end{pmatrix} \text{ i } Q=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$$

També suposarem que la matriu inversa A^{-1}, que estem buscant, i la matriu unitat de quart ordre I_4 estan subdividides en 4 caixes, cada una d'elles de segon ordre

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}X&Y\\Z&U\end{pmatrix} \quad \text{i} \quad I_4=\begin{pmatrix}I&O\\O&I\end{pmatrix}$$

Com que $A \bullet A^{-1}=I_4$, si substituim i operem, obtenim

$$\begin{pmatrix}M&N\\P&Q\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}X&Y\\Z&U\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I&O\\O&I\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}M\bullet X+N\bullet Z & M\bullet Y+N\bullet U\\P\bullet X+Q\bullet Z & P\bullet Y+Q\bullet U\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I&O\\O&I\end{pmatrix}$$

Identificant els termes corresponents obtenim els dos sistemes matricials següents

$$\begin{cases}M\bullet X+N\bullet Z=I & (1)\\P\bullet X+Q\bullet Z=O & (2)\end{cases} \wedge \begin{cases}M\bullet Y+N\bullet U=O & (3)\\P\bullet Y+Q\bullet U=I & (4)\end{cases}$$

De (1), i com que N és la matriu nul·la, N=O, ens quedarà M•X=I, i per tant, $\boxed{X=M^{-1}}$

Substituint X en (2), $P \bullet M^{-1}+Q \bullet Z=O$, $Q \bullet Z=-P \bullet M^{-1}$. Multiplicant a l'esquerra per Q^{-1}, $Q^{-1} \bullet (Q \bullet Z)=Q^{-1} \bullet (-P \bullet M^{-1})$ i com que $Q^{-1} \bullet Q=I$ podem aïllar la Z, $\boxed{Z=-Q^{-1} \bullet P \bullet M^{-1}}$

Igualment, de (3) i com que N=O, M•Y=O. Multiplicant a l'esquerra per M^{-1}, $M^{-1} \bullet (M \bullet Y)=M^{-1} \bullet O$, $I \bullet Y=O$, $\boxed{Y=O}$

Substituint en (4), P•O+Q•U=I , Q•U=I, d'on ja directament podem deduir que $\boxed{U=Q^{-1}}$

Fem ara els càlculs numèrics necessaris per calcular les submatrius X, U i Z, perquè ja sabem que la Y és la matriu nul·la.

Per calcular les inverses de M i Q emprarem, per exemple, el mètode de Gauss-Jordan, on M.C. simbolitza a la matriu conjunta. Fem-ho primer per a la matriu M

$$M.C.=\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} f_1 \\ f_2 \end{array} \equiv \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} g_1=f_1 \\ g_2=f_2-2.f_1 \end{array} \Rightarrow M^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Trobem després la matriu inversa de Q

$$M.C.=\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} f_1 \\ f_2 \end{array} \equiv \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} g_1=f_1 \\ g_2=f_2-f_1 \end{array} \Rightarrow Q^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Com hem vist, $X=M^{-1}$ i $U=Q^{-1}$. Per tant,

$$\boxed{X=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}} \quad \wedge \quad \boxed{U=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Ens queda per trobar la submatriu Z,

$$Z=-Q^{-1} \bullet P \bullet M^{-1}= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4-4 & 0+2 \\ -2-6 & 0+3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0 & -2+0 \\ 0+8 & 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{Z=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}}$$

Finalment, com que la inversa A^{-1} està formada per les submatrius X, Y, Z i U, tenim

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Es pot comprovar que aquesta matriu és la inversa de la matriu donada calculant $A \bullet A^{-1}$ i obtenint I com a resultat. Observem que tant la matriu A com la A^{-1} són *matrius triangulars inferiors* (tots els termes de sobre la diagonal principal són nuls).

És evident que el producte de A per A^{-1} ha de donar la matriu unitat, ja que, com veurem en el problema següent, el producte de dues matrius triangulars del mateix tipus és una matriu triangular del mateix tipus que té per termes de la diagonal els productes dels termes corresponents de les diagonals respectives.

7.3. TIPUS DE MATRIUS

Matrius triangulars, diagonal i escalar

37. Fes els productes A•B, A'•B, A•B' i A'•B' per a les dues matrius triangulars A i B. Podem dir que els termes de la diagonal del producte de dues matrius triangulars del mateix tipus és igual al producte dels termes corresponents de les seves diagonals respectives? Les matrius són:

$$A=\begin{pmatrix}-3 & -2 & 5\\ 0 & 6 & -1\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & -6 & -5\end{pmatrix}$$

Solució. Calculem els quatre productes matricials demanats, transposant directament la matriu, si cal,

$$A\bullet B=\begin{pmatrix}-3 & -2 & 5\\ 0 & 6 & -1\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}-4 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & -6 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12-6+10 & 0-2-30 & 0+0-25\\ 0+18-2 & 0+6+6 & 0+0+5\\ 0+0+8 & 0+0-24 & 0+0-20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & -32 & -25\\ 16 & 12 & 5\\ 8 & -24 & -20\end{pmatrix}$$

$$A'\bullet B=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ -2 & 6 & 0\\ 5 & -1 & 4\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}-4 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & -6 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0\\ 8+18+0 & 0+6+0 & 0+0+0\\ -20-3+8 & 0-1-24 & 0+0-20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 0 & 0\\ 26 & 6 & 0\\ -15 & -25 & -20\end{pmatrix}$$

En A•B les dues matrius són triangulars de diferents tipus (la primera triangular superior i la segona inferior) i el producte resulta ser una matriu no triangular. En canvi, si tant A' com B són triangulars inferiors, llavors el seu producte A'•B és també triangular inferior.

Calculem els altres dos productes,

$$A\bullet B'=\begin{pmatrix}-3 & -2 & 5\\ 0 & 6 & -1\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}-4 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -6\\ 0 & 0 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12+0+0 & -9-2+0 & -6+12-25\\ 0+0+0 & 0+6+0 & 0-36+5\\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0-20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & -11 & -19\\ 0 & 6 & -31\\ 0 & 0 & -20\end{pmatrix}$$

$$A'\bullet B'=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ -2 & 6 & 0\\ 5 & -1 & 4\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}-4 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -6\\ 0 & 0 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12+0+0 & -9+0+0 & -6+0+0\\ 8+0+0 & -6+6+0 & -4-36+0\\ -20+0+0 & 15-1+0 & 10+6-20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & -9 & -6\\ 8 & 0 & -40\\ -20 & 14 & -4\end{pmatrix}$$

Observem que succeeix el mateix. Les matrius A i B' són triangulars superiors i el seu producte A•B' és del mateix tipus.

Si ens fixem en les *diagonals principals* de les matrius donades i de les seves transposades, veiem que

$$D_p(A)=D_p(A')=(-3\ 6\ 4) \quad \text{i} \quad D_p(B)=D_p(B')=(-4\ 1\ -5)$$

Per a les matrius A'•B i A•B' que ens han quedat triangulars, tenim com a diagonals principals

$$D_p(A'\bullet B)=D_p(A\bullet B')=(12\ 6\ -20)$$

Notem que aquests termes són el producte dels termes de les diagonals anteriors,

$$12=(-3).(-4) \qquad 6=6.1 \qquad -20=4.(-5)$$

38. Sigui la matriu triangular inferior A que té com a matrius fila $\mathbf{f}_1=(a_1\ 0\ 0\ 0)$, $\mathbf{f}_2=(b_1\ b_2\ 0\ 0)$, $\mathbf{f}_3=(c_1\ c_2\ c_3\ 0)$ i $\mathbf{f}_4=(d_1\ d_2\ d_3\ d_4)$, on a_1, b_2, c_3 i d_4 són diferents de zero. Prova que es tracta de matrius files linealment independents. Podríem dir el mateix de les columnes?

Solució. Si designem com a $\mathbf{f}_0=(0\ 0\ 0\ 0)$ la fila nul·la, el fet que les files de $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4\}$ siguin *linealment independents* vol dir que perquè es verifiqui la combinació lineal nul·la és necessari que siguin nuls tots els coeficients. En altres paraules,

$$a.\mathbf{f}_1+b.\mathbf{f}_2+c.\mathbf{f}_3+d.\mathbf{f}_4=\mathbf{f}_0 \ \Rightarrow\ a=0,\ b=0,\ c=0 \text{ i } d=0.$$

Provem-ho. Substituint en el primer membre de la combinació lineal nul·la i operant,

$$a.\mathbf{f}_1+b.\mathbf{f}_2+c.\mathbf{f}_3+d.\mathbf{f}_4=a.(a_1\ 0\ 0\ 0)+b.(b_1\ b_2\ 0\ 0)+c.(c_1\ c_2\ c_3\ 0)+$$
$$+d.(d_1\ d_2\ d_3\ d_4) = (a.a_1\ 0\ 0\ 0)+(b.b_1\ b.b_2\ 0\ 0)+(c.c_1\ c.c_2\ c.c_3\ 0)+$$
$$+(d.d_1\ d.d_2\ d.d_3\ d.d_4) =$$
$$=(a.a_1+b.b_1+c.c_1+d.d_1\ \ b.b_2+c.c_2+d.d_2\ \ c.c_3+d.d_3\ \ d.d_4)$$

Com que aquesta expressió ha de ser igual a $\mathbf{f}_0=(0\ 0\ 0\ 0)$, podem igualar els termes corresponents, i això en dóna el sistema,

$$\left|\begin{array}{ll} a.a_1+b.b_1+c.c_1+d.d_1=0\ \ (1) & b.b_2+c.c_2+d.d_2=0\ \ (2) \\ c.c_3+d.d_3=0\ \ (3) & d.d_4=0\ \ (4) \end{array}\right.$$

De la (4), i com que per hipòtesi $d_4\neq 0$ tenim $\boxed{d=0}$. Substituint en la (3), $c.c_3=0$ i com que $c_3\neq 0$, és $\boxed{c=0}$. Substituint en la (2), $b.b_2=0$, i com que $b_2\neq 0$, resulta $\boxed{b=0}$. Finalment, substituint en (1), $a.a_1=0$ i com $a_1\neq 0$ ens queda $\boxed{a=0}$.

Queda clar, doncs, que les files $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ i $\mathbf{f}_4$ de la matriu donada A són linealment independents.

Per fer el mateix per a les columnes, apuntarem de nou la matriu A i notarem les columnes per $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$ i $\mathbf{g}_4$.

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{g}_1=\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix},\ \mathbf{g}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix},\ \mathbf{g}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_3 \\ d_3 \end{pmatrix} \text{ i } \mathbf{g}_4=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d_4 \end{pmatrix}$$

Per simplificar l'escriptura, posarem les columnes horitzontals, transposant-les

$$\mathbf{g}_1=(a_1\ b_1\ c_1\ d_1)'\ ,\ \mathbf{g}_2=(0\ \ b_2\ c_2\ d_2)'\ ,\ \mathbf{g}_3=(0\ \ 0\ \ c_3\ d_3)'$$
$$\mathbf{g}_4=(0\ \ 0\ \ 0\ \ d_4)' \quad \text{i la columna nul·la} \quad \mathbf{g}_0=(0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)'$$

Per tal que les columnes $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$ i $\mathbf{g}_4$ siguin linealment independents, llavors, igual que a les files, haurà de passar que

$$a.\mathbf{g}_1+b.\mathbf{g}_2+c.\mathbf{g}_3+d.\mathbf{g}_4=\mathbf{g}_0 \ \Rightarrow\ a=0,\ b=0,\ c=0 \text{ i } d=0.$$

Substituint al primer membre,

$a.\mathbf{g}_1+b.\mathbf{g}_2+c.\mathbf{g}_3+d.\mathbf{g}_4=a.(a_1\ b_1\ c_1\ d_1)'+b.(0\ b_2\ c_2\ d_2)'+c.(0\ 0\ c_3\ d_3)'+$
$+d.(0\ 0\ 0\ d_4)'$

Multiplicant pels coeficients, sumant i després igualant a la columna nul·la $\mathbf{g}_0=(0\ 0\ 0\ 0)$ resulta el sistema

$$\left|\begin{array}{ll} a.a_1=0\ \ (1) & a.b_1+b.b_2=0\ \ (2) \\ a.c_1+b.c_2+d.c_3=0\ \ (3) & a.d_1+b.d_2+c.d_3+d.d_4=0\ \ (4) \end{array}\right.$$

De la (1) i com que $a_1\neq0$, resulta $\boxed{a=0}$, substituint en (2), en (3) i en (4) ens anirà donant $\boxed{b=0}$, $\boxed{c=0}$ i $\boxed{d=0}$, per la qual cosa també les columnes de A són linealment independents.

39. Troba el quadrat de la matriu A de columnes $\mathbf{c}_1=(2\ 6\ 6\ 8)'$, $\mathbf{c}_2=(0\ -2\ -4\ -4)'$, $\mathbf{c}_3=(0\ 0\ 2\ 4)'$ i $\mathbf{c}_4=(0\ 0\ 0\ -2)'$. De quin tipus és la matriu resultant? Quant val A^3? De quin tipus és aquesta matriu? I la potència matricial A^{10}?

Solució: Observem que la matriu donada A és una matriu triangular inferior. Calculem-ne el quadrat:

$$A^2=A\bullet A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 0 \\ 6 & -4 & 2 & 0 \\ 8 & -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 0 \\ 6 & -4 & 2 & 0 \\ 8 & -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 4+0+0+0 & 0+0+0+0 & 0+0+0+0 & 0+0+0+0 \\ 12-12+0+0 & 0+4+0+0 & 0+0+0+0 & 0+0+0+0 \\ 12-24+12+0 & 0+8-8+0 & 0+0+4+0 & 0+0+0+0 \\ 16-24+24-16 & 0+8-16+8 & 0+0+8-8 & 0+0+0+4 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}=4.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=4.I$$

Com que A^2 ens ha quedat una matriu escalar, $\boxed{A^2=4.I}$ és molt senzill trobar les succesives potències de la matriu A:

$$A^3=A^2\bullet A=(4.I)\bullet A=4.(I\bullet A)=4.A \qquad A^4=A^2\bullet A^2=(4.I)\bullet(4.I)=16.I \quad \text{etc.}$$

Trobem $A^{10}=(A^2)^5=(4.I)^5=4^5.I=1024.I$, $\boxed{A^{10}=1024.I}$

Observem que les potències de la matriu triangular A són de dues classes diferents: si l'exponent és imparell, ens quedarà una matriu triangular del mateix tipus (en aquest cas serà triangular inferior), mentre que si l'exponent és parell, llavors es tracta d'una matriu escalar (en el nostre cas és 4.I).

Matrius simètrica i antisimètrica

40. Calculant la transposada de les matrius A, B, C i D comprova que les dues primeres són simètriques i les altres antisimètriques. Realitza les combinacions lineals M=2.A+3.B i N=3.C-2.D. Són també M i N simètrica i antisimètrica, respectivament? Troba després els productes P=A•B i Q=C•D. Continuaran complint que P i Q són matrius simètrica i antisimètrica, resp.? Les matrius donades són:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -6 \\ 2 & -3 & 1 \\ -6 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -4 & 7 & 5 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ -3 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}\ \text{i}\ D=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -6 \\ -4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Solució. Calculem les transposades de les matrius donades i recordem que duna matriu donada A, és simètrica si es verifica A'=A; mentre que si A'=-A, llavors és antisimètrica.

$$A'=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -6 \\ 2 & -3 & 1 \\ -6 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ B'=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -4 & 7 & 5 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix},\ C'=\begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ -5 & -2 & 0 \end{pmatrix}\ \text{i}\ D'=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 4 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Com que A'=A i B'=B, resulta que $\boxed{\text{A i B són simètriques}}$.

Però com que C'=-C i D'=-D, llavors $\boxed{\text{C i D són antisimètriques}}$.

Calculem M=2.A+3.B, combinació lineal de matrius simètriques, i després trobem la transposada:

$$M= 2.\begin{pmatrix} 5 & 2 & -6 \\ 2 & -3 & 1 \\ -6 & 1 & 4 \end{pmatrix} + 3.\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -4 & 7 & 5 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -12 \\ 4 & -6 & 2 \\ -12 & 2 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -12 & 9 \\ -12 & 21 & 15 \\ 9 & 15 & -6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 13 & -8 & -3 \\ -8 & 15 & 17 \\ -3 & 17 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriu transposada, $M'=\begin{pmatrix} 13 & -8 & -3 \\ -8 & 15 & 17 \\ -3 & 17 & 2 \end{pmatrix}$

Com que M'=M resulta que M és simètrica. Per tant, «la combinació lineal de dues matrius simètriques és també simètrica».

Sigui ara N=3.C-2.D, on C i D són antisimètriques. Calculem la matriu N i la transposada,

$$N=3.\begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ -3 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} -2.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -6 \\ -4 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & -15 \\ -9 & 0 & -6 \\ 15 & 6 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & -8 \\ 2 & 0 & 12 \\ 8 & -12 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 7 & -23 \\ -7 & 0 & 6 \\ 23 & -6 & 0 \end{pmatrix}\quad \text{Matriu transposada, } N'=\begin{pmatrix} 0 & -7 & 23 \\ 7 & 0 & -6 \\ -23 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Com que N'=-N, observem que N és antisimètrica i podem dir que «la combinació lineal de dues matrius antisimètriques és també antisimètrica».

Calculem tot seguit el producte P=A•B de les dues matrius simètriques i després trobem la transposada,

$$P=\begin{pmatrix}5&2&-6\\2&-3&1\\-6&1&4\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1&-4&3\\-4&7&5\\3&5&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5-8-18&-20+14-30&15+10+12\\2+12+3&-8-21+5&6-15-2\\-6-4+12&24+7+20&-18+5-8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-21&-36&37\\17&-24&-11\\2&51&-21\end{pmatrix}\quad \text{Matriu transposada, } P'=\begin{pmatrix}-21&17&2\\-36&-24&51\\37&-11&-21\end{pmatrix}$$

Veiem que $P'\neq P$ i $P'\neq -P$, per la qual cosa P no és simètrica ni antisimètrica. Concloem que: «La matriu producte de dues matrius simètriques no és necessàriament simètrica».

Finalment, trobem $Q=C\bullet D$, on C i D són matrius antisimètriques, i després escrivim la seva transposada

$$Q=\begin{pmatrix}0&3&-5\\-3&0&-2\\5&2&0\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0&1&4\\-1&0&-6\\-4&6&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-3+20&0+0-30&0-18+0\\0+0+8&-3+0-12&-12+0+0\\0-2+0&5+0+0&20-12+0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}17&-30&-18\\8&-15&-12\\-2&5&8\end{pmatrix}\quad \text{Matriu transposada, } Q'=\begin{pmatrix}17&8&-2\\-30&-15&5\\-18&-12&8\end{pmatrix}$$

En aquest cas tampoc Q no és simètrica ni antisimètrica, ja que $Q'\neq Q$ i també $Q'\neq -Q$. Apuntem, per acabar el problema, que «la matriu producte de dues matrius antisimètriques no és necessàriament una matriu antisimètrica».

Matrius involutiva i ortogonal

41. Sabem que una matriu A és involutiva d'índex p si aquest p és el mínim nombre natural de manera que $A^p=I$. Si p és 2, een diem simplement involutiva. Si $\mathbf{f}_1=(-1\ -1\ -1)$, $\mathbf{f}_2=(0\ 1\ 0)$ i $\mathbf{f}_3=(0\ 0\ 1)$ són matrius fila, estudia aquesta definició per a les matrius $A=(\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2\ \mathbf{f}_3)'$, $B=(\mathbf{f}_2\ \mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_3)'$ i $C=(\mathbf{f}_2\ \mathbf{f}_3\ \mathbf{f}_1)'$.

Solució. Calculem les successives potències de les matrius donades fins obtenir la matriu unitat. Apuntem en primer lloc les matrius

$$A=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\quad\wedge\quad C=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$$

POTÈNCIES DE A:

$$A^2=A\bullet A=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0+0&1-1+0&1+0-1\\0+0+0&0+1+0&0+0+0\\0+0+0&0+0+0&0+0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Com que $A^2=I$, observem que A és una matriu involutiva d'índex 2, o simplement, $\boxed{\text{A és una matriu involutiva}}$.

POTÈNCIES DE B:

$$B^2=B\bullet B=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-1+0&0-1+0&0-1+0\\0+1+0&-1+1+0&0+1-1\\0+0+0&0+0+0&0+0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$B^3=B^2\bullet B=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+1+0&-1+1+0&0+1-1\\0+0+0&1+0+0&0+0+0\\0+0+0&0+0+0&0+0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Com que $B^3=I$, resulta que $\boxed{\text{B és una matriu involutiva d'índex 3}}$

POTÈNCIES DE C:

$$C^2=C\bullet C=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+0+0&0+0+0&0+1+0\\0+0-1&0+0-1&0+0-1\\0+0+1&-1+0+1&0-1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&-1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$C^3=C^2\bullet C=\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&-1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+0-1&0+0-1&0+0-1\\0+0+1&-1+0+1&0-1+1\\0+0+0&1+0+0&0+0+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$C^4=C^3\bullet C=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+0+1&-1+0+1&0-1+1\\0+0+0&1+0+0&0+0+0\\0+0+0&0+0+0&0+1+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Com que $C^4=I$, diem que $\boxed{\text{C és una matriu involutiva d'índex 4}}$.

42. Sigui la matriu A donada al. Redueix tots els termes a comú denominador, treu factor comú, determina la transposada A' i després el producte A•A'. De quin tipus és la matriu donada?

$$A=\begin{pmatrix}3/13&4/13&12/13\\12/17&-12/17&1/17\\148/221&141/221&-84/221\end{pmatrix}$$

Solució. Com que $221=13\cdot 17$ observem que el mínim comú múltiple dels denominadors és precisament 221. Reduïm, doncs, a comú denominador,

$$A=\begin{pmatrix}17.3/221&17.4/221&17.12/221\\13.12/221&13.(-12)/221&13.1/221\\148/221&141/221&-84/221\end{pmatrix}$$

Multiplicant, traient factor comú el denominador i transposant la matriu,

$$A=\frac{1}{121}\begin{pmatrix}51&68&204\\156&-156&13\\148&141&-84\end{pmatrix}\Rightarrow A'=\frac{1}{121}\begin{pmatrix}51&156&148\\68&-156&141\\204&13&-84\end{pmatrix}$$

Calculem el producte A•A',

$$A\bullet A'=\frac{1}{(121)^2}\begin{pmatrix}51&68&204\\156&-156&13\\148&141&-84\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}51&156&148\\68&-156&141\\204&13&-84\end{pmatrix}$$

Realitzant les operacions anteriors amb una calculadora, obtenim

$$A\bullet A'=\frac{1}{48841}\cdot\begin{pmatrix}48841 & 0 & 0\\ 0 & 48841 & 0\\ 0 & 0 & 48841\end{pmatrix}=\frac{48841}{48841}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$$

Com que $A\bullet A'=I$ vol dir que $\boxed{\text{A és una matriu ortogonal}}$. Com també sempre $A\bullet A^{-1}=I$, deduïm que en les matrius ortogonals s'esdevé que $A^{-1}=A'$, és a dir, que «la inversa d'una matriu ortogonal és igual a la seva transposada».

Matrius idempotents i nilpotents

43. Si $\mathbf{c}_1=(2\ -1\ 1)'$, $\mathbf{c}_2=(-2\ 3\ -2)'$ i $\mathbf{c}_3=(-4\ 4\ -3)'$ són les columnes d'una matriu A, troba la seva potència enèsima. De quin tipus és la matriu donada A?

Solució. Formem les successives potències de A,

$$A^2=A\bullet A=\begin{pmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+2-4 & -4-6+8 & -8-8+12\\ -2-3+4 & 2+9-8 & 4+12-12\\ 2+2-3 & -2-6+6 & -4-8+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{pmatrix}$$

Com que ens dóna $A^2=A$ significa que $\boxed{\text{A és una matriu idempotent}}$. Per tant,

$$A^3=A^2\bullet A=A\bullet A=A^2=A \qquad A^4=A^3\bullet A=A\bullet A=A^2=A \text{ etc}$$

Resulta, doncs, que $\boxed{A^{10}=A}$, ja que en general $A^n=A$, $\forall n\in N$.

44. Troba els productes A•B i B•A per a les matrius A i B. Què observes? Prova que aquesta conclusió significa que les matrius A i B són idempotents i comprova-ho per a les matrius donades, que són:

$$A=\begin{pmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{pmatrix} \quad\text{i}\quad B=\begin{pmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{pmatrix}$$

Solució. Calculem els dos productes A•B i B•A i ens fixem en el resultat obtingut,

$$A\bullet B=\begin{pmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+3-5 & -4-9+10 & -8-12+15\\ -2-4+5 & 2+12-10 & 4+16-15\\ 2+3-4 & -2-9+8 & -4-12+12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{pmatrix}$$

$$B\bullet A=\begin{pmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+2-4 & -6-8+12 & -10-10+16\\ -2-3+4 & 3+12-12 & 5+15-16\\ 2+2-3 & -3-8+9 & -5-10+12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{pmatrix}$$

Observem que $\boxed{A \bullet B = A}$ i $\boxed{B \bullet A = B}$. Partint d'aquestes dues igualtats hem de demostrar que A i B són dues matrius idempotents; és a dir, que $A^2=A$ i $B^2=B$. Provem-ho.

$$A^2=A\bullet A=(A\bullet B)\bullet A=A\bullet(B\bullet A)=A\bullet B=A \ , \ A^2=A \ , \ \boxed{\text{A idempotent}}$$

$$B^2=B\bullet B=(B\bullet A)\bullet B=B\bullet(A\bullet B)=B\bullet A=B \ , \ B^2=B \ , \ \boxed{\text{B idempotent}}$$

Comprovem que és així trobant el quadrat de cada matriu

$$A^2=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4+3-5 & -6-12+15 & -10-15+20 \\ -2-4+5 & 3+16-15 & 5+20-20 \\ 2+3-4 & -3-12+12 & -5-15+16 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$B^2=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4+2-4 & -4-6+8 & -8-8+12 \\ -2-3+4 & 2+9-8 & 4+12-12 \\ 2+2-3 & -2-6+6 & -4-8+9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Com que ha quedat $A^2=A$ i $B^2=B$, tant A com B són idempotents.

45. Calcula les potències successives de A, i dedueix si es tracta d'una matriu involutiva, idempotent o nilpotent. La matriu és:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Solució. Trobem les diferents potències de A fins que ens doni la matriu unitat I, la matriu nul·la O o la mateixa matriu A.

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+5-6 & 1+2-3 & 3+6-9 \\ 5+10-12 & 5+4-6 & 15+12-18 \\ -2-5+6 & -2-2+3 & -6-6+9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 3+15-18 & 3+6-9 & 9+18-27 \\ -1-5+6 & -1-2+3 & -3-6+9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Com que $A^3=O$, $\boxed{\text{la matriu A és nilpotent d'índex 3}}$.

Matrius complexes

46. Siguin les dues matrius complexes A i B donades al final. Troba'n les transposades i després les conjugades d'aquestes transposades. De quin tipus són aquestes dues matrius?

$$A=\begin{pmatrix} i & 1+i & 2-3i \\ -1+i & 2i & 1 \\ -2-3i & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad i \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2+3i \\ 1-i & 2 & -i \\ 2-3i & i & 0 \end{pmatrix}$$

Solució. Comencem fent primer l'operació de transposició i després la de conjugació

$$A'=\begin{pmatrix} i & -1+i & -2-3.i \\ 1+i & 2.i & -1 \\ 2-3.i & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \overline{A'}=\begin{pmatrix} -i & -1-i & -2+3.i \\ 1-i & -2.i & -1 \\ 2+3.i & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B'=\begin{pmatrix} 1 & 1-i & 2-3.i \\ 1+i & 2 & i \\ 2+3.i & -i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \overline{B'}=\begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2+3.i \\ 1-i & 2 & -i \\ 2-3.i & i & 0 \end{pmatrix}$$

Resulta directament que $\boxed{\text{A és antihermítica}}$ mentre que la matriu $\boxed{\text{B és hermítica}}$, ja que respectivament verifiquen

$$\overline{A'}=-A \quad i \quad \overline{B'}=B$$

Matrius equivalents, semblants i congruents

47. Prova que la matriu Q' és semblant a la matriu original Q fent servir la matriu P, on hauràs de trobar la matriu inversa P^{-1} per sistema d'equacions. Sabem que:

$$Q=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad i \quad P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Solució. Diem que dues matrius Q i Q' són semblants si i només si existeix una matriu regular P en què $Q=P^{-1}\bullet Q'\bullet P$. Per tant, hem de trobar la inversa de P i el mètode que seguim és el de sistema d'equacions,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -x_3=e_1 & (1) \\ -x_2+2.x_3=e_2 & (2) \\ -x_1+2.x_2+3.x_3=e_3 & (3) \end{cases}$$

De (1) tenim $x_3=-e_1$, i substituint en (2), $-x_2+2.(-e_1)=e_2$, d'on $x_2=-2.e_1-e_2$. Substituint també en (3), $-x_1+2.(-2.e_1-e_2)+3.(-e_1)=e_3$, $-x_1-4.e_1-2.e_2-3.e_1=e_3$, $x_1+7.e_1+2.e_2=-e_3$, $x_1=-7.e_1-2.e_2-e_3$.

En resum, $x_1=(-7\ -2\ -1)$, $x_2=(-2\ -1\ 0)$ i $x_3=(-1\ 0\ 0)$, i la matriu inversa de P és

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} -7 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Com que ha de ser $Q=P^{-1}\bullet Q'\bullet P$ trobarem en primer lloc el producte $N=Q'\bullet P$ i després $P^{-1}\bullet N$, que haurà de ser igual a Q.

$$N=Q'\bullet P=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0+0+0 & 0-1+0 & -2+2+0 \\ 0+0-1 & 0+0+2 & -3+0+3 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & -4+0+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}\bullet Q'\bullet P=P^{-1}\bullet N=\begin{pmatrix}-7&-2&-1\\-2&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&2&0\\0&0&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+2+0&7-4+0&0+0+4\\0+1+0&2-2+0&0+0+0\\0+0+0&1+0+0&0+0+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&4\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

Ens ha quedat $P^{-1}\bullet Q'\bullet P=Q$ i això vol dir que $\boxed{Q \text{ és semblant a } Q'}$.

Fem notar que la condició $P^{-1}\bullet Q'\bullet P=Q$, si la multipliquem a l'esquerra per P, serà equivalent a la $Q'\bullet P=P\bullet Q$. També podriem realitzar la comprovació emprant aquesta condició, on no fa falta saber P^{-1}.

Matrius quadrades no negatives

48. Comprova que són estocàstiques les matrius A, B i C, i després calcula A•B, B•A, C^2 i C^3. Són també matrius estocàstiques? Les matrius donades són:

$$A=\begin{pmatrix}0'2&0'5&0'3\\0'4&0'1&0'5\\0'6&0'3&0'1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0'1&0'8&0'1\\0'4&0'2&0'4\\0'7&0'1&0'2\end{pmatrix}\ \text{i}\ C=\begin{pmatrix}1/5&2/5&2/5\\2/5&1/5&2/5\\2/5&2/5&1/5\end{pmatrix}$$

Solució. Sabem que una matriu és estocàstica si tots els termes són no negatius i la suma dels de cada cada fila és la unitat.

De manera immediata veiem que les tres matrius donades verifiquen les condicions i són, per tant, estocàstiques. Calculem els productes A•B i B•C, sense exposar tot el càlcul numèric,

$$A\bullet B=\begin{pmatrix}0'2&0'5&0'3\\0'4&0'1&0'5\\0'6&0'3&0'1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0'1&0'8&0'1\\0'4&0'2&0'4\\0'7&0'1&0'2\end{pmatrix}=\dots=\begin{pmatrix}0'43&0'29&0'28\\0'43&0'39&0'18\\0'25&0'55&0'20\end{pmatrix}$$

$$B\bullet A=\begin{pmatrix}0'1&0'8&0'1\\0'4&0'2&0'4\\0'7&0'1&0'2\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0'2&0'5&0'3\\0'4&0'1&0'5\\0'6&0'3&0'1\end{pmatrix}=\dots=\begin{pmatrix}0'4&0'16&0'44\\0'4&0'34&0'26\\0'3&0'42&0'28\end{pmatrix}$$

Tant A•B com B•A són matrius estocàstiques perquè els seus termes són no negatius i la suma de cadascuna de les seves files és igual a la unitat. Així, per exemple, a la primera fila de A•B tenim,

$$\Sigma f_1=0'43+0'29+0'28=1$$

En realitat, podriem provar la propietat general que «*el producte de dues matrius estocàstiques és també una matriu estocàstica*».

Per facilitar els càlculs de la matriu C, escriurem els termes en forma decimal

$$C=\begin{pmatrix}1/5&2/5&2/5\\2/5&1/5&2/5\\2/5&2/5&1/5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0'2&0'4&0'4\\0'4&0'2&0'4\\0'4&0'4&0'2\end{pmatrix}$$

Lògicament C^2 i C^3 són estocàstiques, perquè en realitat una potència matricial no és més que el producte d'una matriu per ella mateixa. Comprovem-ho.

$$C^2=C\bullet C=\begin{pmatrix} 0'2 & 0'4 & 0'4 \\ 0'4 & 0'2 & 0'4 \\ 0'4 & 0'4 & 0'2 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 0'2 & 0'4 & 0'4 \\ 0'4 & 0'2 & 0'4 \\ 0'4 & 0'4 & 0'2 \end{pmatrix}=\dots=\begin{pmatrix} 0'36 & 0'32 & 0'32 \\ 0'32 & 0'36 & 0'32 \\ 0'32 & 0'32 & 0'36 \end{pmatrix}$$

$$C^3=C^2\bullet C=\begin{pmatrix} 0'36 & 0'32 & 0'32 \\ 0'32 & 0'36 & 0'32 \\ 0'32 & 0'32 & 0'36 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 0'2 & 0'4 & 0'4 \\ 0'4 & 0'2 & 0'4 \\ 0'4 & 0'4 & 0'2 \end{pmatrix}=$$

$$=\dots=\begin{pmatrix} 0'328 & 0'336 & 0'336 \\ 0'336 & 0'328 & 0'336 \\ 0'336 & 0'336 & 0'328 \end{pmatrix}$$

Notem que també C^2 i C^3 són estocàstiques, com ja havíem dit. Per exemple, en C^3 resulta

$$\sum f_1=0'328+0'336+0'336=1$$

i el mateix succeeix amb el reste de les altres files.

49. En l'anàlisi de *matèries primeres* i *productes resultants* s'estudia la "matriu de coeficients tècnics" A, de termes positius i en la qual la suma dels elements de cada columna és sempre inferior o igual a la unitat.

Comprova que la matriu donada és una matriu de coeficients tècnics, troba la matriu de Leontiev L associada a aquesta matriu i la seva inversa L^{-1}. La matriu és:

$$A=\begin{pmatrix} 0'8 & 0'2 & 0'04 \\ 0'1 & 0'2 & 0'24 \\ 0'05 & 0'6 & 0'72 \end{pmatrix}$$

Solució. Directament ja es veu que tots els termes de la matriu A són positius. Calculem la suma dels termes de cada columna,

$$\sum c_1=0'8+0'1+0'05=0'95 \quad\Rightarrow\quad \sum c_1\leq 1$$

$$\sum c_2=0'2+0'2+0'6=1'00 \quad\Rightarrow\quad \sum c_2\leq 1$$

$$\sum c_3=0'04+0'24+0'72=1'00 \quad\Rightarrow\quad \sum c_3\leq 1$$

Com que aquestes sumes són inferiors o iguals a la unitat, observem que $\boxed{\text{A és una matriu de coeficients tècnics}}$

Trobem ara fàcilment la *matriu de Leontiev* associada

$$L=I-A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0'8 & 0'2 & 0'04 \\ 0'1 & 0'2 & 0'24 \\ 0'05 & 0'6 & 0'72 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0'2 & -0'2 & -0'04 \\ -0'1 & 0'8 & -0'24 \\ -0'05 & -0'6 & 0'28 \end{pmatrix}$$

El càlcul de la seva inversa L^{-1} ens presentarà una mica més de complicació. Dels dos mètodes de resolució estudiats, per sistema d'equacions o per Gauss-Jordan, fem-ho amb el primer.

$$\begin{pmatrix} 0'2 & -0'2 & -0'04 \\ -0'1 & 0'8 & -0'24 \\ -0'05 & -0'6 & 0'28 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} 0'2.x_1-0'2.x_2-0'04.x_3=e_1 \\ -0'1.x_1+0'8.x_2-0'24.x_3=e_2 \\ -0'05.x_1-0'6.x_2+0'28.x_3=e_3 \end{cases}$$

Per evitar les operacions amb decimals, multipliquem per 100 les tres equacions anteriors,

$$\begin{cases} 20.x_1 - 20.x_2 - 4.x_3 = 100.\mathbf{e}_1 & (1) \\ -10.x_1 + 80.x_2 - 24.x_3 = 100.\mathbf{e}_2 & (2) \\ -5.x_1 - 60.x_2 + 28.x_3 = 100.\mathbf{e}_3 & (3) \end{cases}$$

Ràpidament podem trobar x_1, perquè si sumem les tres equacions, obtenim

$$5.x_1 = 100.\mathbf{e}_1 + 100.\mathbf{e}_2 + 100.\mathbf{e}_3 \ , \ \boxed{x_1 = 20.\mathbf{e}_1 + 20.\mathbf{e}_2 + 20.\mathbf{e}_3}$$

Simplifiquem les dues primeres equacions,

$$\begin{cases} 5.x_1 - 5.x_2 - x_3 = 25.\mathbf{e}_1 & (1) \\ -5.x_1 + 40.x_2 - 12.x_3 = 50.\mathbf{e}_2 & (2) \\ -5.x_1 - 60.x_2 + 28.x_3 = 100.\mathbf{e}_3 & (3) \end{cases}$$

En comptes de substituir, eliminem x_1, que ja coneixem, sumant (1)+(2) i (1)+(3)

$$\begin{cases} 35.x_2 - 13.x_3 = 25.\mathbf{e}_1 + 50.\mathbf{e}_2 & (1') \\ -65.x_2 + 27.x_3 = 25.\mathbf{e}_1 + 100.\mathbf{e}_3 & (2') \end{cases}$$

Eliminem x_3 multiplicant la primera per 27, la segona per 13

$$27.(1'): \quad 945.x_2 - 351.x_3 = 675.\mathbf{e}_1 + 1350.\mathbf{e}_2$$
$$13.(2'): \quad -845.x_2 + 351.x_3 = 325.\mathbf{e}_1 + 1300.\mathbf{e}_3$$

Sumant, $100.x_2 = 1000.\mathbf{e}_1 + 1350.\mathbf{e}_2 + 1300.\mathbf{e}_3$

Per tant, $\boxed{x_2 = 10.\mathbf{e}_1 + 13'5.\mathbf{e}_2 + 13.\mathbf{e}_3}$

Eliminem x_2 multiplicant la primera per 13, la segona per 7

$$13.(1'): \quad 455.x_2 - 169.x_3 = 325.\mathbf{e}_1 + 650.\mathbf{e}_2$$
$$7.(2'): \quad -455.x_2 + 189.x_3 = 175.\mathbf{e}_1 + 700.\mathbf{e}_3$$

Sumant, $20.x_3 = 500.\mathbf{e}_1 + 650.\mathbf{e}_2 + 700.\mathbf{e}_3$

Simplificant, $\boxed{x_3 = 25.\mathbf{e}_1 + 32'5.\mathbf{e}_2 + 35.\mathbf{e}_3}$

Així, doncs, la matriu inversa de Leontiev és

$$\boxed{L^{-1} = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 20 \\ 10 & 13'5 & 13 \\ 25 & 32'5 & 35 \end{pmatrix}}$$

50. Sigui la matriu A de files $\mathbf{f}_1=(1\ 2\ 3)$, $\mathbf{f}_2=(4\ 5\ 6)$ i $\mathbf{f}_3=(7\ 8\ 9)$. Escriu les matrius de permutació P_{213} i P_{132}. Troba les matrius producte que es poden formar entre elles. Són també matrius de permutació? Comprova el significat d'aquestes matrius de permutació, fent els productes matricials $M=P_{213}\bullet A$ i $N=A\bullet P_{132}$.

Solució. Les matrius de permutació s'obtenen permutant les línees (files o columnes) de la matriu unitat I. Com a cas particular, la P_{213} significarà que a la primera fila l'element unitat estarà al segon lloc, a la segona fila al primer, i a la tercera fila al tercer.

Igualment per a la P_{132} que tindrà de files $\mathbf{f}_1=(1\ 0\ 0)$, $\mathbf{f}_2=(0\ 0\ 1)$ i $\mathbf{f}_3=(0\ 1\ 0)$. Apuntem aquestes dues matrius

$$P_{213}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad P_{132}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hem de trobar el producte d'aquestes dues matrius, però com que no es verifica la commutativitat i com que no ens diuen l'ordre de multiplicació, trobarem els dos productes possibles

$$P_{213}\bullet P_{132}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0+0+0 & 0+0+0 & 0+1+0 \\ 1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+1 & 0+0+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{132}\bullet P_{213}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0+0+0 & 1+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+1 \\ 0+1+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Com que $P_{213}\bullet P_{132}=P_{312}$ i $P_{132}\bullet P_{213}=P_{231}$ hem comprovat que el producte de dues matrius de permutació és també una matriu de permutació.

Finalment, veiem el significat d'aquestes matrius de permutació, segons si es multiplica per l'esquerra o per la dreta d'una matriu donada A. Primer fem-ho *per l'esquerra.*

$$M=P_{213}\bullet A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0+4+0 & 0+5+0 & 0+6+0 \\ 1+0+0 & 2+0+0 & 3+0+0 \\ 0+0+7 & 0+0+8 & 0+0+9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Com que la matriu original A té per files $\mathbf{f}_1=(1\ 2\ 3)$, $\mathbf{f}_2=(4\ 5\ 6)$ i $\mathbf{f}_3=(7\ 8\ 9)$ es pot veure que, en multiplicar per l'esquerra per P_{213}, el que ha resultat ha estat la permutació de les files en l'ordre següent: $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_1$ i $\mathbf{f}_3$.

Fem després la multiplicació *per la dreta,*

$$N=A\bullet P_{132}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+0+0 & 0+0+3 & 0+2+0 \\ 4+0+0 & 0+0+6 & 0+5+0 \\ 7+0+0 & 0+0+9 & 0+8+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

Com que les columnes de la matriu A són $\mathbf{c}_1=(1\ 4\ 7)'$, $\mathbf{c}_2=(2\ 5\ 8)'$ i $\mathbf{c}_3=(3\ 6\ 9)'$, en multiplicar per la dreta per P_{132}, les columnes s'han disposat en aquest ordre: $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_3$ i $\mathbf{c}_2$.

En resum, la multiplicació per una matriu de permutació, si és per l'esquerra, permuta les files, mentre que si és per la dreta, permuta les columnes.

f) PROBLEMES PROPOSATS

1.1. CARACTERÍSTIQUES DE LES MATRIUS

Concepte de matriu

51. Un terreny de forma quadrada s'ha dividit en 25 parcel·les per mitjà de 5 files i de 5 columnes, ja que s'ha comprovat que la seva fertilitat és variable. Es disposan de 5 tipus d'adob diferent a_1, a_2, a_3, a_4 i a_5 i també de 5 varietats de blat b_1, b_2, b_3, b_4 i b_5. Es vol fer un estudi de l'eficàcia del trinomi terreny-adob-blat disposant a cada parcel·la un tipus d'adob i de blat diferent de manera que no es repeteixin ni a cada fila ni a cada columna.

Si les primeres files de la parcel·la són $\mathbf{f}_1=(a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, a_4b_4, a_5b_5)$, $\mathbf{f}_2=(a_2b_4, a_3b_5, a_4b_1, a_5b_2, a_1b_3)$, $\mathbf{f}_3=(a_3b_2, a_4b_3, a_5b_4, a_1b_5, a_2b_1)$ i $\mathbf{f}_4=(a_4b_5, a_5b_1, a_1b_2, a_2b_3, a_3b_4)$, quina serà l'última fila? Si s'ha comprovat estadísticament que el pes del blat obtingut ve donat per $p_{ij}=(6-i).(7-j).a_m.b_n$, on a_m i b_n s'on l'adob i el blat col·locats a la casella corresponent amb els valors $a_m=3.m-2$ i $b_n=32/2^n$, forma la matriu $P=(p_{ij})$. A quina casella correspon el pes màxim? I a quina el pes mínim?

Sol. $\mathbf{f}_5=(a_5b_3, a_1b_4, a_2b_5, a_3b_1, a_4b_2)$, $a_m=(1,4,7,10,13)$
$b_n=(16,8,4,2,1)$ $\mathbf{p}_1=(480, 800, 560, 300, 130)$, $\mathbf{p}_2=(192, 140, 2560, 1248, 32)$, $\mathbf{p}_3=(1008, 600, 312, 9, 384)$, $\mathbf{p}_4=(120, 2080, 64,96, 56)$ i $\mathbf{p}_5=(312, 10, 16, 336, 160)$.
Màx: $p_{23}=2560 \Rightarrow a_4$ i b_1. Mín.: $p_{34}=9 \Rightarrow a_1$ i b_5.

52. Formem una matriu quadrada d'ordre 4 de manera que la suma de 4 elements qualssevol que no siguin ni a la mateixa fila ni a la mateixa columna sigui, per exemple, sempre igual a 20. Trobem 4 números que, sumats, donin la seva meitat, 10. Aquests poden ser $X=(1,3,2,4)$. Canviem l'ordre i obtenim un altra possibilitat $Y=(3,4,2,1)$. Forma la matriu $A=(a_{ij})$ on $a_{ij}=x_i+y_j$ i comprova que compleix la condició de l'enunciat.

Calcula ara el Màx(mín $\mathbf{f}$) i el mín(Màx $\mathbf{f}$). Fes el mateix per a les columnes, Màx(mín $\mathbf{c}$) i mín(Màx $\mathbf{c}$). Quina relació hi ha entre aquests quatre valors?

Sol. $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 5 & 4 \\ 5 & 6 & 4 & 3 \\ 7 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ Màx(mín $\mathbf{f}$)=5 mín(Màx $\mathbf{f}$)=5, Màx(mín $\mathbf{c}$)=5 mín(Màx $\mathbf{c}$)=5. Són iguals

53. Si $Q=(q_0, q_1, ..., q_8)$ és la successió (4, 5, -12, 20, -27, 33, -39, 39, 0), construeix la matriu $A=(a_{ij})$ de tercer ordre en forma de quadrat màgic, on els seus termes vénen donats pel polinomi de Newton p(k) següent en què $a_{ij}=p(k)$, on $k=3.i-j$:

$$p(k)=\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}.q_m$$

Sol. $a_{11}=p(2)=\binom{2}{0}.q_0+\binom{2}{1}.q_1+\binom{2}{2}.q_2=2$ etc. $\Rightarrow A=\begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

Definició de matriu

54. Siguin els conjunts indexats $I=\{i \ / \ 1 \le i \le 3\}$, $J=\{j \ / \ 1 \le j \le 4\}$ i l'aplicació matricial f_A definida per f_A: $(i,j) \rightarrow a_{ij}$, on $a_{ij}=5.i-3.j$. Escriu la matriu $A=(a_{ij})$. Quines són les seves files i columnes? De quin tipus és la successió dels termes de cada fila? I la dels de cada columna?

Sol. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 & -7 \\ 7 & 4 & 1 & -2 \\ 12 & 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ $\mathbf{f}_1=(2 \ \ -1 \ \ -4 \ \ -7)$, $\mathbf{f}_2=(7 \ \ 4 \ \ 1 \ \ -2)$, $\mathbf{f}_3=(12 \ \ 9 \ \ 6 \ \ 3)$ Pr. arit. d=-3

$\mathbf{c}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}$ $\mathbf{c}_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ $\mathbf{c}_3=\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\mathbf{c}_4=\begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ Prog. aritmèt. d=5

55. Per $I=\{1,2,3\}$ i $J=\{1,2\}$ definim la matriu A per l'aplicació $f_A(i,j)=m.a.(i,j)$, on m.a. és la seva mitjana aritmètica, i la matriu B pels conjunts indexats $I'=\{1,2\}$ i $J'=\{1,2,3\}$ i per l'aplicació $f_B(i,j)=m.g.(i,j)$, on m.g. és la seva mitjana geomètrica. Construeix les matrius A i B. Quin és el seu ordre? Són equidimensionals?

Sol. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 2 \\ 2 & 5/2 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 2 & \sqrt{6} \end{pmatrix}$ ord(A)=3×2, ord(B)=2×3 No equidim.

Operacions elementals entre línies

56. Donada la matriu A, estudia si les matrius fila són linealment independents, determinant els valors dels coeficients x, y i z a la combinació lineal $x.\mathbf{f}_1+y.\mathbf{f}_2+z.\mathbf{f}_3=\mathbf{f}_0$, on $\mathbf{f}_0$ és la fila nul·la. Passarà el mateix per a les matrius columna? Comprova-ho. La matriu A és:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 9 & 7 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sol. $x=y=z=0$, $a.\mathbf{c}_1+b.\mathbf{c}_2+c.\mathbf{c}_3=\mathbf{c}_0 \Rightarrow a=b=c=0$. Lin.Ind.

57. La matriu de Durer (s.XVI) és una matriu quadrada de quart ordre que està formada pels 16 primers nombres naturals i té com a columnes extrems $\mathbf{c}_1=(16\ 5\ 9\ 4)'$ i $\mathbf{c}_4=(13\ 8\ 12\ 1)'$. Sabent que la suma de les files, columnes i diagonals és sempre constant, dedueix l'any $a_{42}a_{43}$ en que es va estudiar i després els altres termes que falten. És cert que la quarta fila és combinació lineal de les tres primeres? Comprova-ho. Quant val el quocient $q=(\mathbf{f}_4-\mathbf{f}_1)/(\mathbf{f}_2-\mathbf{f}_3)$?

Sol. S=34 , Any=1514 , falten 2,3,6,7,10,11 , $\mathbf{c}_2=(3\ 10\ 6\ 15)'$
$\mathbf{c}_3=(2\ 11\ 7\ 14)'$, $\mathbf{f}_4=\mathbf{f}_1+3.\mathbf{f}_2-3.\mathbf{f}_3$ $q=3$.

Rang d'una matriu

58. Pel mètode de reducció de Gauss, troba la matriu escalonada i dedueix el rang de les matrius següents $A,B,C\in M_{3\times4}$:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 6 & -3 & 12 & 6 \\ 4 & -2 & 8 & 4 \end{pmatrix}\ \text{i}\ C=\begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 & 8 \\ -3 & 9 & 6 & -12 \\ -1 & 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Sol. $\rho(A)=3$, $\rho(B)=2$ i $\rho(C)=1$.

59. Siguin les matrius files $\mathbf{f}_1=(1\ -3\ 7\ 2\ -8)$, $\mathbf{f}_2=(2\ 1\ 0\ 4\ -2)$, $\mathbf{f}_3=(3\ 6\ 1\ -4\ 6)$, $\mathbf{f}_4=(4\ 0\ 8\ -4\ 0)$ i $\mathbf{f}_5=(5\ 2\ 8\ -1\ -2)$. Estudia si són o no linealment independents per mitjà del càlcul del rang de la matriu $A=(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4, \mathbf{f}_5)'$ aplicant el mètode de reducció de Gauss.

Sol. $\rho(A)=4$, $4\neq$nº files $\Rightarrow$ $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4, \mathbf{f}_5\}$=lin. dependents.

60. Analitza si la matriu A és escalonada i, sense fer cap càlcul, escriu el seu rang ρ. Quantes files són linealment independents? Considera la matriu transposad $A'=(\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2 \dots \mathbf{c}_6)'$ i calcula el rang ρ'. Coincideixen els rangs? Escriu la combinació lineal entre les columnes dependents de la matriu A. La matriu de partida és:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \textit{Sol.} \begin{cases} \rho(A)=4 \Rightarrow 4 \text{ files lin.ind. , } \rho'(A)=4 \\ c_5=(c_1-4.c_2+6.c_3+2.c_4)/8 \\ c_6=(5.c_1-4.c_2+6.c_3+2.c_4)/8 \end{cases}$$

1.2. OPERACIONS AMB MATRIUS

Operacions elementals: ('), (+) i (.)

61. Una empresa d'electrodomèstics té dues botigues que venen tres tipus d'aparells: radio-cassets, televisors i neveres. Les existències actuals són 15 rad., 21 telev. i 8 nev. per a la primera botiga, i 12 rad., 17 telev. i 23 nev. per a la segona. Expressa-ho en forma matricial.

Si es rep una nova comanda de 8 rad., 5 telev. i 9 nev. per a la primera botiga i 3 rad., 7 telev. i 2 nev. per a la segona, quina és la nova matriu d'existències? Resol el problema en forma matricial.

Sol. $E_1=\begin{pmatrix} 15 & 21 & 8 \\ 12 & 17 & 23 \end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix} 8 & 5 & 9 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$, $E=E_1+E_2=\begin{pmatrix} 23 & 26 & 17 \\ 15 & 24 & 25 \end{pmatrix}$

62. Una sabateria per a homes i dones disposa dels següents números de calçat: 38, 39, 40, 41 i 42. Al començament d'any els preus de cada tipus de sabates d'home són 2.300ptes el 38, 2.640ptes el 39, 2.780ptes el 40, 2.860ptes el 41 i 2.900ptes el 42, i per a dona 2.560ptes el 38, 2.700ptes el 39, 2.920ptes el 40, 3.040ptes el 41 i 3.100ptes el 42.

Si a les rebaixes de gener es fa un descompte del 25%, quins seran els nous preus de venda? Expressa-ho tot en forma matricial.

Sol. $P_1=\begin{pmatrix} 2300 & 2640 & 2780 & 2860 & 2900 \\ 2560 & 2700 & 2920 & 3040 & 3100 \end{pmatrix}$ $P_2=P_1-25\%.P_1$

$$P_2=\frac{3}{4}.P_1=\begin{pmatrix} 1725 & 1980 & 2085 & 2145 & 2175 \\ 1920 & 2025 & 2190 & 2280 & 2325 \end{pmatrix}$$

63. Calcula les combinacions lineals $M=(1/3).A-(5/2).B+(1/6).C$ i $N=(1/6).(2.A-15.B+C)$. Quina relació hi ha entre elles. Perquè? Les matrius A, B i C són:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} , \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad i \quad C=\begin{pmatrix} 25 & 9 & -4 \\ -22 & -47 & 60 \\ 38 & 3 & -10 \end{pmatrix}$$

Sol. $M=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ comú denominador M=N.

64. Escriu la matriu E com a combinació lineal de les matrius A, B, C i D, donades per

$$E=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} , \quad A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} , \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad C=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad i \quad D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol. E=2.A-5.B+3.C-4.D.

65. Resol el sistema matricial de tres equacions amb tres incògnites 2.X-3.Y+Z=A , 3.X+Y-2.Z=B i X-2.Y+3.Z=C, on les matrius de segon ordre són:

$$A=\begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -12 & -11 \end{pmatrix} , \quad B=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -7 & -3 \end{pmatrix} \quad i \quad C=\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$$

Sol. X=(-A+7.B+5.C)/24 $X=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ i $Z=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

66. Per a la matriu A de columnes $\mathbf{c}_1$=(1/3 -3/2)', $\mathbf{c}_2$=(-1 2)' i $\mathbf{c}_3$=(0 3/4)' i la B de files $\mathbf{f}_1$=(2/3 1/2 2) i $\mathbf{f}_2$=(0 -1 -1/4), comprova amb l'enter α=-2 la propietat de distributivitat matricial.

Sol. $\alpha.(A+B)=\alpha.A+\alpha.B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

67. D'unes matrius conegudes estudiades en economia, M, N i P, i d'unes altres de desconegudes X i Y, sabem que guarden les relacions següents: X-Y=M, X+X'=N i Y-Y'=P. Troba X i Y si:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad N=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad i \quad P=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Sol. X'-Y'=M' , X=(M+N+P-M')/2, Y=X-M $X=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Producte de matrius

68. La secció de formatgeria d'un hipermercat disposa de 5 marques diferents de formatge: A, B, C, D i E. Diàriament es venen 154kg de A, 168 de B, 143 de C, 172 de D i 185 de E. A més, se sap que els preus de cost són de 63pts/kg per a la marca A, 57 per a la B, 71 per a la C, 59 per a la D i 54 per a la E, mentre que els preus de venda són de 84pts/kg per la marca A, 81 per la B, 91 per la C, 82 per la D i 76 per la E.

Troba la *matriu de benefici* de dues maneres diferents, aplicant la propietat de distributivitat matricial.

Sol. $B_T=E\bullet B_U \Rightarrow B_T=E\bullet(P_V-PC) \wedge B_T=E\bullet P_V-E\bullet P_C$ on $E=(154\ 168\ 143\ 172\ 185)$, $P_V=(84\ 81\ 91\ 82\ 76)'$, $P_C=(63\ 57\ 71\ 59\ 54)'$, $B_T=18152$pts.

69. Amb les matrius $A,B\in M_2$, que tenen respectivament els termes $a_{11}=1$, $a_{12}=2$, $a_{21}=2$, $a_{22}=4$, $b_{11}=6$, $b_{12}=-8$, $b_{21}=-3$ i $b_{22}=4$, troba en primer lloc el producte $M=B\bullet A$ i després $P=M\bullet B$

Sol. $M=\begin{pmatrix} -10 & -20 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M\neq O \wedge B\neq O \Rightarrow M\bullet B=O$ M i B divisors de zero

70. Dedueix els valors que han de tenir els paràmetres m i n perquè commutin les matrius:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B=\begin{pmatrix} m & n \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

Sol. $A\bullet B=B\bullet A \Rightarrow m=5 \wedge n=4$.

71. Digues si són multiplicables les matrius A, B i C següents i comprova que el producte de matrius té la propietat associativa:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sol. $(A\bullet B)\bullet C=A\bullet(B\bullet C) \Rightarrow A\bullet B\bullet C=\begin{pmatrix} 34 & -7 & 13 & -21 \\ 32 & -7 & 32 & 0 \end{pmatrix}$

72. Calcula els productes matricials $M=(A\bullet B\bullet C)'$, $N=A'\bullet B'\bullet C'$ i $P=C'\bullet B'\bullet A'$. Quina relació d'igualtat es verifica?. Les matrius són:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Sol. $M=P=\begin{pmatrix} 25 & 45 \\ -1 & -97 \end{pmatrix} \Rightarrow (A\bullet B\bullet C)'=C'\bullet B'\bullet A'$, $N=\begin{pmatrix} 29 & 16 \\ 98 & -28 \end{pmatrix}$

73. Comprova si es verifica la propietat distributiva per l'esquerra del producte de matrius respecte a la suma. Utilitza les tres matrius quadrades:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad i \quad C=\begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Sol. Sí, $A\bullet(B+C)=A\bullet B+A\bullet C=\begin{pmatrix} 0 & 10 & 5 \\ 21 & -1 & 13 \\ -8 & -3 & -10 \end{pmatrix}$

74. Es pot aplicar la llei de simplificació per al producte matricial?. És a dir, de $A\bullet B=A\bullet C$ es dedueix necessàriament que $B=C$? Quina condició s'ha de complir perquè sigui així? Aplica després les teves conclusions trobant els productes i el rang de la matriu A si:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad i \quad C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sol. $A\bullet B=A\bullet C \not\Rightarrow B=C$
Cond: $\exists A^{-1} \Rightarrow \rho(A)=3$
$A\bullet B=A\bullet C=\begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 15 & 0 & -5 \\ -3 & 15 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ $B\neq C$, $\rho(A)=2$

75. Una matriu A té per files $f_1=(x\ \ y\ \ z)$, $f_2=(5\ 2\ 0)$ i $f_3=(0\ -4\ 5)$. Determina el valor positiu que han de tenir les incògnites x, y i z perquè es verifiqui la propietat commutativa de A amb la seva transposada A'.

Sol. $A\bullet A'=A'\bullet A \Rightarrow x=2$, $y=3$ i $z=4$.

76. Calcula la matriu $M=(-1/2).(A^2-A\bullet B+B\bullet A-B^2-C\bullet A+C\bullet B)$, que prèviament hauràs de simplificar, on les matrius A, B i C són:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad i \quad C=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Sol. $M=-\frac{1}{2}.(A+B-C)\bullet(A-B)$ $\quad M=\begin{pmatrix} 1 & -7 & -7 \\ 1 & 0 & 1 \\ -8 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

Càlcul de la matriu inversa

77. Per a la matriu A que té com a columnes $c_1=(7\ 5)'$ i $c_2=(4\ 3)'$, calcula la seva inversa A^{-1} tant pel mètode del sistema d'equacions com pel de Gauss-Jordan:

Sol. $A^{-1}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $M=\left[\begin{array}{cc|cc} 7 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$ $A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$

78. Troba la matriu indeterminada X que compleix l'equació matricial $A \bullet X+B=5.I$, on I és la matriu unitat i les matrius A i B són:

$$A=\begin{pmatrix} 8 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B=\begin{pmatrix} 18 & -19 & 7 \\ 10 & -10 & 6 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Sol. $X=A^{-1} \bullet (5.I-B)$ $A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 6 & -7 & -2 \\ -9 & 11 & 2 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

79. Per a la matriu A de quart ordre troba la seva inversa A^{-1}, emprant un sistema de 4 equacions amb les 4 incògnites que són les files f_1, f_2, f_3 i f_4 de la matriu inversa. La matriu de partida és:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{Sol. } A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Potències i polinomis de matrius

80. La matriu $A \in M_2$ té per files $f_1=(a\ 0)$ i $f_2=(b\ c)$. Calcula les seves potències fins a trobar una llei de formació. Apunta-la introduint un sumatori.

Sol. $A^n=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ on $\alpha=a^n$, $\beta=b.\sum_{i=0}^{n-1} a^i.c^{n-i-1}$, $\gamma=c^n$.

81. Per a la matriu A de files $f_1=(2\ 1)$ i $f_2=(1\ 2)$ i a partir de l'equació matricial $A^2+m.A+n.I=O$, determina les incògnites m i n, essent I la matriu unitat i O la matriu nul·la.

Sol. m=-4 , n=3.

82. Demostra que, en general, les matrius no compleixen la propietat «Suma per diferència, igual a diferència de quadrats». Per què? Comprova-ho per a les matrius:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad i \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Sol. $M=(A+B)\bullet(A-B)=A^2-A\bullet B+B\bullet A-B^2$, $N=A^2-B^2$, $A\bullet B\neq B\bullet A \Rightarrow M\neq N$

$$M=\begin{pmatrix} -2 & 6 & -4 \\ 12 & -25 & 14 \\ 16 & -15 & 20 \end{pmatrix}, \quad N=\begin{pmatrix} 10 & 5 & -6 \\ -14 & -18 & 27 \\ 30 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

83. Comprova que el polinomi $P(x)=x^3-7.x^2+11.x-5$ és un polinomi anul·lador per a la matriu A següent. Ho seria també el polinomi $Q(x)=x^4-7.x^3+11.x^2-5.x$? Troba també la inversa A^{-1} per Gauss-Jordan i a partir del polinomi anul·lador.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad Sol.\ A^3=\begin{pmatrix} 32 & 62 & 31 \\ 31 & 63 & 31 \\ 31 & 62 & 32 \end{pmatrix}, \ A^3-7.A^2+11.A-5.I=O\ ,\ \text{Sí}.$$

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

84. Comprova que $p(x)=x^3-2.x^2-9.x$ és un polinomi anul·lador de la matriu A. com que $p(x)=x.q(x)$, on $q(x)=x^2-2x-9$, podem dir que el polinomi q(x) és un altre pol. anul·lador de la matriu A? La matriu és:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad Sol.\ p(A)=O\ ,\ q(A)=\begin{pmatrix} -5 & 5 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \quad q(A)\neq O \Rightarrow$$
q(x)=P. no anul.

Partició de matrius

85. Donades les matrius $A\in M_{4\times9}$ i $B\in M_{9\times3}$ fes la següent partició de la matriu A, A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{22} i A_{23} on totes són de $M_{2\times3}$, i la partició de la matriu B, B_{11}, B_{21}, B_{31} de $M_{3\times2}$ i B_{12}, B_{22} i B_{32} de $M_{3\times1}$. Calcula després el producte $A\bullet B$, per mitjà de les quatre matrius particionades resultants M_{11}, M_{12}, M_{13} i M_{14} de $A\bullet B$. Les matrius són:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & -6 & 7 & -8 & 9 \\ -10 & 11 & -12 & 13 & -14 & 15 & -16 & 17 & -18 \\ 19 & -20 & 21 & -22 & 23 & -24 & 25 & -26 & 27 \\ -28 & 29 & -30 & 31 & -32 & 33 & -34 & 35 & -36 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 9 & -10 & 27 \\ -8 & 11 & -26 \\ 7 & -12 & 25 \\ -6 & 13 & -24 \\ 5 & -14 & 23 \\ -4 & 15 & -22 \\ 3 & -16 & 21 \\ -2 & 17 & -20 \\ 1 & -18 & 19 \end{pmatrix}$$

Sol. $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$

$$A\bullet B=\begin{pmatrix} 165 & -690 & 975 \\ -570 & 1824 & -2938 \\ 975 & -2958 & 4701 \\ -1380 & 4092 & -6564 \end{pmatrix}$$

86. Particionant la matriu $A \in M_4$ mitjançant 4 matrius M, N, P i Q de segon ordre, calcula la seva inversa i comprova que, efectivament, $A\bullet A^{-1}=I$. La matriu A és:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 7 & 4 \\ 7 & 8 & 9 & 5 \end{pmatrix} \quad \textit{Sol. } R=Q^{-1}=\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 9 & -7 \end{pmatrix} \quad A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & -4 \\ -22 & -91 & -74 & 95 \\ 38 & 156 & 127 & -163 \end{pmatrix}$$

1.3. TIPUS DE MATRIUS

Matrius triangulars, diagonal i escalar

87. Siguin les matrius triangulars inferiors A i B i la triangular superior C. Calcula el producte $P=A\bullet B$ i el quadrat $Q=C^2$. Observa que es verifica $p_{ij}=a_{ij}.b_{ij}$, $q_{ij}=(c_{ij})^2$ per a tots els termes. Passarà sempre en els productes de les matrius triangulars? Comprova-ho fent el nou producte $R=B\bullet A$.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & -5 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 105 & 0 & 0 & 0 \\ 42 & 6 & 0 & 0 \\ 70 & 5 & 9 & 0 \\ 52 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad i \quad C=\begin{pmatrix} -6 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 12 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\textit{Sol. } A\bullet B=\begin{pmatrix} 105 & 0 & 0 & 0 \\ -84 & 18 & 0 & 0 \\ -280 & 25 & -9 & 0 \\ 104 & -3 & 16 & -15 \end{pmatrix}, \quad C^2=\begin{pmatrix} 36 & 36 & 4 & 1 \\ 0 & 144 & 25 & 9 \\ 0 & 0 & 49 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{No} \quad B\bullet A=\begin{pmatrix} 105 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 18 & 0 & 0 \\ 24 & 60 & -9 & 0 \\ 25 & 14 & 8 & -15 \end{pmatrix}$$

88. Calcula en primer lloc la inversa A^{-1} de la matriu A plantejant i resolent un sistema d'equacions. Després troba el producte $M=A^{-1} \bullet B$ i, finalment, la matriu $N=M \bullet A$. De quin tipus és la matriu resultant N? Les matrius de partida són:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B=\begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Sol. $A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ N=M.diagonal.

Matrius simètrica i antisimètrica

89. Comprova per transposició que la matriu A és una matriu simètrica. Calcula la seva inversa A^{-1} fent un sistema d'equacions. És també simètrica aquesta matriu inversa?

$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ *Sol.* $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ A^{-1}=M. simèt.

Matrius involutiva i ortogonal

90. Comprova per la matriu A de files $f_1=(4\ 3\ 3)$, $f_2=(-1\ 0\ -1)$ i $f_3=(-4\ -4\ -3)$ que $A^2=I$. Com s'anomena aquesta matriu? Troba després les matrius $B=(I+A)/2$ i $C=(I-A)/2$ i calcula B^2 i C^2. Com s'anomenen les matrius B i C? Troba també el seu producte i, observant el resultat, digues com són entre elles les matrius B i C.

Sol. A=M. invol. $B=\begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 & 3/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} -3/2 & -3/2 & -3/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} B^2=B \\ C^2=C \end{matrix} \Rightarrow$

B, C=M. idemp. , $B \bullet C=O \Rightarrow$ B i C divisors de zero.

91. Una matriu $A \in M_2$ ve donada per les files $f_1=(12/13\ \ 5/13)$ i $f_2=(-5/13\ \ 12/13)$. Comprova que es tracta d'una matriu ortogonal. Quines seran les columnes de la matriu inversa?

Sol. $A \bullet A'=I$ $A^{-1}=A'$ $c_1=f_1$ $c_2=f_2$.

92. Per a la matriu A de termes decimals, calcula en primer lloc la seva transposada A' i després la seva inversa A^{-1} per sistema d'equacions. Existeix alguna relació entre aquestes matrius? Què podem deduir?

$$A=\begin{pmatrix} 0'36 & 0'48 & -0'8 \\ 0'48 & 0'64 & 0'6 \\ 0'8 & -0'6 & 0 \end{pmatrix}$$

Sol. $A'=A^{-1} \Rightarrow$ A=M.ortogonal.

Matrius idempotents i nilpotents

93. Prova que la matriu A donada al final és idempotent. És també idempotent la matriu B=I-A? Què succeeix amb els productes A•B i B•A?

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Sol. $A^2=A$ B=M. idemp. A•B=O $\wedge$ B•A=O.

94. Calcula les potències successives de la matriu A. Quina conclusió podem deduir?. La matriu A que té per files $\mathbf{f}_1=(1\ \ -2\ \ -6)$, $\mathbf{f}_2=(-3\ \ 2\ \ 9)$ i $\mathbf{f}_3=(2\ \ 0\ \ -3)$.

Sol. $A^2=\begin{pmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 9 & 10 & 9 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$, $A^3=A \Rightarrow$ A=M. periòd. (p=3)

Matrius complexes

95. Per a la matriu complexa de segon ordre A=i.I on i és la unitat imaginària i I és la matriu unitat, calcula les potencies A^2, A^3, A^4 i A^5 i dedueix una llei de formació per trobar la seva potència enèsima. Quant val A^{1992}?

Sol. $A=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, $A^2=-I$, $A^3=-A$, $A^4=I$, $A^5=A$, ... , $A^{1992}=I$.

Matrius equivalents, semblants i congruents

96. Utilitzant les matrius P i Q, troba dues matrius M i N equivalents a la matriu A. Calcula després els rangs de A, M i N. Què dedueixes? Les matrius inicials són:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}, \quad P=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad i \quad Q=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Sol. $M=Q\bullet A\bullet P=\begin{pmatrix} 61 & 16 & 139 \\ -2 & 13 & 16 \\ -2 & 13 & 16 \end{pmatrix}, \quad N=P\bullet A\bullet Q=\begin{pmatrix} 22 & 24 & -7 \\ 349 & 183 & -169 \\ 145 & 87 & -67 \end{pmatrix}$

$\rho(A)=2 \Rightarrow \rho(M)=2 \wedge \rho(N)=2.$

97. Sigui la matriu simètrica $A\in M_4$ i la matriu de pas P. Troba una nova matriu M que sigui congruent amb la matriu A. És també M una matriu simètrica? Justifica la resposta. Les matrius donades són les següents:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -6 & 8 \\ 4 & -6 & 5 & -9 \\ 0 & 8 & -9 & 7 \end{pmatrix} \quad i \quad P=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Sol. $M=P'\bullet A\bullet P=\begin{pmatrix} -12 & 2 & -5 & -1 \\ 17 & -11 & 32 & -16 \\ -13 & 1 & -43 & 25 \\ 35 & -1 & 37 & -5 \end{pmatrix}$ Sí $M'=(P'\bullet A\bullet P)'=...=M$.

Matrius quadrades no negatives

98. Troba la combinació lineal M=5.A-2.B per a les dues matrius estocàstiques A i B. La matriu M continuarà essent estocàstica? Les matrius són:

$$A=\begin{pmatrix} 0'24 & 0'51 & 0'25 \\ 0'37 & 0'46 & 0'17 \\ 0'48 & 0'14 & 0'38 \end{pmatrix} \quad i \quad B=\begin{pmatrix} 0'15 & 0'36 & 0'49 \\ 0'23 & 0'42 & 0'35 \\ 0'31 & 0'17 & 0'52 \end{pmatrix}$$

Sol. $M=\begin{pmatrix} 0'9 & 1'83 & 0'27 \\ 1'39 & 1'46 & 0'15 \\ 1'78 & 0'36 & 0'86 \end{pmatrix}$ No.

99. En l'estudi comercial realitzat entre dues nacions, la condició d'equilibri en els ingressos de cadascuna és Y=C+I+X-M, on Y són els ingressos, C el consum, I les inversions, X les exportacions i M les importacions. A més, sabem que el consum de cada nació és proporcional al seu ingrés, $C_1=c_1.Y_1$ i $C_2=c_2.Y_2$ i passa el mateix amb les importacions, $M_1=m_1.Y_1$ i $M_2=m_2.Y_2$.

Com que suposem que les dues nacions s'exporten i importen mútuament, les exportacions d'una depenen dels ingressos de l'altra, $X_1=m_2.Y_2$ i $X_2=m_1.Y_1$.

Troba els ingressos Y_1 i Y_2 d'equilibri per mitjà de la matriu de Leontiev L i de la seva inversa L^{-1}. Considera els valors $c_1=3/4$, $c_2=5/6$, $m_1=1/2$, $m_2=1/2$, $I_1=120$ i $I_2=280$.

Sol. $\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1-m_1 & m_2 \\ m_1 & c_2-m_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$ $\quad Y=A\bullet Y+B$ $\quad L\bullet Y=B \Rightarrow Y=L^{-1}\bullet B$

$A=\begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$, $L=\begin{pmatrix} 3/4 & -1/2 \\ -1/2 & 2/3 \end{pmatrix}$ $L^{-1}=\begin{pmatrix} 8/3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $Y=\begin{pmatrix} 880 \\ 1080 \end{pmatrix}$

100. Escriu una matriu de permutació P de quart ordre que ens permeti permutar les parelles de files $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ i també $\mathbf{f}_3$ i $\mathbf{f}_4$. Després estudia els productes matricials F=P•A i C=A•P. Què succeeix? La matriu A és:

$A=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix}$

Sol. $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad P=P_{2143}$ $\quad P\bullet A=(\mathbf{f}_2\ \mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_4\ \mathbf{f}_3)'$ $\quad A\bullet P=(\mathbf{c}_2\ \mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_4\ \mathbf{c}_3)$

APÈNDIX

A) Prova d'autoavaluació

B) Bibliografia escollida

C) Glossari de conceptes

PROVA D'AUTOAVALUACIÓ

PROBLEMES PARAMETRITZATS

Presentem a continuació una llista de dotze problemes que, com és lògic, no són representatius de la gran varietat d'exercicis que es podrien proposar. Tots aquests problemes de matrius depenen d'un *paràmetre* "a", que pot valer 1, 2, 3 o 4. Per a cadascun dels anteriors valors obtindràs una resposta diferent entre les vuit possibles donades.

En els següents *problemes parametritzats* substitueix en primer lloc el paràmetre a per 1, resol el problema, escull l'opció correcta i després fes una creu al quadre de respostes:

Matrius

1. Tenim una matriu quadrada A de tercer ordre, on el valor de cadascun dels seus 9 termes, a_{ij}, és donat segons els seus índexs de fila i columna per

$$a_{ij} = 12.(-1)^{i+j}\left(\frac{i+j}{a} + \frac{5}{i+j}\right)$$

Determina la matriu A. Si ara calcules la suma S de tots els seus termes, t'ha de donar:

A) S=45	B) S=41	C) S=37	D) S=57
E) S=65	F) S=69	G) S=49	H) S=33

2. Les files d'una matriu A(3×3) són $\mathbf{f}_1=(2.a+4 \quad a^2+3.a+2 \quad a^2-a-6)$, $\mathbf{f}_2=(2+a-a^2 \quad -a-a^2 \quad 1-a^2)$ i $\mathbf{f}_3=(10-a^2 \quad 1-2.a \quad 1-5.a)$. Comprova que la tercera fila es pot posar en combinació lineal de les altres dues, per mitjà dels coeficients λ_1 i λ_2. El producte p d'aquests coeficients és:

A) p=5/7	B) p=5/3	C) p=2/3	D) p=3/2
E) p=4/3	F) p=3/4	G) p=7/5	H) p=3/5

3. Calcula el rang r de la matriu quadrada A de quart ordre que té per columnes $\mathbf{c}_1=(1 \quad a \quad 2.a \quad a+1)'$, $\mathbf{c}_2=(2 \quad a+1 \quad 2.a+2 \quad a+3)'$, $\mathbf{c}_3=(3 \quad 3 \quad 6 \quad 6)'$ i $\mathbf{c}_4=(-4 \quad -4 \quad -2.a \quad -8)'$. Llavors, el valor m=r/a serà:

A) m=2/3	B) m=3/4	C) m=3/2	D) m=2
E) m=1/4	F) m=1	G) m=1/2	H) m=1/3

4. Partim de la matriu quadrada A de segon ordre que té per termes $a_{11}=a$, $a_{12}=i$, $a_{21}=i$ i $a_{22}=a$, on i és la unitat imaginària ($i=\sqrt{-1}$). Troba en primer lloc els coeficients m i n que verifiquen l'equació matricial $A^2+m.A+n.I=O$, on I és la matriu unitat i O la matriu nul·la. El valor $R=+\sqrt{m+n}$ serà

A) R=0	B) R=3	C) R=5	D) R=4
E) R=2	F) R=7	G) R=1	H) R=6

5. Donades les dues matrius quadrades A i B de tercer ordre

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & a & -2 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad i \quad B=\begin{pmatrix} a-4 & a+1 & a-2 \\ a+3 & a & a-3 \\ a+2 & a-1 & a+4 \end{pmatrix}$$

si calcules la matriu M=A•B-B•A, observaràs que la traça és nul·la i que la suma dels termes de la diagonal secundària és igual a -12, però si trobes la mitjana p dels seus vèrtexs, $p=(m_{11}+m_{13}+m_{31}+m_{33})/4$, obtindràs el valor:

A) p=4	B) p=3	C) p=2	D) p=6
E) p=7	F) p=5	G) p=8	H) p=1

6. Partim de l'equació matricial A•X=a.(B+C), on les matrius són:

$$A=\begin{pmatrix} a & a \\ a & 2.a \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 12/a \end{pmatrix} \quad i \quad C=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 12/a & 0 \end{pmatrix}$$

Calcula per mitjà d'un sistema d'equacions la matriu indeterminada X. Veuràs que està formada per dues columnes iguals, que son:

A) (-8, 9)'	B) (-5, 6)'	C) (-1, 2)'	D) (-3, 4)'
E) (-10, 11)'	F) (-4, 5)'	G) (-12, 13)'	H) (-2, 3)'

7. Per a la matriu A de files $\mathbf{f}_1=(2 \;\; a \;\; 0)$, $\mathbf{f}_2=(5 \;\; 2.a \;\; 3)$ i $\mathbf{f}_3=(2 \;\; a \;\; 1)$, calcula la seva inversa A^{-1} pel mètode de reducció de Gauss. La traça T d'aquesta inversa, és:

A) T=1	B) T=3/4	C) T=2	D) T=4/3
E) T=3/2	F) T=0	G) T=2/3	H) T=3

8. Se sap que $p_1(x)=(x-4).(x-2)^2$, $p_2(x)=(x-5).(x-1)^2$, $p_3(x)=(x-3).(x-2)^2$ i $p_3(x)=(x-2)^3$, són respectivament els polinomis anul·ladors de les matrius:

$$A_1=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad i \quad A_4=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcula únicament la matriu inversa $(A_a)^{-1}$ que et correspón segons el valor del paràmetre. La suma S dels termes de la primera fila és:

A) S=2/9	B) S=1/12	C) S=2/7	D) S=1/2
E) S=3/4	F) S=2/3	G) S=1/5	H) S=3/8

9. Per a la matriu A=(1 2 a) i la B de files $\mathbf{f_1}$=(1 0 -1), $\mathbf{f_2}$=(a 1 1) i $\mathbf{f_3}$=(-2 0 1), calcula per Gauss-Jordan la matriu inversa B^{-1}. Si ara trobes l'únic element donat per la matriu $X=A\bullet B^{-1}\bullet A'$, obtindràs:

A) X=27	B) X=9	C) X=13	D) X=33
E) X=11	F) X=19	G) X=44	H) X=22

10. Les quatre files d'una matriu quadrada A són $\mathbf{f_1}$=(8-a 0 0 0), $\mathbf{f_2}$=(7-a 8-a 0 0), $\mathbf{f_3}$=(6-a 7-a 8-a 0) i $\mathbf{f_4}$=(5-a 6-a 7-a 8-a). Fixa't que es tracta d'una matriu triangular inferior i calcula la potència A^4. La suma S dels termes de la primera columna serà:

A) S=8.156	B) S=20.507	C) S=46.721	D) S=28.704
E) S=57.253	F) S=37.512	G) S=12.405	H) S=4.240

11. Troba les matrius suma S=A+B i diferència D=A-B de les matrius complexes

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a+i & i \\ a-i & 2 & 1-a.i \\ -i & 1+a.i & 3 \end{pmatrix} \quad i \quad B=\begin{pmatrix} 3.i & 12/a & a+i \\ -12/a & 2.i & -1+a.i \\ -a+i & 1+a.i & i \end{pmatrix}$$

Després calcula el terme p_{11} de la matriu producte $P=S\bullet D$. El resultat és un número real igual a:

A) p_{11}=73	B) p_{11}=217	C) p_{11}=160	D) p_{11}=97
E) p_{11}=83	F) p_{11}=80	G) p_{11}=185	H) p_{11}=125

12. Una matriu quadrada A de segon ordre té com a termes $a_{11}=1/(a+2)$, $a_{12}=-(a+3)/(a+4)$, $a_{21}=-(a+4)/(a+5)$ i $a_{22}=1/(a+3)$. Determina la matriu de Leontiev L i la seva inversa L^{-1}. Si calcules el valor N=k.S, on k és la constant 3360 i S la suma de tots els termes de la matriu L^{-1}, obtindràs:

A) N=3.465	B) N=2.128	C) N=4.368	D) N=2.739
E) N=3.984	F) N=5.763	G) N=5.147	H) N=4.130

QUADRE DE RESPOSTES:

1 A B C D ○ E F G H	2 A B C D ○ E F G H	3 A B C D ○ E F G H	4 A B C D ○ E F G H
5 A B C D ○ E F G H	Després de resoldre tots els problemes, fes una creu a les respostes que consideris correctes.		6 A B C D ○ E F G H
7 A B C D ○ E F G H	Si creus que la resposta no figura entre les vuit donades, posa la creu al cercle central.		8 A B C D ○ E F G H
9 A B C D ○ E F G H	10 A B C D ○ E F G H	11 A B C D ○ E F G H	12 A B C D ○ E F G H

Puntuació:

Respostes encertades: ☐ Punts positius (×4): ☐

equivocades: ☐ negatius (×(-1)): ☐

Puntuació total: ☐

Respostes correctes en funció del paràmetre:

(a=1, 2, 3 i 4, respectivament)

P_1: F-A-C-H	P_2: B-D-G-E	P_3: D-C-F-G	P_4: A-G-E-B
P_5: C-B-A-F	P_6: E-F-H-C	P_7: F-A-D-E	P_8: H-G-B-D
P_9: B-C-F-A	P_{10}: E-D-G-H	P_{11}: G-E-A-F	P_{12}: C-H-E-A

Qualificació:

Per obtenir la nota N farem servir la "Part entera", on prendrem l'enter inferior a la puntuació donada. Així E(5'3)=5. Pel que fa a la qualificació, ens basarem en el barem següent:

Susp.($N<5$) Apr.($5 \leq N<7$) Not.($7 \leq N<9$) Exc.($N \geq 9$)

Nota [$N=E(P+3)/5$]: $\boxed{}$ Qualificació: $\boxed{}$

Si la puntuació no ha estat prou alta, es pot tornar a resoldre la prova, repassant abants els conceptes i exemples, però ara emprant el paràmetre a=2. Després es pot fer servir el paràmetre a=3 i, finalment, el paràmetre a=4.

BIBLIOGRAFIA ESCOLLIDA

ALEGRE, P. *Ejercicios resueltos de Matemáticas Empresariales 1.* Ed. A. C. Madrid. 1990

AYRES, F. *Matrices*. Serie Schaum. Ed. McGraw-Hill. México. 1989.

BOADAS, J. *Algebra Moderna a través de los problemas. Tomo II.* Ed. Teide. Barcelona. 1974.

BURGOS, A. *Iniciación a la Matemática Moderna.* Ed. Selecciones científicas. Madrid. 1974.

CANCELO, J.R. *Problemas de Algebra Lineal para Economistas. Tomo I.* Ed. Tebar Flores. Madrid. 1987.

CASANOVA, J. *Examenes de Algebra Lineal.* Ed. Universidad y Cultura. Madrid. 1987.

DIAZ HERNANDO, J. A. *Algebra, Geometría, Cálculo. Tomo II.* Ed. Tebar Flores. Madrid. 1989.

DIEGO, BRAULIO de. *Problemas de Algebra y Geometria. Problemas de Algebra Lineal.* Ed. Deimos. Madrid. 1986.

DOWLING, E.T. *Matemáticas para Economistas*. Serie Schaum. Ed. McGraw-Hill. México. 1982.

GUTIERREZ GOMEZ, A. *Algebra Lineal. Tomo (II).* Ed. Pirámide. Madrid. 1981.

HERAS, A. *Problemas de Algebra Lineal para la Economía.* Ed. A.C. Madrid. 1988.

LIPSCHUTZ, S. *Algebra Lineal.* Ed. McGraw-Hill. Madrid. 1992.

PRIETO, E. *Matemáticas para Economistas. Algebra Lineal.* Ed. I.C.E. Madrid. 1977.

SAÍNZ, M. A., SERAROLS, J. L., PEREZ, A. M. *Algebra.* Ed. Palahí. Girona. 1990.

SAMAMED, O. *Matemáticas 1. Economía y Empresa. Teoria.* Ed. C.E.R. Areces. Madrid. 1991.

THOMAS ARA, L. *Algebra Lineal.* Ed. El Autor. Madrid. 1974.

VEGAS PEREZ, A. *Elementos de Matemáticas para Economistas. Tomo 1.* Ed. Pirámide. Madrid. 1988.

YAMANE, T. *Matemáticas para Economistas.* Ed. Ariel Economía. Barcelona. 1983.

GLOSSARI DE CONCEPTES

Exposem a continuació un recull dels termes matemàtics emprats, seguits de la plana en què es poden trobar. Els números en negreta indiquen que la paraula és a la part de "Formulació matemàtica". En cas contrari, són a la part de "Conceptes i exemples":

- A -

- C -

- D -

- E -

- F -

- T -

- U -

- Z -

ÍNDEX